5 Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce se snažíme z jejího funkčního předpisu zjistit základní vlastnosti zkoumané funkce, a poté načrtnout její graf. V prvé řadě hledáme definiční obor dané funkce a také zjišťujeme, není-li náhodou tato funkce lichá, sudá, popř. periodická. Důležitou součástí vyšetřování průběhu funkce je nalezení intervalů, na nichž je funkce rostoucí, klesající, konvexní a konkávní. Pro znázornění grafu funkce je rovněž užitečné vědět, má-li zkoumaná funkce lokální extrémy a asymptoty.

S některými z výše uvedených pojmů a vlastností jsme se již seznámili v předchozích kapitolách; ostatní budou zavedeny v této kapitole.

5.1 Monotonie

V kapitole zabývající se základními vlastnostmi funkcí jsme se seznámili s *monotónními* (tj. neklesajícími a nerostoucími) a *ryze monotónními* (tj. klesajícími a rostoucími) funkcemi. Nyní si ukážeme, jak lze s využitím derivací monotonii vyšetřovat snadněji než ověřováním platnosti podmínek z definice 8.

Věta 23 *Nechť má funkce f derivaci na otevřeném intervalu $I = (a, b)$. Potom platí*

a) je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na intervalu I,

b) je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na intervalu I.

Příklad 36 Najděte intervaly, na nichž je funkce $f(x) = x^4 \cdot e^x$ ryze monotónní.

Řešení: Definičním oborem funkce f je množina všech reálných čísel, tj. $D_f = \mathbb{R}$. Abychom nalezli intervaly, na nichž je daná funkce ryze monotónní, vypočítáme její první derivaci a určíme její definiční obor:

$$f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x = x^3 \cdot e^x \cdot (4 + x)\,, \ D_{f'} = \mathbb{R}.$$

Nyní najdeme body, v nichž je derivace rovna 0, tj. řešíme rovnici

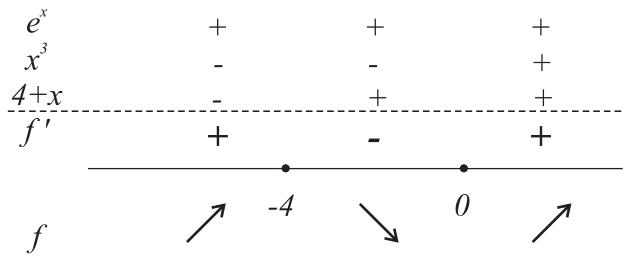
$$x^3 \cdot e^x \cdot (4 + x) = 0.$$

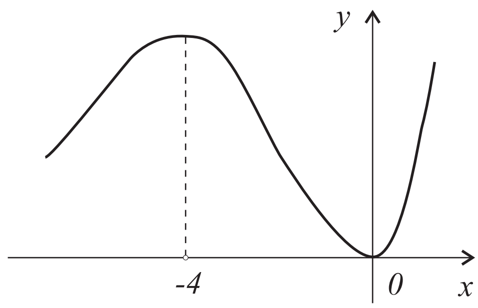
Tato rovnice má dvě řešení, $x = -4$ a $x = 0$, která rozdělí definiční obor derivace na tři intervaly $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$ a $(0, \infty)$. Protože je f' spojitá na $\mathbb{R}$, můžeme postupovat dále následovně. Z každého z intervalů vybereme jeden bod a pomocí něj určíme, jaké znaménko má derivace f' na tomto intervalu. Z prvního intervalu vybereme např. bod -5, ze druhého bod -1 a ze třetího bod 1. Protože

$$f'(-5) = \frac{125}{e^5} > 0, \quad f'(-1) = -\frac{3}{e} < 0, \quad f'(1) = 5e^5 > 0,$$

je f' kladná na intervalech $(-\infty, -4)$, $(0, \infty)$ a záporná na intervalu $(-4, 0)$. Podle věty 23 je tedy funkce f rostoucí na $(-\infty, -4)$, $(0, \infty)$ a klesající na $(-4, 0)$.

Pokud např. nemáme k dispozici kalkulačku nebo pokud by byl funkční předpis pro f' komplikovanější, není potřeba počítat funkční hodnoty ve vybraných bodech, ale stačí, když určíme znaménka f' na jednotlivých intervalech:





Obrázek 30: Graf funkce $f(x) = x^4 \cdot e^x$.

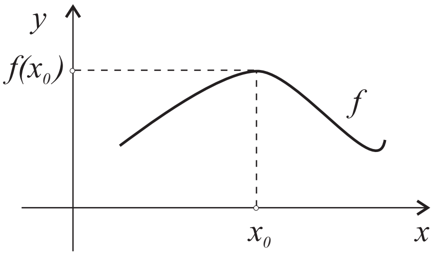
Poznámka 29 Tvrzení a), b) ve větě 23 jsou ve tvaru implikace a opačné implikace obecně neplatí. Tj. *neplatí*, že je-li funkce f na I rostoucí, pak musí být $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$. Např. funkce $f(x) = x^3$ je rostoucí na celé reálné ose, ale v bodě $x = 0$ nemá derivaci kladnou, ale nulovou.

