2 Limita funkce

Pokud máme za úkol nakreslit graf funkce f, musíme mimo jiné zjistit, jak se tato funkce chová v okolí bodů, které nepatří do jejího definičního oboru. Můžeme například zjistit, že pokud se proměnná x blíží k takovému bodu, pak se funkční hodnoty $f(x)$ blíží k nějakému reálnému číslu nebo neomezeně rostou (tj. „blíží se“ k ∞) nebo naopak neomezeně klesají a „blíží se“ k $-\infty$. Tento proces „přibližování se“ bude v této kapitole podrobně popsán pomocí pojmu *limita funkce v bodě.*

Poznamenejme, že limita je jedním ze základních pojmů diferenciálního počtu, neboť je pomocí ní definován pojem derivace. Využívá se rovněž při vyšetřování průběhu funkce pro nalezení vertikálních asymptot.

Limity funkcí slouží ke zkoumání vlastností funkcí v redukovaných okolích bodů, které jsou z nějakého důvodu problematické. Nejčastěji jsou to body, které „nedokážeme nakreslit“ ($\pm\infty$), body, ve kterých není funkce definovaná nebo ve kterých se chová „nestandardně“.

Zjednodušeně řečeno je limita funkce f v bodě c hodnota a, ke které se blíží funkční hodnoty $f(x)$, když se x blíží k bodu c. Je důležité si uvědomit, že limita funkce f v bodě c nezávisí na samotné funkční hodnotě $f(c)$ v bodě c; funkční hodnota se může lišit od limity v tomto bodě nebo funkce nemusí být v daném bodě vůbec definovaná.

Limity funkcí můžeme hledat jen v bodech c, které jsou hromadnými body D_f, tj. v bodech v jejichž každém okolí leží nekonečně mnoho bodů z D_f. Pro to, abychom se k bodu c mohli blížit, je totiž nutné, aby v každém jeho okolí leželo nekonečně mnoho bodů z D_f.

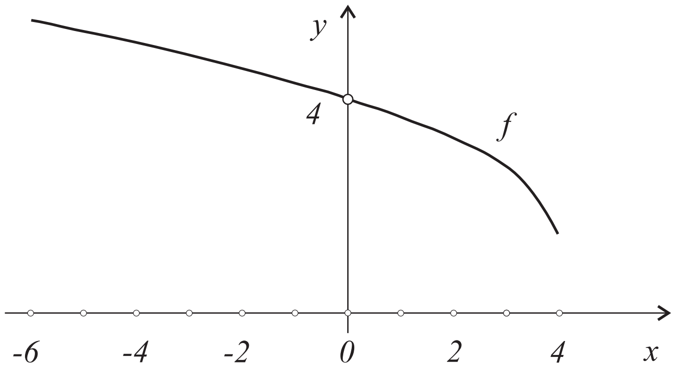
Uvažujme např. funkci $f(x) = \frac{x}{2-\sqrt{4-x}}$, která je definovaná pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 4\rangle$, a pokusme se najít její limitu v bodě $c = 0$.

Abychom tuto limitu nalezli, zkoumáme, jak vypadají funkční hodnoty v bodech, které leží v blízkosti bodu 0:

x	$f(x)$
-0,1	4,024845694
-0,01	4,002499160
-0,001	4,000256016
-0,0001	4,000025008
0	není definováno
0,0001	3,999974992
0,001	3,999744016
0,01	3,997499165
0,1	3,974841795

Tabulka 1: Funkční hodnoty funkce $f(x) = \frac{x}{2-\sqrt{4-x}}$.

Z funkčních hodnot uvedených v tab. 1, stejně jako z grafu funkce znázorněném na obr. 8, je patrné, že čím více se hodnoty x blíží k 0, tím více se funkční hodnoty blíží ke 4 a funkce f má tedy v bodě 0 limitu rovnu číslu 4.



Obrázek 8: Graf funkce $f(x) = \frac{x}{2-\sqrt{4-x}}$.

Podle toho, zda jsou hodnoty c a a reálná čísla nebo nevlastní body $\pm\infty$, rozlišujeme tyto speciální typy limit:

1. Vlastní limita ve vlastním bodě, je-li $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Vlastní limita v nevlastním bodě, je-li $c = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$.

