6 Neurčitý integrál

Neurčitý integrál se využívá ve fyzice, statistice, ekonomii i mnoha dalších oblastech a má úzkou souvislost s derivováním. Jejich vzájemná souvislost je přitom následující:

- Při derivování chceme ke známé funkci f nalézt funkci (derivaci) F tak, aby $f' = F$.
- Při integrování hledáme ke známé funkci f funkci (primitivní funkci) F tak, aby $F' = f$.

6.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál

Při řešení fyzikálních a matematických úloh někdy známe derivaci nějaké neznámé funkce a snažíme se zpětně tuto funkci nalézt. Daný problém řeší integrální počet zavedením *primitivní funkce* a *neurčitého integrálu.*

Definice 48 Nechť jsou funkce f a F definovány na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí k funkci f na intervalu I*, jestliže

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in I.$$

Poznámka 31 Je-li I interval uzavřený, uvažujeme v krajních bodech příslušné jednostranné derivace.

Příklad 41 Ze vzorců pro výpočet derivací lze snadno odhadnout, že primitivní funkcí k funkci $f(x) = \sin x$ na $\mathbb{R}$ je funkce $F(x) = -\cos x$, neboť $(-\cos x)' = \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Ne ke každé funkci definované na intervalu I existuje primitivní funkce na I, lze však dokázat následující tvrzení.

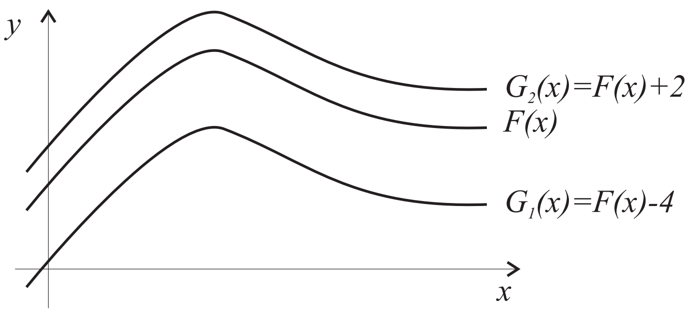
Věta 31 *Ke každé funkci f spojité na I existuje primitivní funkce na I.*

Poznamenejme, že existují také funkce, které nejsou na I spojité, a přesto mají na I primitivní funkci.

Zaměříme-li naši pozornost zpět na příklad 41, zjistíme, že $F(x) = -\cos x$ není jedinou primitivní funkcí k funkci $f(x) = \sin x$ na $\mathbb{R}$. Protože $(-\cos x{+}2)' = \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, je i funkce $G(x) = -\cos x{+}2$ primitivní funkcí k funkci $\sin x$ na $\mathbb{R}$. Obecně je to jakákoliv funkce ve tvaru $-\cos x + c$, kde c je libovolná konstanta. Toto zjištění lze shrnout do následující věty.

Věta 32 *Nechť F je primitivní funkce k funkci f na I. Pak každá primitivní funkce k f na I lze zapsat ve tvaru $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo.*

Z věty 32 plyne, že primitivní funkce F na intervalu I není určena jednoznačně. Pro jednu funkci f buď neexistuje žádná primitivní funkce, nebo jich existuje nekonečně mnoho a liší se o reálnou konstantu c. Grafy primitivních funkcí k funkci f na I jsou tedy „tvarově stejné“ a liší se jen posunutím ve směru osy y (viz obr. 47).



Obrázek 47: Grafy několika primitivních funkcí k funkci f.

Poznámka 32 Protože má každá primitivní funkce F na I vlastní derivaci f, je funkce F na I spojitá.

Poté, co jsme zavedli pojem primitivní funkce, můžeme nyní definovat *neurčitý integrál funkce f na intervalu I*, což je množina všech primitivních funkcí k funkci f na I.

Definice 49 *Neurčitým integrálem funkce f na intervalu I* nazýváme množinu všech primitivních funkcí k funkci f na I, tj. množinu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x)+c\,;\ c\in\mathbb{R},\ F \text{ je primitivní funkce k } f \text{ na } I\}.$$

Proces nalezení neurčitého integrálu se nazývá *integrování*.

Funkci f nazýváme *integrovanou funkcí*, krátce *integrandem*, x označujeme jako *integrační proměnnou* a $\mathrm{d}x$ označuje symbol, který určuje, podle které proměnné integrujeme. Číslo c nazýváme *integrační konstantou*.

Symbol $\int$ používaný pro integrál vznikl protažením písmene S, kterým začíná slovo *suma*. Souvislost mezi integrálem a sumou si ukážeme v kapitole věnované určitému integrálu.

Poznámka 33 V dalším textu budeme používat následující značení:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c$$

$$\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}.$$

Symbol c napsaný na konci vzorců pro výpočet neurčitých integrálů nebo při jejich výpočtech bude vždy dále znamenat integrační konstantu, tj. budeme předpokládat, že $c\in\mathbb{R}$.

Z definice neurčitého integrálu přímo plynou vztahy

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+c, \qquad \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x);$$

integrování a derivování jsou tedy dvě vzájemně (téměř) inverzní operace.

6.2 Metody výpočtu primitivní funkce

Proces integrování je podstatně složitější než derivování a ne vždy dokážeme neurčitý integrál najít. Např. primitivní funkce k funkcím $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, e^{-x^2} na jejich definičních oborech existují (protože se jedná o spojité funkce), ale tyto primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Ze znalostí derivací základních elementárních funkcí lze odvodit následující vztahy pro výpočet neurčitých integrálů. Tyto vzorce se obvykle nazývají *tabulkové integrály*.

$$
\begin{array}{rcll}
\int a\,\mathrm{d}x & = & ax + c & a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\[2em]
\int x^n\,\mathrm{d}x & = & \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \\[2em]
\int x^\alpha\,\mathrm{d}x & = & \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ x \in \mathbb{R}^+ \\[2em]
\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x & = & \ln|x| + c & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\[2em]
\int e^x\,\mathrm{d}x & = & e^x + c & x \in \mathbb{R} \\[2em]
\int a^x\,\mathrm{d}x & = & \frac{a^x}{\ln a} + c & a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R} \\[2em]
\int \sin x\,\mathrm{d}x & = & -\cos x + c & x \in \mathbb{R} \\[2em]
\int \cos x\,\mathrm{d}x & = & \sin x + c & x \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \operatorname{tg} x + c & & x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
\int \tfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x &= -\operatorname{cotg} x + c & & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
\int \tfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \operatorname{arctg} x + c & & x \in \mathbb{R} \\
\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \arcsin x + c & & x \in (-1,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x &= \ln|f(x)| + c & & f(x) \neq 0 \\
\int f(ax+b)\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{a}F(ax+b) + c & & a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ b \in \mathbb{R},\ F \text{ ...prim. f. k } f
\end{aligned}$$

Při výpočtech neurčitých integrálů se často využívá také následující tvrzení, jehož důkaz přímo vyplývá ze základních vlastností derivací a vztahu mezi derivací a integrálem.