5.2 Lokální extrémy funkce

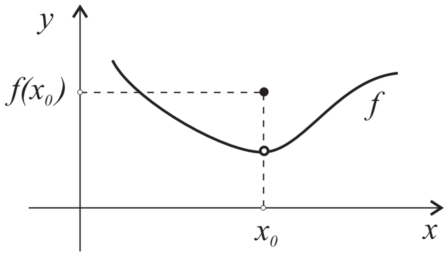
Intervaly monotonie úzce souvisí s hledáním lokálních extrémů funkce, jimž bude věnována tato kapitola.

Definice 43

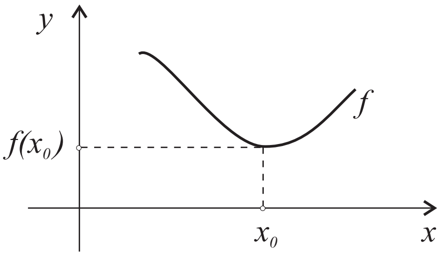
- Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ *lokální maximum*, jestliže existuje $\mathcal{U}^*(x_0)$ takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro každé $x \in \mathcal{U}^*(x_0)$.
- Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ *lokální minimum*, jestliže existuje $\mathcal{U}^*(x_0)$ takové, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro každé $x \in \mathcal{U}^*(x_0)$.
- Jestliže místo neostrých nerovností lze psát ostré, mluvíme o *ostrém lokálním maximu* a *ostrém lokálním minimu*.
- (Ostré) lokální maximum a (ostré) lokální minimum se souhrnně nazývají (*ostré*) *lokální extrémy*.



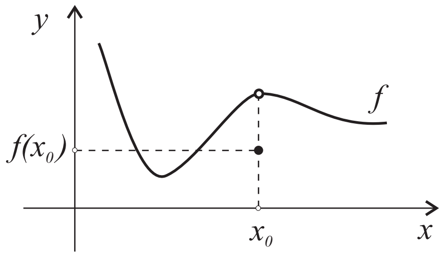
Obrázek 31: Graf spojité funkce, která má v bodě x_0 ostré lokální maximum.



Obrázek 32: Graf nespojité funkce, která má v bodě x_0 ostré lokální maximum.



Obrázek 33: Graf spojité funkce, která má v bodě x_0 ostré lokální minimum.



Obrázek 34: Graf nespojité funkce, která má v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Poznámka 30 Poznamenejme, že funkce nemusí mít žádný lokální extrém (např. funkce $f(x) = x$) a rovněž jich může mít nekonečně mnoho. Příkladem takovéto funkce je $f(x) = \sin x$, která má lokální minimum i maximum v nekonečně mnoha bodech.

Poté, co jsme si lokální extrémy definovali, se budeme zabývat tím, jak je můžeme nalézt. Postup hledání se obvykle skládá ze dvou kroků – nejprve nalezneme body, které jsou „podezřelé“ z toho, že by v nich extrém mohl být, a poté zkoumáme, je-li v nich skutečně extrém či nikoliv. Ukážeme si, že body, v nichž by extrém eventuálně mohl nastat, jsou buď body, v nichž je derivace rovna nule (a které nazýváme *stacionární*), nebo body, v nichž derivace neexistuje.

Definice 44 Bod $x_0 \in D_f$ se nazývá *stacionárním bodem funkce* f, jestliže

$$f'(x_0) = 0.$$

Je-li x_0 stacionárním bodem funkce f, pak lze sestrojit tečnu ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ a tato tečna je rovnoběžná s osou x.

Věta 24 (Nutná podmínka existence lok. extrému) *Nechť má funkce f derivaci v bodě $x_0 \in D_f$. Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, potom je bod x_0 bodem stacionárním, tj. $f'(x_0) = 0$.*

Ekvivalentně můžeme tuto větu zformulovat tak, že když $f'(x_0)$ existuje a $f'(x_0) \neq 0$, pak f nemá v x_0 lokální extrém.

Věta 24 obecně neplatí obráceně. Tj. pokud je $f'(x_0) = 0$, pak funkce f nemusí mít v bodě x_0 lokální extrém. Např. funkce $f(x) = x^3$ má derivaci v bodě $x_0 = 0$ rovnu nule, ale přitom nemá v tomto bodě lokální extrém.

Jak již bylo zmíněno, body „podezřelé z lokálního extrému“ jsou stacionární body a body, v nichž derivace neexistuje.

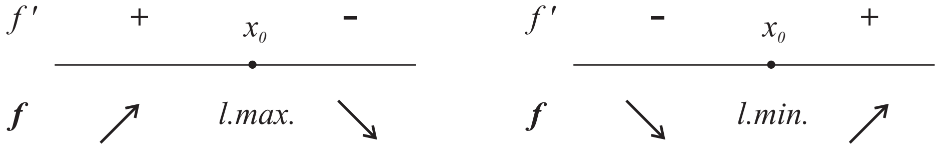
Rozhodnout o tom, existuje-li lokální extrém v bodě „podezřelém z lokálního extrému“, můžeme pomocí následujících postačujících podmínek.