3. Nevlastní limita ve vlastním bodě, je-li $c \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$.

4. Nevlastní limita v nevlastním bodě, je-li $c = \pm\infty$, $a = \pm\infty$.

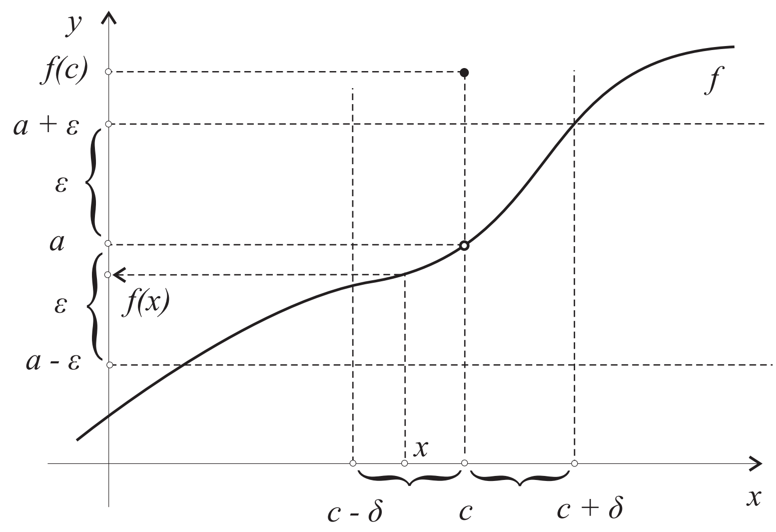
Na obr. 8 byl znázorněn graf funkce, která má v bodě 0 vlastní limitu 4. Obecně je tato situace popsána v následující definici, která se zabývá *vlastní limitou ve vlastním bodě.*

Definice 24 Nechť $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f a nechť $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že *funkce f má v bodě c vlastní limitu a*, jestliže ke každému kladnému ε existuje kladné δ takové, že pro všechna x z definičního oboru funkce f splňující $0 < |x - c| < \delta$ platí, že $|f(x) - a| < \varepsilon$.
Zapisujeme

$$\lim_{x \to c} f(x) = a.$$

Pomocí kvantifikátorů lze psát:

$$\lim_{x \to c} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x - c| < \delta \colon \ |f(x) - a| < \varepsilon.$$



Obrázek 9: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = a$.

Z grafického hlediska je smysl předchozí definice následující: Zvolíme-li si libovolně široký pás o šířce 2ε kolem přímky $y = a$, pak k němu musí existovat interval $(c-\delta, c+\delta)$ kolem bodu c tak, aby graf funkce f na množině $(c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ ležel celý ve zvoleném pásu (viz obr. 9).

Jak již bylo zmíněno v úvodním odstavci, funkční hodnota v bodě c nemusí existovat a $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ na existenci ani hodnotě $f(c)$ nezávisí.

Nyní se budeme zabývat případem, kdy se x blíží k ∞ nebo k $-\infty$ a hodnoty $f(x)$ se přitom blíží k reálnému číslu a. Chová-li se funkce takovýmto způsobem, říkáme, že má *v nevlastním bodě vlastní limitu.*

Definice 25 Nechť ∞ je hromadným bodem definičního oboru funkce f a nechť $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že *funkce f má vlastní limitu a v nevlastním bodě*

∞, jestliže ke každému kladnému ε existuje reálné číslo K takové, že pro všechna x patřící do definičního oboru funkce f, která jsou větší než K, platí, že $|f(x) - a| < \varepsilon$.
Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

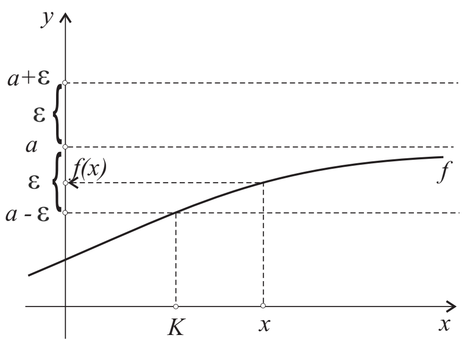
Pomocí kvantifikátorů lze psát:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > K\colon\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

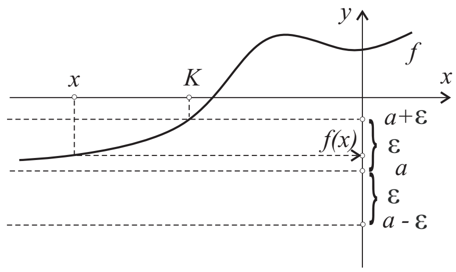
Z grafického hlediska je smysl předchozí definice následující: Zvolíme-li si libovolně široký pás o šířce 2ε kolem přímky $y = a$, pak k němu musíme být schopni najít číslo K takové, aby pro každé $x > K$ ležel graf funkce f ve zvoleném pásu (viz obr. 10).

Poznámka 6 Obdobně definujeme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$. V tomto případě pouze nahradíme nerovnost $x > K$ v předchozí definici nerovností $x < K$ (viz obr. 11), tj.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x < K\colon\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$



Obrázek 10: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$.



Obrázek 11: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$.