Věta 33 *Nechť k funkcím* f *a* g *existují primitivní funkce na* I *a nechť* $a \in \mathbb{R}$*. Potom funkce* $f \pm g$, af *mají primitivní funkce na* I *a platí*

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 42 Najděte následující neurčité integrály.

a) $\displaystyle\int (\sin x + e^x + 1)\,\mathrm{d}x$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pro výpočet integrálu použijeme vzorce pro integrování základních elementárních funkcí a větu o součtu:

$$\int (\sin x + e^x + 1)\,\mathrm{d}x = -\cos x + e^x + x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, kde $x \in \langle 0, \infty)$.

Řešení: Pro výpočet integrálu použijeme vzorce pro integrování základních elementárních funkcí:

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

c) $\displaystyle\int \cos(5x+3)\,\mathrm{d}x$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pro výpočet integrálu použijeme mimo jiné poslední z uvedených vzorců pro integrování elementárních funkcí:

$$\int \cos(5x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin(5x+3) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že tento integrál lze vypočítat také pomocí substituční metody, které se budeme v dalším textu věnovat.

d) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}\,\mathrm{d}x$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Řešení: Protože čitatel $2x+1$ je derivací jmenovatele x^2+x+5, použijeme pro výpočet integrálu předposlední z uvedených vzorců pro integrování elementárních funkcí:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x^2+x+5\right| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Tento integrál lze vypočítat také pomocí substituční metody.

e) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$, kde $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení: Přestože se na první pohled nejedná o tabulkový integrál, ukážeme si, že jej lze na tabulkové integrály převést:

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$= -\operatorname{cotg} x - x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Obdobně jako u derivací, ani u integrálů neplatí, že integrál součinu je roven součinu integrálů. Pro integrování součinu se často používá *metoda per partes* (integrování po částech), která je odvozena ze vzorce pro derivování součinu:

$$
\begin{aligned}
(u(x)\cdot v(x))' &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \qquad / \textstyle\int \\
\textstyle\int (u(x)\cdot v(x))'\,\mathrm{d}x &= \textstyle\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x + \textstyle\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x \\
u(x)\cdot v(x) &= \textstyle\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x + \textstyle\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \\
\textstyle\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x &= u(x)\cdot v(x) - \textstyle\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Věta 34 (Metoda per partes) *Nechť funkce u a v mají na intervalu I derivace u' a v'. Existuje-li na I primitivní funkce k jedné z funkcí $u'\cdot v$, $u\cdot v'$, existuje i k druhé z nich a platí*

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\ \mathrm{d}x.$$

Metoda per partes se používá zejména v případech, kdy integrujeme součin dvou funkcí odlišného charakteru.

Za u obvykle volíme funkci, která se obtížně integruje, tedy např. $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ nebo funkci, která se derivováním zjednoduší, tedy např. polynom.

Za v' obvykle volíme funkci, která se naopak jednoduše integruje, tedy např. $\sin x$, $\cos x, e^x$, polynom nebo konstantu.

Pokud tedy např. integrujeme funkci ve tvaru $P(x)\cdot\sin x$, $P(x)\cdot\cos x$ nebo $P(x)\cdot e^x$, kde $P(x)$ je polynom, pak za u volíme $P(x)$, aby se nám derivováním zjednodušil. Naopak, pokud integrujeme funkci ve tvaru

$P(x) \cdot \ln x$, $P(x) \cdot \operatorname{arctg} x$ nebo $P(x) \cdot \arcsin x$, kde $P(x)$ je polynom, pak za v' volíme $P(x)$, protože funkce $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ se špatně integrují.

Postup, jakým se metoda per partes používá, si ukážeme na následujících dvou příkladech.

Příklad 43 Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x$, kde $x \in \mathbb{R}$.
Řešení: Pro výpočet integrálu použijeme metodu per partes:

$$\int x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x \end{array} \right|$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x = -x \cdot \cos x + \sin x + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Příklad 44 Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$, kde $x > 0$.
Řešení: Přestože integrovaná funkce není na první pohled ve tvaru součinu, je vhodné použít pro výpočet integrálu metodu per partes; druhou funkcí v součinu bude číslo 1:

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = \int 1 \,\mathrm{d}x = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x + c.$$

Kromě metody per partes se při výpočtu integrálů často používá také *substituční metoda*. Její princip spočívá v tom, že se integrovaná funkce převede pomocí substituce na funkci, která se snáze integruje.

Věta 35 (1. Substituční metoda) *Nechť f má primitivní funkci na intervalu I a nechť $\varphi : J \to I$ má derivaci v každém bodě intervalu J. Pak na intervalu J platí:*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int f(t) \,\mathrm{d}t,$$

kde $t = \varphi(x)$.

Věta 36 (2. Substituční metoda) *Nechť f je definovaná na intervalu I, nechť $\varphi : J \to I$ má nenulovou derivaci v každém bodě intervalu J a nechť $\varphi(J) = I$. Navíc nechť má funkce $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ primitivní funkci na J. Pak na intervalu I platí:*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $x = \varphi(t)$.

Použití obou substitučních metod si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 45 Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x$, kde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.
Řešení:

$$\int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = 2x+3 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + c.$$

Příklad 46 Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, kde $x \in \langle -1, 1\rangle$.
Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \\ t = \arcsin x,\ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int |\cos t| \cdot \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Protože $\cos t \geq 0$ pro každé $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ a $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, můžeme ve výpočtu (s využitím posledního vzorce pro integrování elementárních funkcí) pokračovat následovně:

$$\int |\cos t| \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Nakonec je potřeba se vrátit (s využitím vzorce $\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t$) k proměnné x:

$$\frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\sin(2t) + c = \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\cdot 2\sin t \cdot \cos t + c = \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\,x\sqrt{1 - x^2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 34 Substituční metodou lze odvodit poslední dva vzorce v „tabulkových integrálech“, které si tak není nutno pamatovat.