Věta 25 (Postačující podmínka existence lok. extrému) *Nechť f je spojitá v bodě $x_0 \in D_f$ a nechť má f derivaci na nějakém $\mathcal{U}^*(x_0) \subset D_f$. Potom platí:*

- *Jestliže $f'(x) > 0$ na $\mathcal{U}^*_-(x_0)$ a $f'(x) < 0$ na $\mathcal{U}^*_+(x_0)$, potom má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

- *Jestliže* $f'(x) < 0$ *na* $\mathcal{U}^*_-(x_0)$ *a* $f'(x) > 0$ *na* $\mathcal{U}^*_+(x_0)$*, potom má* f *v bodě* x_0 *ostré lokální minimum.*

Zjednodušeně věta říká, že je-li f v bodě x_0 spojitá a mění-li f' při průchodu bodem x_0 znaménko, pak má v bodě x_0 lokální extrém. Mění-li se přitom znaménko derivace z kladného na záporné, jedná se o lokální maximum (funkce nejprve roste a pak klesá) a naopak, mění-li se znaménko derivace ze záporného na kladné, jedná se o lokální minimum (funkce nejprve klesá a pak roste). Nemění-li se znaménko f' při průchodu bodem x_0, pak zde extrém nenastává. Viz také obr. 35.



Obrázek 35: Určení lokálních extrémů u funkce f, která je spojitá v bodě x_0.

Následující postačující podmínka nám ukazuje, že o existenci a typu extrému můžeme rozhodnout také pomocí znaménka druhé derivace.

Věta 26 (Postačující podmínka existence lok. extrému) *Nechť* x_0 *je stacionárním bodem funkce* f *a nechť existuje* $f''(x_0)$ *a platí* $f''(x_0) \neq 0$*. Potom má funkce* f *v* x_0 *ostrý lokální extrém. Navíc platí:*

- *Je-li* $f''(x_0) > 0$*, má* f *v bodě* x_0 *ostré lokální minimum.*

- *Je-li* $f''(x_0) < 0$*, má* f *v bodě* x_0 *ostré lokální maximum.*

Příklad 37 Najděte intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Řešení: $D_f = \mathbb{R}$. Abychom našli intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce f, vypočítáme její první derivaci:

$$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-x} - x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} = x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (2-x),\ D_{f'} = \mathbb{R}.$$

Nyní nalezneme stacionární body funkce f, tj. řešíme rovnici:

$$x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (2-x) = 0.$$

Uvažovaná rovnice má dvě řešení, $x = 0$ a $x = 2$, která jsou tedy hledanými stacionárními body funkce f. Stacionární body rozdělují $D_{f'}$ na tři části $(-\infty, 0),\ (0, 2), (2, \infty)$, na nichž je f' kladná nebo záporná. Protože je f' spojitá na $\mathbb{R}$, můžeme postupovat následovně. Z každého intervalu zvolíme libovolný bod a pomocí něj určíme, jaké znaménko má derivace f' na tomto intervalu. Z prvního intervalu vybereme např. bod -1, ze druhého bod 1 a ze třetího bod 3. Protože

$$f'(-1) = -3\mathrm{e} < 0,$$

$$f'(1) = \frac{1}{e} > 0,$$

$$f'(3) = -\frac{3}{e^3} < 0,$$

je f' kladná na intervalu $(0, 2)$ a záporná na intervalech $(-\infty, 0),\ (2, \infty)$. Podle věty 23 je tedy funkce f rostoucí na intervalu $(0, 2)$ a klesající na intervalech $(-\infty, 0),\ (2, \infty)$.

Protože je f spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy i ve stacionárních bodech $x = 0$, $x = 2$, a protože f' mění při průchodu oběma těmito body znaménko, má funkce f dle věty 25 v obou stacionárních bodech lokální extrémy. V bodě $x = 0$ má přitom lokální minimum (protože se zde mění derivace ze záporné na kladnou) a v bodě $x = 2$ lokální maximum (protože se zde mění derivace z kladné na zápornou).

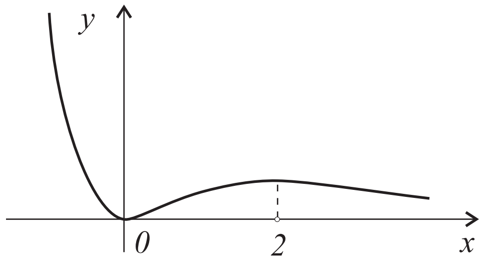
Získaný závěr si ještě pro jistotu ověříme pomocí věty 26, tedy s využitím druhé derivace:

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - 2x \cdot \mathrm{e}^{-x} - 2x \cdot \mathrm{e}^{-x} + x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \cdot (2 - 4x + x^2),\ D_{f''} = \mathbb{R}.$$

Abychom ověřili existenci a typ extrémů ve stacionárních bodech, dosadíme tyto body do vypočtené druhé derivace:

$$f''(0) = 2 > 0,$$
$$f''(2) = -\frac{2}{e^2} < 0.$$

Dle věty 26 má funkce f v bodě 0 lokální minimum a v bodě 2 lokální maximum, což potvrzuje náš předešlý závěr.



Obrázek 36: Graf funkce $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

5.3 Konvexnost a konkávnost, inflexní body

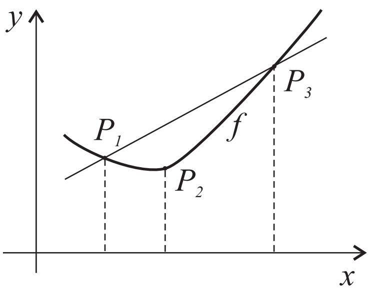
Při vyšetřování průběhu funkce nám obvykle nestačí pro načrtnutí jejího grafu znát definiční obor, intervaly monotonie a lokální extrémy. Kromě již zmíněného je nutné také vědět, je-li graf zkoumané funkce mezi dvěma body „prohnutý“ dolů nebo nahoru. Na základě této grafické představy jsou definovány pojmy *konvexní* a *konkávní funkce*, kterými se budeme zabývat v této kapitole.

Definice 45

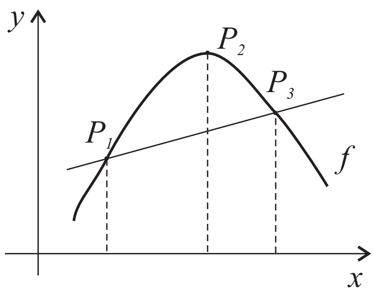
- Řekneme, že funkce f je *konvexní na intervalu* $I \subset D_f$, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že bod $P_2 = (x_2, f(x_2))$ leží buď pod spojnicí bodů $P_1 = (x_1, f(x_1))$ a $P_3 = (x_3, f(x_3))$ nebo na ní.

- Řekneme, že funkce f je *konkávní na intervalu* $I \subset D_f$, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že bod $P_2 = (x_2, f(x_2))$ leží buď nad spojnicí bodů $P_1 = (x_1, f(x_1))$ a $P_3 = (x_3, f(x_3))$ nebo na ní.

- Leží-li P_2 pod (resp. nad) spojnicí P_1 a P_3, nazývá se funkce f *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) na I.



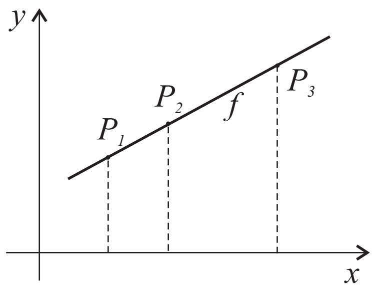
Obrázek 37: Graf ryze konvexní funkce.



Obrázek 38: Graf ryze konkávní funkce.

Rozhodnout o konvexnosti, resp. konkávnosti, funkce můžeme pomocí následujících podmínek založených na znaméncích druhé derivace zkoumané funkce.

Věta 27 *Nechť f je spojitá na otevřeném intervalu $I \subset D_f$ a má na I druhou derivaci. Potom platí:*



Obrázek 39: Graf funkce, která je konvexní i konkávní.

a) Funkce f je konvexní na I $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f''(x) \geq 0$ *pro každé* $x \in I$.

b) Funkce f je konkávní na I $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f''(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in I$.

c) $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in I$ $\quad\Rightarrow\quad$ f *je ryze konvexní na* I.

d) $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in I$ $\quad\Rightarrow\quad$ f *je ryze konkávní na* I.

Body, v nichž existuje tečna ke grafu funkce, která není rovnoběžná s osou y, a v nichž se funkce mění z ryze konvexní na ryze konkávní nebo naopak, se nazývají *inflexní body*.

Definice 46 Nechť f má v bodě $x_0 \in D_f$ vlastní derivaci. Říkáme, že f *má v* x_0 *inflexi*, jestliže existuje $\mathcal{U}^*(x_0) \subset D_f$ tak, že

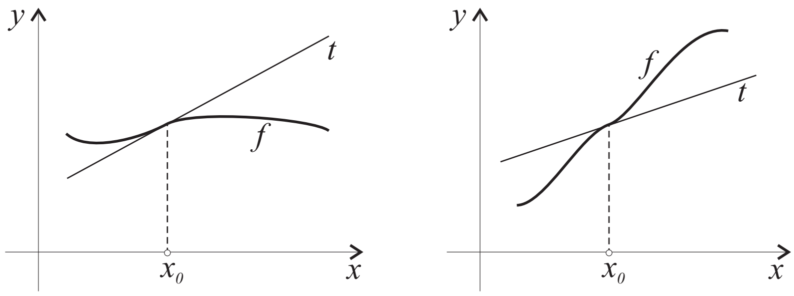
$$f(x) > \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{rovnice tečny v } (x_0, f(x_0))} \qquad \forall x \in \mathcal{U}^*_-(x_0)$$

a zároveň

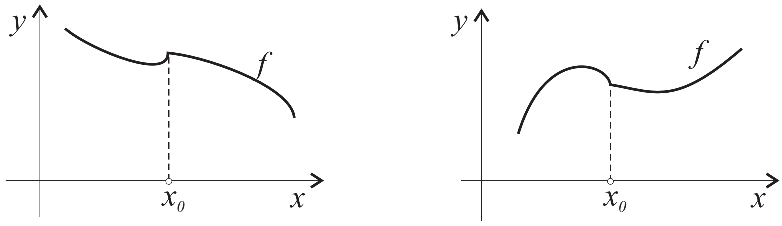
$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad \forall x \in \mathcal{U}^*_+(x_0)$$

nebo naopak.