Pojmy k zapamatování:

- primitivní funkce
- neurčitý integrál
- metoda per partes
- substituční metody

Příklady k procvičení: Vypočítejte neurčité integrály.

a) $\int \frac{9x^2+1}{3x^3+x+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\int e^{2x-1}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \cos(5x+\pi)\,\mathrm{d}x$ d) $\int \sqrt{3x}+\sqrt{\frac{3}{x}}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{1}{x\cdot\ln^3 x}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ g) $\int \ln(x+2)\,\mathrm{d}x$ h) $\int x\cdot \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

ch) $\int (3x^2+\pi)\cos x\,\mathrm{d}x$ i) $\int x\cdot\cos(5x-1)\,\mathrm{d}x$ j) $\int x\cdot\ln(x-1)\,\mathrm{d}x$

k) $\int \frac{(3+\ln x)^4}{x}\,\mathrm{d}x$ l) $\int \sin x\cdot\cos^3 x\,\mathrm{d}x$ m) $\int x\cdot e^{-3x^2+1}\,\mathrm{d}x$

n) $\int x^3\cdot e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ o) $\int \sin x\cdot\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x$

Výsledky příkladů k procvičení:

a) $\ln|3x^3+x+1|$ b) $\frac{1}{2}e^{2x-1}$ c) $\frac{1}{5}\sin(5x+\pi)$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{3}\sqrt{x}$

e) $-\frac{1}{2\ln^2 x}$ f) $x+2\operatorname{arctg} x$ g) $x\cdot\ln(x+2)-x+2\ln|x+2|$ h) $\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x-x}{2}$

ch) $(3x^2+\pi)\cdot\sin x+6x\cdot\cos x-6\sin x$ i) $\frac{1}{5}x\cdot\sin(5x-1)+\frac{1}{25}\cos(5x-1)$

j) $\frac{x^2\cdot\ln(x-1)}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{\ln|x-1|}{2}$ k) $\frac{(3+\ln x)^5}{5}$ l) $-\frac{\cos^4 x}{4}$ m) $-\frac{1}{6}e^{-3x^2+1}$

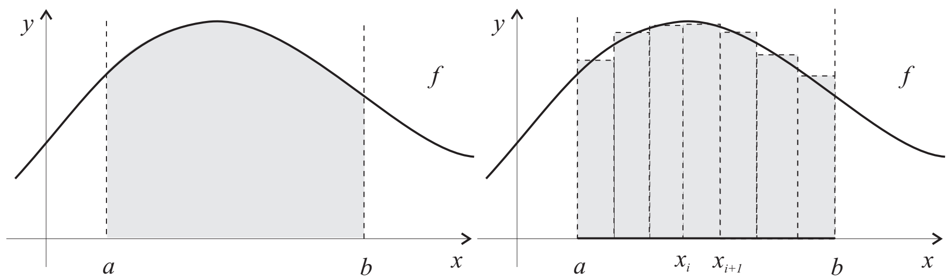
n) $-\frac{\left(x^2+1\right)e^{-x^2}}{2}$ o) $-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}$

7 Určitý integrál

V předchozí kapitole jsme se seznámili s neurčitým integrálem, který dané funkci přiřazoval množinu (primitivních) funkcí. V této kapitole se budeme věnovat integrálu určitému, který dané funkci přiřazuje číslo. Toto číslo v praktických aplikacích vyjadřuje např. velikost obsahu rovinného obrazce, délku křivky nebo objem rotačního tělesa.

Uvažujme funkci f, která je **omezená** na **uzavřeném** a **omezeném** intervalu $\langle a, b\rangle$, a pokusme se určit **obsah** P plochy vymezené grafem funkce f, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x. Pro jednoduchost předpokládejme, že je funkce f na $\langle a, b\rangle$ nezáporná.

Obsah můžeme vypočítat mnoha způsoby, záleží na vlastnostech konkrétní funkce. V mnoha případech je to však velmi těžké či dokonce nemožné. My zde použijeme Riemannův přístup, který je založen na tom, že lze snadno spočítat obsah obdélníka. Při výpočtu obsahu budeme tedy aproximovat uvažovanou plochu pomocí obdélníků (viz obrázek).



Z obrázku je patrné, že pokud bychom obdélníky zužovali (a zvětšovali tak jejich počet), byla by chyba aproximace stále menší. Pokud tedy budeme uvažovat stále užší a užší obdélníky, budou se při „hezké“ funkci součty obsahů obdélníků blížit ke skutečnému obsahu dané plochy. Tento postup selže, pokud se při zužování obdélníků nebudou zmenšovat chyby aproximace, což ale nastává jen u velmi „nerozumně se chovajících“ funkcí. S takovými se však v praxi téměř nesetkáváme. Například pro spojité funkce tento postup proběhne vždy bez problémů.

Pokud se nám podaří výše popsaným způsobem obsah P vypočítat, budeme vypočtenému číslu (obsahu) říkat *určitý integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$*.

Předtím, než budeme samotný pojem určitý integrál definovat přesněji, je nutné zavést několik pojmů a značení. Prvním z nich je *dělení intervalu $\langle a, b\rangle$*.

Definice 50 *Dělením* uzavřeného intervalu $\langle a, b\rangle$ nazýváme jakoukoli konečnou množinu bodů $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ležících v intervalu $\langle a, b\rangle$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se nazývají *dělicí body* intervalu $\langle a, b\rangle$; interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ se nazývá *i-tý dělicí interval* a

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1} \; i = 1, \ldots, n\}$$

nazýváme *normou dělení D*.

Na každém intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje nekonečně mnoho různých dělení; množinu všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ označíme jako $\mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$.

Při výpočtu obsahu dané plochy (tj. při konstrukci určitého integrálu) můžeme postupovat tak, že hledaný obsah aproximujeme pomocí obsahů obdélníků, jejich základny jsou dány dělením intervalu.

Definice 51 Nechť $D = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$. Pak každou konečnou množinu $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$, kde

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i \quad \text{pro všechna } i = 1, \ldots, n$$

nazýváme *výběrem reprezentantů z dělicích intervalů při dělení* D; stručně: výběr při D.

Definice 52 Buď f omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$, $D = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$, $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$ je výběr při D. Číslo

$$i(f, D, V) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

nazýváme *Riemannovým integrálním součtem funkce* f *při dělení* D *a výběru* V.

Pomocí Riemannova integrálního součtu tedy vypočítáme součet obsahů obdélníků, jejichž základny jsou intervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ a jejichž výšky jsou $f(c_1)$, $f(c_2), \ldots f(c_n)$.

Definice 53 Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Tuto posloupnost nazýváme nulovou, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0.$$

U většiny funkcí platí, že při přidávání dělících bodů se integrální součty "zpřesňují"a přibližují se hledanému obsahu plochy. V případě, že tomu tak je, říkáme, že je funkce Riemannovsky integrovatelná na daném intervalu. Limita integrálních součtů je v tomto případě rovna obsahu plochy a její hodnotu nazveme Riemannovým určitým integrálem.

Definice 54 Nechť f je omezená funkce na $\langle a, b\rangle$. Jestliže pro libovonou nulovou posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a libovolnou posloupnost výběrů $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že

$$\lim_{n\to\infty} i(f, D_n, V_n) = I,$$

kde $I \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že funkce f je *Riemannovsky integrovatelná* na $\langle a, b\rangle$ a klademe

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I.$$

Číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazýváme *Riemannovým určitým integrálem.*

Fakt, že je funkce f Riemannovsky integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, značíme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

Definice 55 Číslo a v určitém integrálu nazýváme *dolní mez*, číslo b *horní mez* a interval $\langle a, b\rangle$ *integrační obor.*

Přestože je zápis neurčitého a určitého integrálu dost podobný (u určitého integrálu jsou pouze přidány integrační meze), tyto dva pojmy se zásadně liší. Neurčitý integrál je množina primitivních funkcí, zatímco určitý integrál je číslo. Jaký je mezi neurčitým a určitým integrálem vztah si ukážeme dále ve větě 44.