Bod $(x_0, f(x_0))$ se nazývá *inflexní bod funkce* f.



Obrázek 40: Grafy funkcí, které mají v bodě x_0 inflexi.



Obrázek 41: Grafy funkcí, které nemají v bodě x_0 inflexi.

Z definice 46 plyne, že má-li funkce f v bodě x_0 inflexi, pak na jedné straně od x_0 leží graf funkce f nad tečnou a na druhé straně pod tečnou sestrojenou v bodě $(x_0, f(x_0))$. Pokud f nemá v bodě $x_0 \in D_f$ derivaci, pak v tomto bodě nemůže mít inflexi (viz obr. 41).

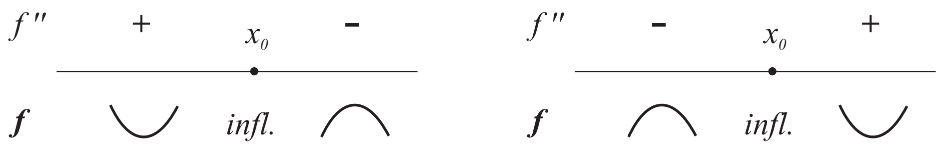
Vzhledem k tomu, že ověřovat podmínky z definice inflexe je zdlouhavé, uvedeme si nyní nutnou podmínku a postačující podmínky pro existenci inflexe, které slouží ke snadnějšímu nalezení inflexních bodů.

Věta 28 (Nutná podmínka existence inflexe) *Nechť má funkce f v bodě $x_0 \in D_f$ inflexi a nechť existuje $f''(x_0)$. Potom $f''(x_0) = 0$.*

Obráceně tvrzení předchozí věty neplatí. Např. funkce $f(x) = x^4$ nemá v bodě $x_0 = 0$ inflexi, a přesto $f''(0) = 0$.

Funkce f tedy může mít inflexi pouze v těch bodech, v nichž je *druhá derivace nulová*, nebo bodech, v nichž *druhá derivace neexistuje*. Nyní si uvedeme dvě tvrzení, pomocí nichž zjišťujeme, zda-li se v takovémto „podezřelém“ bodě inflexe opravdu nachází.

Věta 29 (Postačující podmínka existence inflexe) *Nechť má funkce f spojitou první derivaci v bodě $x_0 \in D_f$ a nechť existuje $\mathcal{U}^*(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{U}^*(x_0)$ existuje $f''(x)$. Mění-li funkce f'' při průchodu bodem x_0 znaménko, má funkce f v bodě x_0 inflexi. Neměnı́-li f'' při průchodu bodem x_0 znaménko, f nemá v x_0 inflexi.*



Obrázek 42: Určení inflexních bodů funkce f, která má spojitou první derivaci v bodě x_0.

Věta 30 (Postačující podmínka existence inflexe) *Nechť $f''(x_0) = 0$ a nechť existuje $f'''(x_0)$ a platí $f'''(x_0) \neq 0$. Potom má funkce f v x_0 inflexi.*

Příklad 38 Najděte intervaly ryzí konvexnosti, ryzí konkávnosti a inflexní body pro funkci

$$f(x) = 3x^2 - x^3.$$

Řešení: Funkce f je definována na celé reálné ose, tj. $D_f = \mathbb{R}$. Abychom zadanou úlohu vyřešili, vypočítáme druhou derivaci funkce f a určíme její definiční obor:

$$f'(x) = 6x - 3x^2, \; D_{f'} = \mathbb{R},$$

$$f''(x) = 6 - 6x, \; D_{f''} = \mathbb{R}.$$

Vzhledem k tomu, že $D_{f''} = \mathbb{R}$, jsou body, v nichž může mít f inflexi, pouze ty, v nichž je druhá derivace nulová, tj. body splňující rovnici $6 - 6x = 0$.

Uvažovaná rovnice má pouze jedno řešení, $x = 1$, které rozděluje $D_{f''}$ na dvě části $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$, na nichž je f'' kladná nebo záporná. Protože je f'' spojitá na $\mathbb{R}$, můžeme pokračovat následovně: Z každého z intervalů zvolíme libovolný bod a pomocí něj určíme, jaké znaménko má druhá derivace f'' na tomto intervalu. Z prvního intervalu vybereme např. bod 0 a ze druhého bod 2. Protože

$$f''(0) = 6 > 0,$$

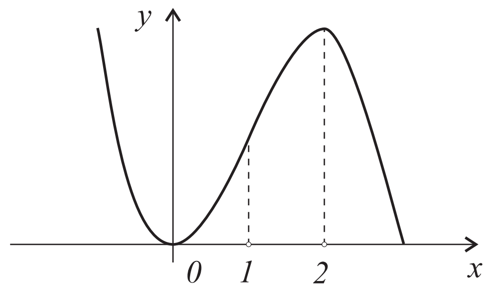
$$f''(2) = -6 < 0,$$

je f'' kladná na intervalu $(-\infty, 1)$ a záporná na intervalu $(1, \infty)$. Podle věty 27 je tedy funkce f ryze konvexní na intervalu $(-\infty, 1)$ a ryze konkávní na intervalu $(1, \infty)$. Z toho rovněž vyplývá, že 1 je inflexním bodem funkce f, protože f'' mění při průchodu tímto bodem znaménko (viz větu 29).

Získaný závěr si ještě pro jistotu ověříme pomocí věty 30, a tedy s využitím třetí derivace:

$$f'''(x) = -6,\ D_{f'''} = \mathbb{R}.$$

Protože $f'''(1) = -6 \neq 0$, má dle věty 30 funkce f v bodě 1 inflexi, což potvrzuje náš předešlý závěr.



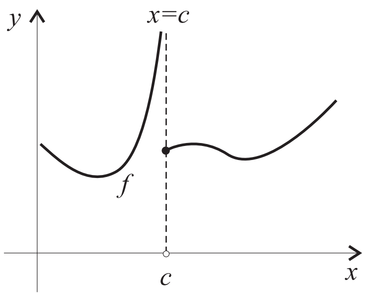
Obrázek 43: Graf funkce $f(x) = 3x^2 - x^3$.

5.4 Asymptoty

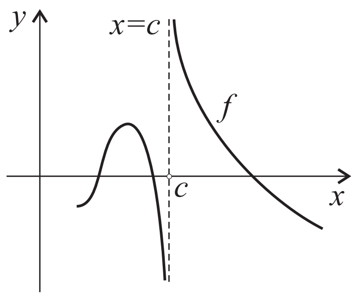
Asymptoty funkce jsou přímky, které nám poskytují informace o chování zkoumané funkce v okolí bodů, v nichž má funkce nespojitost 2. druhu.

Definice 47 Nechť je f definovaná alespoň v jednom jednostranném redukovaném okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Má-li funkce f v bodě c alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, pak se přímka daná rovnicí $x = c$ nazývá *vertikální asymptota* funkce f.

Je-li $x = c$ vertikální asymptota funkce f, pak se graf funkce f přibližuje k této přímce, blíží-li se x k bodu c zleva, zprava, popř. z obou stran (viz obr. 44 a obr. 45).



Obrázek 44: Graf funkce, která má v bodě c vertikální asymptotu.



Obrázek 45: Graf funkce, která má v bodě c vertikální asymptotu.

Příklad 39 Najděte vertikální asymptoty funkce $f(x) = \frac{1}{x} + x \cdot \operatorname{arctg} x$.
Řešení: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a funkce f je na D_f spojitá. Vertikální asymptotu proto může mít funkce f pouze v bodě 0. Abychom zjistili, je-li přímka $x = 0$ vertikální asymptotou, vypočítáme jednostranné limity funkce f v bodě 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} + x \cdot \operatorname{arctg} x \right) = „\frac{1}{0^-}\text{“} + 0 = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+x\cdot\operatorname{arctg} x\right) = „\frac{1}{0^+}“ + 0 = \infty.$$

Z toho vyplývá, že přímka $x = 0$ (tj. osa y) je vertikální asymptotou funkce f.

5.5 Postup při vyšetřování průběhu funkce

Postupy, které byly popsány v předchozích kapitolách nám souhrnně umožní zjistit základní vlastnosti týkající se zkoumané funkce a načrtnout její graf, tj. *vyšetřit průběh této funkce*. Obvykle je vyšetřování průběhu funkce f rozděleno do následujících dílčích úloh:

1. Určíme D_f a základní vlastnosti funkce f (sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost).
2. Rozhodneme o spojitosti funkce, najdeme body nespojitosti a vertikální asymptoty.
3. Vypočítáme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.
4. Vypočteme f', najdeme její definiční obor $D_{f'}$, intervaly monotonie funkce f a lokální extrémy.
5. Vypočteme f'', najdeme její definiční obor $D_{f''}$, intervaly ryzí konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce f.
6. Vypočítáme funkční hodnoty v lokálních extrémech a popř. i v inflexních bodech.
7. Načrtneme graf funkce f.

Uvedený postup není možné chápat „dogmaticky“, protože v konkrétních příkladech mohou být některé dílčí úlohy (např. nalezení průsečíků s osami) jen velmi obtížně řešitelné. Proto se obvykle snažíme o dané funkci nalézt tolik informací, aby byl výsledný graf dostatečně přesný.

Rovněž je nutné si uvědomit, že ne vždy má smysl zkoumat všechny výše zmíněné vlastnosti, protože pokud je např. definiční obor zkoumané funkce omezený, tak nelze počítat $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, protože $\pm\infty$ nejsou hromadnými body definičního oboru. Také pokud je funkce definována a spojitá na celé reálné ose, je možné uvedený postup zkrátit, protože v tomto případě určitě neexistují vertikální asymptoty, a tudíž je není potřeba hledat.

Při vyšetřování průběhu funkce je také vhodné doplnit výpočty o grafické znázornění, které nám pomůže zpřehlednit výsledky jednotlivých dílčích výpočtů, a nakonec pak načrtnout graf dané funkce.