Poznámka 35 Ne všechny funkce jsou Riemannovsky integrovatelná. Např. Dirichletova funkce definovaná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ předpisem

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro racionální } x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 0, & \text{pro iracionální } x \in \langle 0, 1\rangle. \end{cases}$$

Riemannovsky integrovatelná není.

7.1 Podmínky integrovatelnosti

V této kapitole se budeme zabývat podmínkami, za kterých je funkce Riemannovsky integrovatelná na $\langle a, b\rangle$.

Věta 37 *Nechť f je monotonní na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.*

Věta 38 *Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.*

Ve větách 37 a 38 nemusíme předpokládat, že je f omezená, protože každá funkce, která je monotonní na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je na tomto intervalu omezená (čísly $f(a)$ a $f(b)$). Rovněž každá funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ je na tomto intervalu omezená.

7.2 Vlastnosti určitého integrálu

Nyní si uvedeme základní vlastnosti určitého integrálu. Nejprve se budeme zabývat tím, jak je hodnota určitého integrálu ovlivněna integrovanou funkcí, a poté tím, jak ji ovlivňuje integrační obor.

7.2.1 Vlastnosti určitého integrálu v závislosti na integrované funkci

V této části se budeme zabývat tím, jaké vlastnosti platí pro součet, součin a podíl Riemannovsky integrovatelných funkcí.

Pro součet funkcí a pro násobení konstantou platí u určitého integrálu obdobné vlastnosti jako u integrálu neurčitého. Tyto vlastnosti jsou uvedeny v následujících dvou větách, jejichž tvrzení lze zkombinovat a rozšířit na konečný počet sčítanců.

Věta 39 *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$. Potom také $f + g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a platí*

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 40 *Nechť* $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, $c \in \mathbb{R}$. *Potom* $cf \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bohužel, stejně jako u neurčitého integrálu, neexistuje pro součin žádný jednoduchý vztah, kterým bychom mohli vypočítat integrál $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ pomocí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 41 *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$. *Potom* $f \cdot g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

7.2.2 Vlastnosti určitého integrálu v závislosti na integračním oboru

Poté, co jsme si ukázali základní vlastnosti určitého integrálu závisející na integrované funkci, se budeme zabývat tím, jak závisí určitý integrál na integračním oboru. Zejména v případech, kdy je funkce f definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ po částech pomocí různých funkčních předpisů, je užitečná následující věta.

Věta 42 *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, *nechť* $f \in \mathcal{R}(\langle a, c\rangle)$ *a* $f \in \mathcal{R}(\langle c, b\rangle)$. *Potom* $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Výše popsaná vlastnost se obvykle nazývá jako *aditivita vzhledem k integračnímu oboru* a my ji dále s výhodou využijeme při výpočtech obsahů komplikovanějších ploch. Tvrzení věty 42 lze navíc rozšířit na libovolný konečný počet bodů c_i, tj. platí, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{c_n}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $a < c_1 \ldots < c_n < b$.

V následující větě je ukázáno, že zmenšením integračního oboru se vlastnost „být Riemannovsky integrovatelná“ zachovává.

Věta 43 *Nechť* $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ *a* $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$*. Potom* $f \in \mathcal{R}(\langle c, d\rangle)$*.*

Dosud jsme vždy předpokládali, že dolní mez a je menší než horní mez b. Jak je určitý integrál definován v ostatních případech si uvedeme v následující definici.

Definice 56 (Doplnění definice určitého integrálu) Nechť f je omezená na uzavřeném, omezeném intervalu s krajními body a a b.

- Je-li $a < b$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován ve smyslu definice 54.
- Je-li $a = b$, pak definujeme
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
- Je-li $b < a$ a $f \in \mathcal{R}(\langle b, a\rangle)$, pak definujeme
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7.3 Výpočet určitého integrálu

V předchozích kapitolách jsme se zabývali definicí určitého integrálu a jeho vlastnostmi. Nyní si ukážeme, jak lze určitý integrál vypočítat podstatně snadněji než pomocí definice.

Klíčovou roli při výpočtu určitého integrálu hraje následující věta, která nám udává vztah mezi neurčitým a určitým integrálem.

Věta 44 (Newton–Leibnizův vzorec) *Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a nechť existuje primitivní funkce F k funkci f na $\langle a, b\rangle$. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Poznámka 36 Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ v Newton–Leibnizově vzorci se používá označení $\big[\,F(x)\,\big]_a^b$, takže vzorec (4) obvykle zapisujeme jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\,F(x)\,\big]_a^b.$$

Poznámka 37 *Funkce F v Newton–Leibnizově vzorci je libovolná primitivní funkce k funkci f na $\langle a, b\rangle$, protože pokud bychom místo ní uvažovali primitivní funkci $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, dostali bychom stejný výsledek:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\,F(x) + c\,\big]_a^b = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Příklad 47 Vypočítejte určitý integrál $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Kromě Newton–Leibnizova vzorce se při výpočtech určitých integrálů využívá *metoda per partes* a *substituční metoda.*

Věta 45 (Metoda per partes) *Nechť funkce u a v mají derivace na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $u', v' \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$. Potom*

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\big[\,u(x)\cdot v(x)\,\big]_a^b}_{u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a)} - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 48 Vypočítejte určitý integrál $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \end{array}\right| =$$

$$= \big[-x \cdot \cos x \big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = \big[-x \cdot \cos x \big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \big[\sin x \big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= -\pi \cdot \cos \pi + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = \pi - 1.$$

Věta 46 (Substituční metoda) *Nechť má funkce $t = \varphi(x)$ spojitou derivaci na $\langle a, b \rangle$ a nechť f je spojitá na oboru hodnot H_φ funkce φ. Potom*

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \,\mathrm{d}t.$$

Při použití substituční metody u určitého integrálu máme dvě možnosti výpočtu:

a) Rovnou vypočítáme určitý integrál, přičemž při změně proměnné (tj. při substituci) musíme upravit i integrační meze. V tomto případě se nemusíme vracet k původní proměnné x.

b) Napřed určíme primitivní funkci, vrátíme se k původní proměnné x a pak dosadíme do Newton–Leibnizova vzorce.