Výše popsaný postup vyšetřování průběhu funkce si prakticky ukážeme na následujícím příkladu, ve kterém je ukázána jedna z možností, jak si mezivýsledky znázorňovat.

Příklad 40 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$.
Řešení:

1. – Abychom určili definiční obor, musíme najít body, v nichž je jmenovatel zkoumané funkce roven 0, tj. řešíme rovnici

$$x^2 - 1 = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení $x = -1$ a $x = 1$, a proto je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

– D_f je souměrný podle počátku. Pro určení sudosti, resp. lichosti, tedy vypočítáme $f(-x)$ a porovnáme ji s $f(x)$:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = f(x).$$

Z toho plyne, že funkce f je sudá. Proto by bylo možné funkci vyšetřovat jen na $\mathbb{R}_0^+$ a následně využít sudosti funkce f.

– Funkce f není periodická, protože její předpis neobsahuje žádné periodické funkce.

– Nalezení průsečíků s osami:

  Pokud $x = 0$, pak $y = f(0) = 0$.

  Pokud $y = 0$, pak

$$0 = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \;\Rightarrow\; 0 = 2 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; 0 = x.$$

  Našli jsme tedy pouze jeden průsečík, a to bod $(0, 0)$.

– Průsečík s osou x a body neležící v D_f rozdělují osu x na čtyři intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, \infty)$, na nichž je f kladná nebo záporná. Vzhledem ke spojitosti f můžeme pro určení kladnosti, resp. zápornosti, dané funkce zvolit v každém z těchto intervalů libovolný bod a pomocí něj určit, jaké znaménko má funkce f na tomto intervalu. Z prvního intervalu vybereme např. bod -2, ze druhého $-\frac{1}{2}$, ze třetího $\frac{1}{2}$ a ze čtvrtého bod 2. Protože

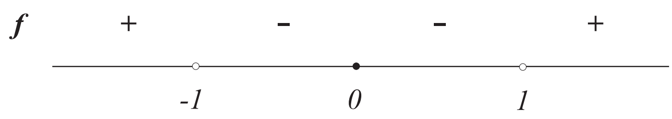
$$f(-2) = \frac{8}{3} > 0,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3} < 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3} < 0,$$

$$f(2) = \frac{8}{3} > 0,$$

  je f kladná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a záporná na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 1)$. Poznamenejme, že tento závěr koresponduje s tím, že má být funkce f sudá.



2. Funkce f má (vzhledem k podobě D_f) dva body nespojitosti -1 a 1. Abychom zjistili, má-li v těchto bodech vertikální asymptoty, vypočítáme příslušné jednostranné limity:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \text{„}\frac{2}{0^+}\text{“} = \infty,$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \text{„}\frac{2}{0^-}\text{“} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \text{„}\frac{2}{0^-}\text{“} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \text{„}\frac{2}{0^+}\text{“} = \infty.$$

Z toho vyplývá, že funkce má dvě vertikální asymptoty – přímky $x = -1$ a $x = 1$.

3. – Vypočítáme limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x^2}} = 2.$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to \infty} \frac{2x^2}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to \infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x^2}} = 2.$$

4. – Abychom našli intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce f, vypočítáme její první derivaci:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2},\ D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

– Nyní nalezneme stacionární body funkce f, tj. řešíme rovnici:

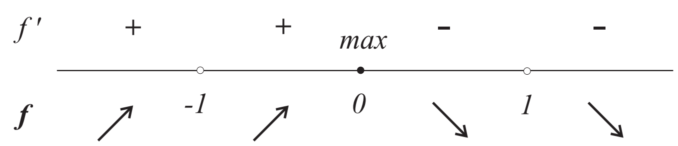
$$\frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0.$$

Uvažovaná rovnice má jedno řešení $x = 0$, které je tedy hledaným stacionárním bodem funkce f. Nalezený stacionární bod a body nepatřící do $D_{f'}$ rozdělují $D_{f'}$ na čtyři části $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, \infty)$, na nichž je f' kladná nebo záporná. Díky spojitosti f' na $D_{f'}$ můžeme postupovat následovně. Z každého z těchto intervalů zvolíme libovolný bod a pomocí něj určíme, jaké znaménko má derivace f' na tomto intervalu. Z prvního intervalu vybereme např. bod -2, ze druhého $-\frac{1}{2}$, ze třetího $\frac{1}{2}$ a ze čtvrtého bod 2. Protože

$$f'(-2) = \frac{8}{9} > 0,$$
$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{32}{9} > 0,$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{32}{9} < 0,$$
$$f'(2) = -\frac{8}{9} < 0,$$

je f' kladná na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ a záporná na intervalech $(0, 1)$, $(1, \infty)$. Podle věty 23 je tedy funkce f rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ a klesající na intervalech $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

– Protože f' mění při průchodu stacionárním bodem 0 znaménko z kladného na záporné, má funkce f dle věty 25 v tomto bodě lokální maximum.