Příklad 49 Vypočítejte určitý integrál $\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 \mathrm{d}x$.
Řešení: Vypočítáme určitý integrál oběma výše popsanými postupy:

a) Rovnou vypočítáme určitý integrál:

$$\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ \mathrm{d}t = 2x \,\mathrm{d}x \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t = x \,\mathrm{d}x \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, \quad x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^2 t^3 \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{8}.$$

b) Nejprve najdeme primitivní funkci:

$$\int x\left(x^2+1\right)^3 \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} = \frac{1}{8}\left(x^2+1\right)^4.$$

Nalezenou primitivní funkci dosadíme do Newton-Leibnizova vzorce:

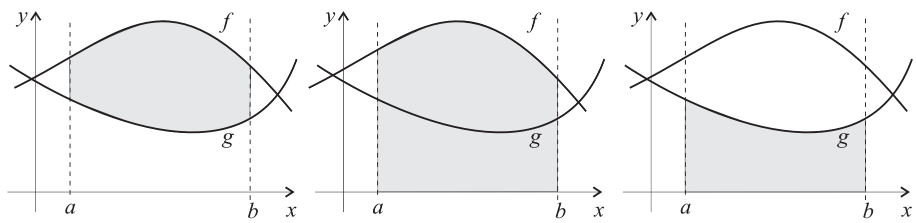
$$\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}\left(x^2+1\right)^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}(16-1) = \frac{15}{8}.$$

7.4 Geometrické aplikace určitého integrálu

Poté, co jsme si ukázali, jak lze určitý integrál vypočítat, se budeme zabývat jeho geometrickými aplikacemi. První z nich se bude týkat (již zmíněného) výpočtu *obsahu rovinného útvaru.* Kromě něj si ukážeme, že lze pomocí určitého integrálu vypočítat také *délku křivky, objem rotačního tělesa* nebo *obsah pláště rotační plochy.*

7.4.1 Obsah útvaru v rovině

Mějme dvě funkce f a g integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Obsah plochy vymezené grafy funkcí f, g a přímkami $x = a$ a $x = b$ lze poté spočítat následujícím způsobem:



$$\text{Plocha mezi } f \text{ a } g \quad = \quad \text{Plocha pod } f \quad - \quad \text{Plocha pod } g$$

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad - \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklad 50 Vypočítejte obsah plochy vymezené grafy funkcí $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x$.

Řešení: Nejprve najdeme průsečíky funkcí f a g:

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; 2 - x^2 = x \;\Rightarrow\; x^2 + x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -2,\; x_2 = 1.$$

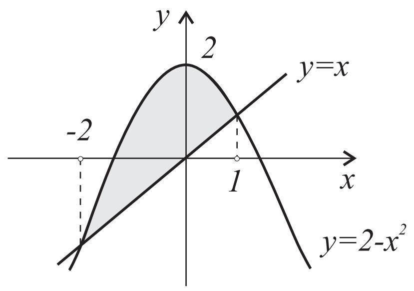
Protože $f(-2) = g(-2) = -2$ a $f(1) = g(1) = 1$, protínají se grafy funkcí f a g v bodech $[-2, -2]$ a $[1, 1]$.

Na intervalu $\langle -2, 1\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$, a proto můžeme daný obsah vypočítat pomocí určitého integrálu $\int_{-2}^{1}(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{1}(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} =$$

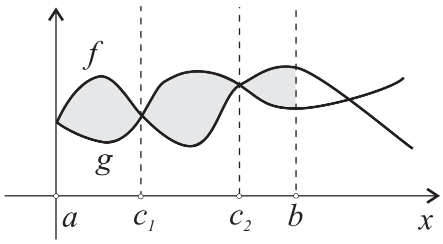
$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) = \frac{9}{2}.$$

Obsah plochy vymezené grafy funkcí $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x$ je tedy roven $\frac{9}{2}$.



Obrázek 48: Obsah plochy vymezené grafy funkcí $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x$.

Poznámka 38 Pokud je obrazec složitější, rozdělíme ho na vhodné části, jejichž plochu umíme určit pomocí výše uvedeného principu (viz např. obr. 49).



Obrázek 49: $P = \int_a^{c_1}(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2}(g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{b}(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

Příklad 51 Vypočítejte obsah plochy vymezené grafem funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ a osou x.

Řešení:

Abychom hledaný obsah vypočítali, musíme nejprve najít průsečíky funkce f s osou x. Protože

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x = x(x+3)(x-1),$$

protíná graf funkce f osu x ve třech bodech $[-3, 0]$, $[0, 0]$ a $[1, 0]$.

Na intervalu $\langle -3, 0\rangle$ je $f(x) \geq 0$, zatímco na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je $f(x) \leq 0$. Proto můžeme daný obsah vypočítat jako součet dvou určitých integrálů

$$\int_{-3}^{0}(f(x) - 0)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(0 - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

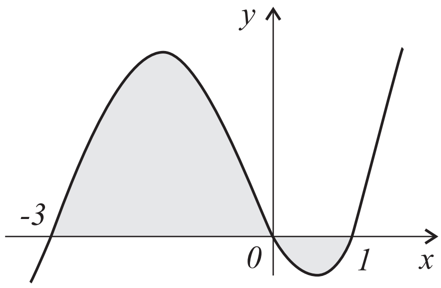
$$\int_{-3}^{0}(f(x) - 0)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(0 - f(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-3}^{0}\left(x^3 + 2x^2 - 3x\right)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\left(-x^3 - 2x^2 + 3x\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\frac{81}{4} + \frac{54}{3} + \frac{27}{2} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{71}{6}.$$

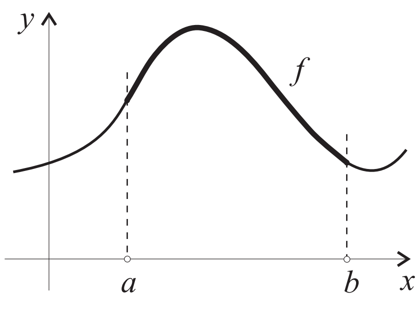
Obsah plochy vymezené grafem funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ a osou x je tedy roven $\frac{71}{6}$.



Obrázek 50: Obsah plochy vymezené grafem funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ a osou x.

7.4.2 Délka křivky

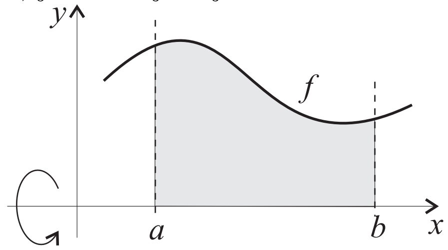
Uvažujme funkci f, která má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci. Délku křivky, která je částí grafu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, vypočítáme podle následujícího vzorce:



$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

7.4.3 Objem rotačního tělesa

Uvažujme rovinný útvar omezený grafem nezáporné, spojité funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a osou x. Rotací tohoto útvaru kolem osy x vznikne rotační těleso, jehož objem je dán vztahem



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Při rotaci kolem osy y je objem vzniklého rotačního tělesa dán vztahem

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Příklad 52 Vypočtěte objem koule o poloměru 2 cm.

Řešení: Kouli o poloměru 2 cm získáme rotací horního půlkruhu se středem v počátku a poloměrem 2 cm kolem osy x. Tento horní půlkruh je rovinný útvar vymezený shora grafem horní půlkružnice, tj. grafem funkce $x^2 + y^2 = 4$, kde $y \geq 0$ a zdola osou x.

Ze vztahů $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ plyne, že $y = \sqrt{4 - x^2}$, kde $x \in \langle -2, 2\rangle$, a proto hledaný objem vypočítáme následovně:

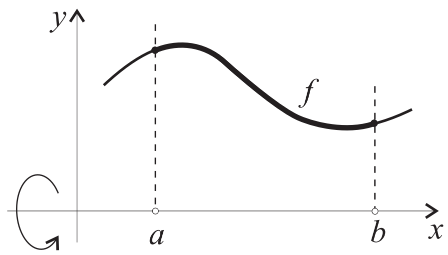
$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \pi \left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^2.$$

Získaný výsledek koresponduje se vzorcem $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ pro výpočet objemu koule o poloměru r.

7.4.4 Obsah rotační plochy

Uvažujme funkci f, která má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci. Rotací grafu funkce f na $\langle a, b\rangle$ kolem osy x vznikne rotační plocha, jejíž povrch je dán vztahem



$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Při rotaci kolem osy y je povrch vzniklé rotační plochy dán vztahem

$$S = 2\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Příklad 53 Vypočtěte obsah rotační plochy vzniklé rotací přímky $f(x) = 2x$ na intervalu $\langle 2, 5 \rangle$ kolem osy x.

Řešení: Protože $f'(x) = 2$, vypočítáme daný obsah takto:

$$S = 2\pi \int_2^5 2x \cdot \sqrt{1 + 2^2} \, \mathrm{d}x = 4\sqrt{5}\pi \int_2^5 x \, \mathrm{d}x = 4\sqrt{5}\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^5 =$$

$$= 4\sqrt{5}\pi \left(\frac{25}{2} - 2 \right) = 42\sqrt{5}\pi.$$

Obsah dané rotační plochy je tedy roven $42\sqrt{5}\pi$.

Pojmy k zapamatování:

- dělení intervalu
- výběr reprezentantů
- Riemannův integrální součet
- Riemannův určitý integrál
- dolní a horní mez, integrační obor

Příklady k procvičení:

1. Vypočítejte následující určité integrály.

   a) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x-1)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_{0}^{1} x\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\int\limits_{0}^{\pi} x^2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$

   d) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{\sin x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$ e) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ f) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ g) $\int\limits_{0}^{1} x^2\cdot e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$

   h) $\int\limits_{1}^{5} \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ ch) $\int\limits_{0}^{2} \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ i) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x$

   j) $\int\limits_{1}^{2} (3x+2)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$ k) $\int\limits_{e}^{3} \frac{1}{x\cdot\ln x}\,\mathrm{d}x$ l) $\int\limits_{1}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x$

   m) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$

2. Vypočítejte obsah plochy ohraničené křivkami.

   a) $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$ b) $y=\ln x$, $x=\frac{1}{2}$, $x=e$ a osou x

   c) $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{x}{2}$ d) $y=\operatorname{tg} x$, $x=\frac{\pi}{4}$ a osou x e) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x$

   f) $y=e^x$, $x=0$, $x=\ln 2$ a osou x g) $y=\cos^2 x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ h) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$ ch) $y=-x^2+6x$ a osou x

Výsledky příkladů k procvičení:

1. a) π b) $\frac{1}{3}$ c) -2π d) 0 e) $-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ f) $2-2\cdot\ln 3$
g) $-\frac{26}{\sqrt{e}}+16$ h) $\ln^2 5$ ch) $\operatorname{arctg} 4$
i) $\frac{1}{4}\cdot\ln 9$ j) $10\cdot\ln 2-\frac{17}{4}$ k) $\ln(\ln 3)$ l) 1 m) $\frac{1}{3}$

2. a) $\pi-\frac{2}{3}$ b) $\frac{3-\ln 2}{2}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e) $\frac{1}{2}$ f) 1 g) $1-\frac{\pi}{4}$
h) $e+\frac{1}{e}-2$ ch) 36

8 Nevlastní integrály

Nevlastní integrály funkce jedné proměnné jsou zobecněním Riemannova určitého integrálu. V případě Riemannova integrálu požadujeme, aby **funkce** i **interval**, na kterém integrujeme, byly **omezené**. V praxi však potřebujeme počítat i takové integrály, kde buď funkce nebo interval omezené nejsou, což vede na tzv. nevlastní integrál.

Integrál $\int_a^b f(x)dx$ se nazývá nevlastní v následujících případech:

- Je-li (a,b) neomezený, tj. alespoň jeden krajní bod tohoto intervalu je nevlastní číslo
  .....nevlastní integrál **vlivem meze**

- Je-li funkce f na (a,b) neomezená
  .....nevlastní integrál **vlivem funkce**

Body, které způsobují "nevlastnost"určitých integrálů se nazývají singulární body integrace.

Definice 57 Řekneme, že bod $c \in \mathbb{R}^*$, kde $a \leq c \leq b$, je ***singulárním bodem integrace funkce*** f ***na intervalu*** (a,b), je-li buď $c = \infty$ nebo $c = -\infty$ nebo je-li funkce f na každém okolí bodu c neomezená.

Příklad 54 Najděte singulární body integrace funkce $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.
Řešení: Singuárními body jsou $-\infty, \infty$ a také body -2 a 2, v nichž není funkce f definovaná a na jejichž okolí není omezená.

Nevlastní integrály definujeme jako limity určitých integrálů s proměnnou mezí (horní nebo dolní). Existuje-li příslušná vlastní limita, říkáme, že *nevlastní integrál konverguje* (*existuje*), v opačném případě říkáme, že *diverguje.*

8.1 Nevlastní integrály vlivem meze

Nejprve se budeme zabývat nevlastními integrály, u nichž je funkce omezená, ale neomezený je integrační obor.

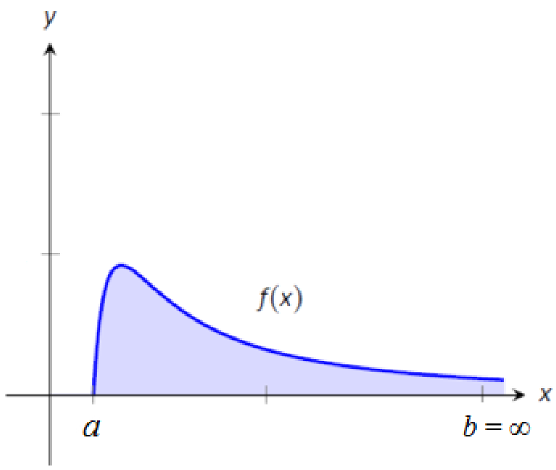
Definice 58 Nechť je funkce f definovaná na $\langle a, \infty)$ a nechť pro každé $t \in (a, \infty)$ existuje integrál $\int_a^t f(x)dx$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx, \tag{5}$$

pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)dx$ ***konverguje (existuje)***. Existuje-li tento nevlastní integrál, pak ho definujeme vztahem

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Je-li limita (5) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál* ***diverguje***.