5. – Abychom nalezli intervaly ryzí konvexnosti, ryzí konkávnosti a inflexní body, vypočítáme druhou derivaci funkce f a určíme její definiční obor:

$$f''(x) = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3},$$

$$D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

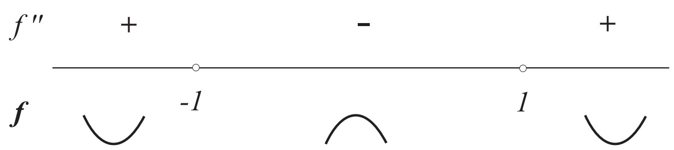
– Vzhledem k tomu, že $D_{f''} = D_{f'}$, jsou body, v nichž může mít f inflexi, pouze ty, v nichž je druhá derivace nulová, tj. body splňující rovnici

$$12x^2 + 4 = 0 \ \Rightarrow 3x^2 = -1 \ \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3}.$$

Uvažovaná rovnice nemá žádné reálné řešení, a proto f nemá žádný inflexní bod. Body nepatřící do $D_{f''}$ rozdělují $D_{f''}$ na tři části $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, \infty)$, na nichž je f'' kladná nebo záporná. Díky spojitosti f'' na $D_{f''}$ můžeme postupovat následovně. Z každého z těchto intervalů zvolíme libovolný bod a pomocí něj určíme, jaké znaménko má druhá derivace f'' na tomto intervalu. Z prvního intervalu vybereme např. bod -2, ze druhého 0 a ze třetího bod 2. Protože

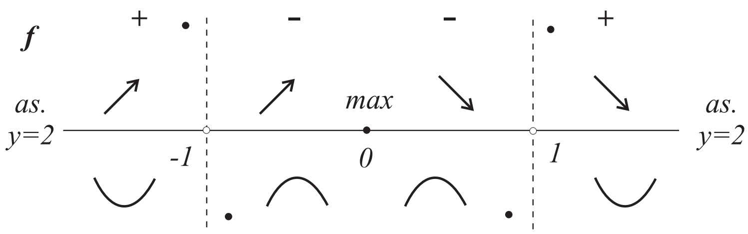
$$f''(-2) = \frac{52}{27} > 0, \qquad f''(0) = -4 < 0, \qquad f''(2) = \frac{52}{27} > 0,$$

je f'' kladná na intervalech $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ a záporná na intervalu $(-1, 1)$. Podle věty 27 je tedy funkce f ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-1, 1)$.

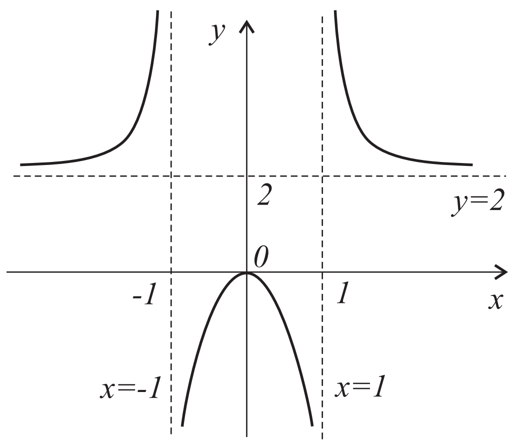


6. Vypočítáme funkční hodnoty v bodech, v nichž má funkce extrém, tj. v bodě 0: $f(0) = 0$.

7. Všechny mezivýsledky shrneme



a nakreslíme graf funkce f:



Obrázek 46: Graf funkce $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$ a její asymptoty.

Pojmy k zapamatování:

- stacionární bod
- lokální minimum a maximum
- konvexnost a konkávnost
- inflexní bod
- vertikální asymptota

Příklady k procvičení: Vyšetřete průběh funkce f.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ b) $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ c) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$
d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Výsledky příkladů k procvičení:

a) $D_f = D_{f'} = D_{f''} = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$, funkce je sudá, průsečíky s osou x: body $(-2,0), (2,0)$, funkce je kladná na $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$, záporná na $\left(-2, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 2\right)$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ vertikální asymptoty $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, klesá na $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, roste na $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$, nemá lokální extrémy, ryze konkávní na $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$

b) $D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, průsečík s osou y: bod $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, funkce je kladná na $(-2,\infty)$, záporná na $(-\infty,-2)$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty \Rightarrow$ vertikální asymptota $x = -2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, funkce klesá na $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, roste na $(-1,\infty)$ $\Rightarrow$ má lokální minimum v bodě -1, je ryze konkávní na $(-\infty,-2)$, ryze konvexní na $(-2,\infty)$

c) $D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$, funkce je lichá, průsečík s osou x i y: bod

$(0,0)$, funkce je kladná na $(0,\infty)$, záporná na $(-\infty,0)$, neexistují vertikální asymptoty, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, funkce roste na $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$, nemá lokální extrémy, ryze konkávní na $(-\infty,0)$, ryze konvexní na $(0,\infty)$, má inflexi v 0

d) $D_f = D_{f'} = D_{f''} = (0,1)\cup(1,\infty)$, funkce je kladná na $(1,\infty)$, záporná na $(0,1)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty \;\Rightarrow$ vertikální asymptota $x = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, funkce klesá na $(0,1)$, $(1,e)$, roste na (e,∞), má lokální minimum v bodě e, ryze konkávní na $(0,1)$, (e^2,∞), ryze konvexní na $(1,e^2)$, má inflexi v bodě e^2