Obrázek 51: $\int_a^\infty f(x)\,dx$

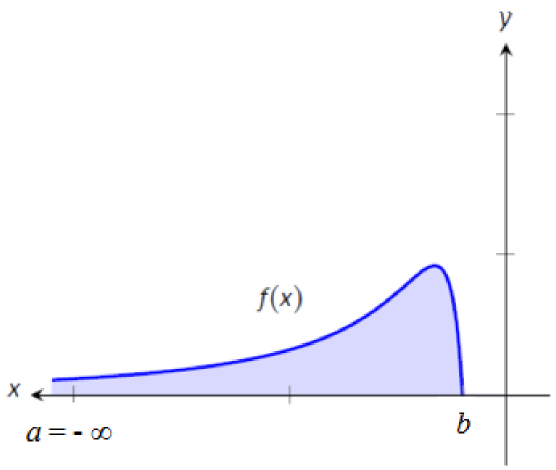
Definice 59 Nechť je funkce f definovaná na $(-\infty, b\rangle$ a nechť pro každé $t \in (-\infty, b)$ existuje integrál $\int_t^b f(x)dx$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx, \tag{6}$$

pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ***konverguje (existuje)***. Existuje-li tento nevlastní integrál, pak ho definujeme vztahem

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx.$$

Je-li limita (6) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál* ***diverguje***.



Obrázek 52: $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$

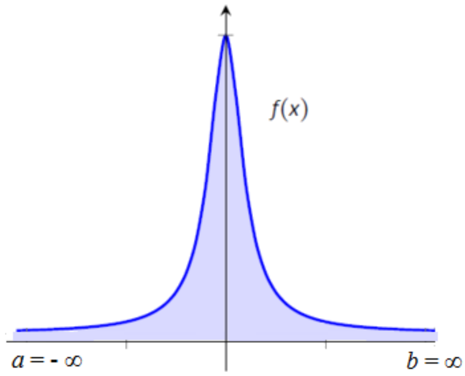
Definice 60 Nechť je funkce f definovaná na $(-\infty, \infty)$ a nechť konvergují oba nevlastní integrály

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \qquad \text{a} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \tag{7}$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ***konverguje (existuje)*** a definujeme ho vztahem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Diverguje-li aspoň jeden z integrálů v (7), pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ***diverguje***.



Obrázek 53: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

8.2 Nevlastní integrály vlivem funkce

V této podkapitole se zaměříme na situaci, kdy je integrační obor omezený interval, ale neomezená je integrovaná funkce.

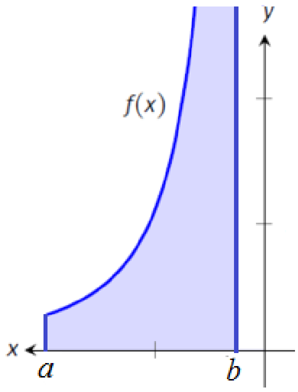
Definice 61 Nechť je funkce f definovaná na omezeném intervalu $\langle a, b)$ a není omezená na žádném levém okolí bodu b, přičemž pro každé $t \in \langle a, b)$ existuje integrál $\int_a^t f(x)dx$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx, \tag{8}$$

pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)dx$ ***konverguje (existuje)***. Existuje-li nevlastní integrál, pak ho definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Je-li limita (8) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál* ***diverguje***.



Obrázek 54: $\int_a^b f(x)dx$ pro funkci f, která není omezená na žádném levém okolí bodu b

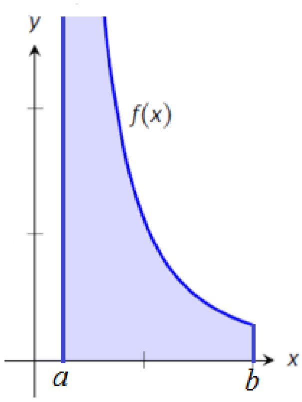
Definice 62 Nechť je funkce f definovaná na omezeném intervalu $(a, b\rangle$, není omezená na žádném pravém okolí bodu a a nechť pro každé $t \in (a, b\rangle$ existuje integrál $\int_t^b f(x)dx$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx, \tag{9}$$

pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)dx$ ***konverguje (existuje)***. Existuje-li nevlastní integrál, pak ho definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Je-li limita (9) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál* ***diverguje***.



Obrázek 55: $\int_a^b f(x)dx$ pro funkci f, která není omezená na žádném pravém okolí bodu a

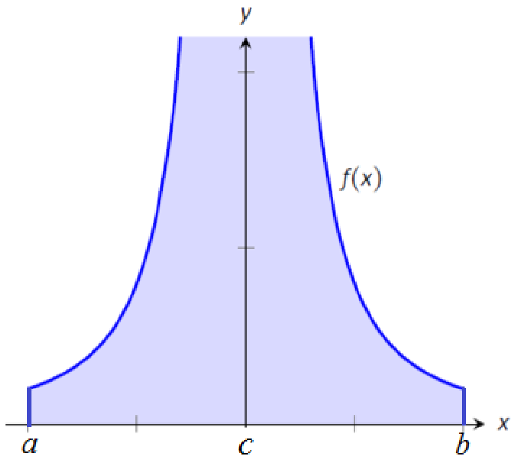
Definice 63 Nechť je funkce f definovaná na $\langle a, c) \cup (c, b\rangle$, není omezená na žádném okolí bodu c a nechť konvergují oba nevlastní integrály

$$\int_a^c f(x)dx \qquad \text{a} \qquad \int_c^b f(x)dx. \tag{10}$$

Pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)dx$ ***konverguje (existuje)*** a definujeme ho vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Diverguje-li alespoň jeden z integrálů v (10), pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)dx$ ***diverguje***.



Obrázek 56: $\int_a^b f(x)\,dx$ pro funkci f, která není omezená na žádném okolí bodu $c \in (a,b)$

8.3 Výpočet nevlastních integrálů

Jestliže známe primitivní funkci F k funkci f na uzavřeném intervalu neobsahujícím singulární body integrace, můžeme nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ počítat pomocí modifikovaného Newton-Leibnizova vzorce.

8.3.1 Nevlastní integrály vlivem meze

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\int_a^t f(x)\,dx\right) = \lim_{t\to\infty}\left([F(x)]_a^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(F(t)-F(a)\right)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\int_t^b f(x)\,dx\right) = \lim_{t\to-\infty}\left([F(x)]_t^b\right) = \lim_{t\to-\infty}\left(F(b)-F(t)\right)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{u\to\infty}\int_c^u f(x)\,dx =$$

$$= \left(F(c) - \lim_{t\to-\infty} F(t)\right) + \left(\lim_{u\to\infty} F(u) - F(c)\right) = \lim_{u\to\infty} F(u) - \lim_{t\to-\infty} F(t)$$

Příklad 55 Vypočítejte $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

Řešení:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t} - (-1)\right) = 0 + 1 = 1.$$

Příklad 56 Vypočítejte $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Řešení:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}[\operatorname{arctg} x]_t^0 =$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} t) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 57 Vypočítejte $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Řešení:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}[\operatorname{arctg} x]_t^0 + \lim_{u\to\infty}[\operatorname{arctg} x]_0^u =$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} t) + \lim_{u\to\infty}(\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} 0) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

8.3.2 Nevlastní integrály vlivem funkce

Nechť f není omezená na žádném levém okolí bodu b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\left([F(x)]_a^t\right) = \lim_{t\to b^-}\big(F(t) - F(a)\big)$$

Nechť f není omezená na žádném pravém okolí bodu a:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\left([F(x)]_t^b\right) = \lim_{t\to a^+}\big(F(b) - F(t)\big)$$

Nechť f není omezená na žádném okolí bodu $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{u\to c^+}\int_u^b f(x)\,dx =$$
$$= \Big(\lim_{t\to c^-} F(t) - F(a)\Big) + \Big(F(b) - \lim_{u\to c^+} F(u)\Big)$$

Příklad 58 Vypočítejte $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$.

Řešení: Singulárním bodem integrace je bod 0.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} [\ln x]_t^1 =$$
$$= \lim_{t\to 0^+} (\ln 1 - \ln t) = 0 - (-\infty) = \infty.$$

Nevlastní integrál $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ tedy diverguje.

Příklad 59 Vypočítejte $\int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx$.

Řešení: Singulárním bodem integrace je bod 2

$$\int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t\to 2^-} \int_1^t \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t\to 2^-} [\ln|x-2|]_1^t =$$
$$= \lim_{t\to 2^-} (\ln|t-2| - \ln 1) = -\infty - 0 = -\infty.$$

Nevlastní integrál $\int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx$ tedy také diverguje.

Příklad 60 Vypočítejte $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

Řešení: Singulárním bodem integrace je bod 0, proto je nutné rozdělit integrál na součet dvou:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \frac{1}{x^2}\,dx =$$
$$= \lim_{t\to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^t + \lim_{u\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_u^1 =$$
$$= \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{1}{t} - 1\right) + \lim_{u\to 0^+} \left(-1 - \left(-\frac{1}{u}\right)\right) = -2 - \infty + \infty$$

Nevlastní integrál $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ tedy také diverguje. Pokud bychom si správně neuvědomili, že se jedná o nevlastní integrál a počítali pomocí vzorců pro určitý integrál pouze dosazením mezí, dostali bychom se k následujícímu **špatnému** výsledku:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$

8.4 Zobecnění

Uvažujme funkci f a interval (a,b) s více singulárními body integrace. Rozdělme interval (a,b) pomocí bodů $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b$ tak, aby každý z intervalů (c_{i-1}, c_i) obsahoval jen jeden singulární bod integrace. Říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ **konverguje**, jestliže konvergují všechny integrály

$$(I_i) \qquad \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx \qquad i = 1, \ldots n.$$

V tomto případě definujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx$$

Jestliže alespoň jeden z integrálů (I_i) diverguje, pak říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ **diverguje**.

8.5 Geometrická interpretace nevlastních integrálů

Je-li funkce f nezáporná na intervalu (a,b), můžeme nevlastní integrál (pokud konverguje) chápat jako obsah příslušného neomezeného rovinného obrazce M, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in (a,b), 0 \le y \le f(x)\right\}.$$

Příklad 61 Vypočítejte obsah plochy

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in (2,\infty), 0 \le y \le \frac{1}{x^4}\}.$$

Řešení:

$$S = \int_2^\infty \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{3x^3}\right]_2^t =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-1}{3t^3} - \frac{-1}{3 \cdot 2^3}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{24}.$$

Plocha má tedy obsah $\frac{1}{24}\, j^2$.

Pojmy k zapamatování:

- singulární bod integrace
- nevlastní integrál vlivem meze
- nevlastní integrál vlivem funkce

Příklady k procvičení:

1. Vypočítejte následující nevlastní integrály, pokud konvergují.

   a) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int\limits_1^6 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int\limits_2^\infty \frac{1}{(x-1)^4}\,\mathrm{d}x$

2. Vypočítejte obsah plochy.

   a) $0 \leq y \leq \mathrm{e}^{-x}$, $x \geq 0$, b) $0 \leq y \leq \frac{1}{x^3}$, $x \geq 1$

Výsledky příkladů k procvičení:

1. a) 2 b) ∞ c) ∞ d) $\frac{1}{3}$

2. a) 1 b) $\frac{1}{2}$

Reference

[1] BRABEC, J., MARTAN, F., ROZENSKÝ, Z. *Matematická analýza I.* SNTL Praha, 1989. ISBN 04-013-89.

[2] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I.* SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87.

[3] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Fragment Praha, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

[4] JARNÍK, V., *Integrální počet I*, 5. vydání. Praha: Academia, 1974.

[5] JARNÍK, V., *Integrální počet II*, 2. vydání. Praha: Academia, 1976.

[6] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2).* Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-01-7.

[7] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1).* Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9.

[8] KOJECKÁ, J., KOJECKÝ, T., *Matematická analýza pro 1. semestr*, 1. vydání. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1997.

[9] KOUŘILOVÁ, P., PAVLAČKOVÁ, M. *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii.* UP Olomouc, 2013. ISBN 978-80-244-3317-2.

[10] KŘENEK, J., OSTRAVSKÝ, J., *Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné s aplikacemi v ekonomii*, 9. vydání. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008.

[11] KUBEN, J., ŠARMANOVÁ, P., *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, studijní opora. Součást projektu Operační program Rozvoje

lidských zdrojů CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016 Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia. Ostrava: VŠB, TU, 2006. ISBN 80-248-1192-8.

[12] MÁDROVÁ, V. *Matematická analýza I.* UP Olomouc, 2001. ISBN 80-244-0269-6.

[13] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v* $\mathbb{R}$. UP Olomouc, 2013. ISBN 978-80-244-3410-0.

[14] MÁDROVÁ, V., MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza.* Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., 2018.

[15] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza I.* UP Olomouc, 2002. ISBN 80-244-0464-8.

[16] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza II.* UP Olomouc, 2005. ISBN 80-244-1005-2.

[17] NOVÁK, V. *Integrální počet v R*, 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986.

[18] NOVOTNÝ, M. *Integrální počet*, 2. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969.

[19] VANŽURA, J. *Řešené příklady z matematické analýzy*, 3. vydání. Praha: Karolinum, nakladatelství Univerzity Karlovy, 2003.