Poznámka 7 Příkladem funkcí, které mají vlastní limitu v obou nevlastních bodech, jsou např. funkce $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, arctg x nebo arccotg x (viz grafy těchto funkcí v kapitole 1.5).

U celé řady funkcí se můžeme setkat s tím, že když se hodnoty x přibližují k reálnému číslu c, tak se funkční hodnoty neomezeně zvětšují (tj. blíží se k ∞) nebo se naopak přibližují k $-\infty$. Chová-li se funkce takovýmto způsobem, říkáme, že má *ve vlastním bodě nevlastní limitu.*

Definice 26 Nechť $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má v bodě c nevlastní limitu* ∞, jestliže ke každému reálnému číslu K existuje kladné číslo δ takové, že pro všechna x z definičního oboru funkce f splňující $0 < |x - c| < \delta$ platí, že $f(x)$ je větší než K.
Zapisujeme

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty.$$

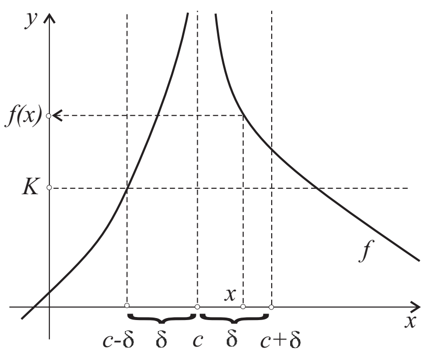
Pomocí kvantifikátorů lze psát:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x - c| < \delta \;:\; f(x) > K.$$

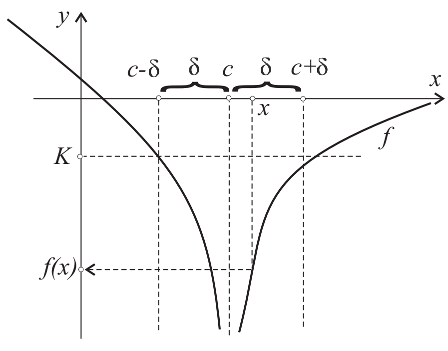
Z grafického hlediska je smysl předchozí definice následující: Ke každému reálnému číslu K musíme být schopni najít interval $(c - \delta, c + \delta)$ tak, aby graf funkce f na množině $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ ležel celý nad přímkou $y = K$ (viz obr. 12).

Poznámka 8 Obdobně definujeme $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$. V tomto případě pouze nahradíme nerovnost $f(x) > K$ v předchozí definici nerovností $f(x) < K$ (viz obr. 13), tj.

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x-c| < \delta\colon\ f(x) < K.$$



Obrázek 12: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$.



Obrázek 13: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$.

Poznámka 9 Další funkce, které mají nevlastní limitu ve vlastním bodě, jsou např. $\frac{1}{x^4}$ (v bodě 0), $|\mathrm{tg}x|$ (v bodech $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$) nebo $\left|\frac{1}{x}\right|$ (v bodě 0).

Posledním typem limit je *nevlastní limita v nevlastním bodě*. U tohoto druhu limity se funkční hodnoty $f(x)$ neomezeně zvětšují nebo neomezeně zmenšují (tj. blíží se k ∞ nebo k $-\infty$), když se proměnná x blíží k ∞ nebo k $-\infty$.

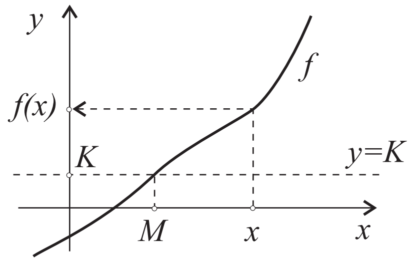
Definice 27 Nechť ∞ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má nevlastní limitu ∞ v nevlastním bodě ∞*, jestliže pro každé reálné číslo K existuje reálné číslo M takové, že pro všechna x z definičního oboru funkce f, která jsou větší než M, platí, že $f(x)$ je větší než K.
Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Pomocí kvantifikátorů lze psát:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > M\colon\ f(x) > K.$$

Z grafického hlediska je smysl předchozí definice následující: Ke každému reálnému číslu K musíme být schopni najít reálné číslo M takové, aby pro každé $x > M$ ležel graf funkce f celý nad přímkou $y = K$ (viz obr. 14).



Obrázek 14: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Poznámka 10 Obdobně jako v definici 27 definujeme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. V těchto případech pouze vhodně nahradíme nerovnosti $x > K$ nebo $f(x) > M$ v předchozí definici nerovnostmi $x < K$ nebo $f(x) < M$. Tj.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > M\colon\ f(x) < K,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x < M\colon\ f(x) > K,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x < M\colon\ f(x) < K.$$

Jako cvičení si nakreslete příslušné obrázky.

Poznámka 11

- Příkladem funkcí, které mají nevlastní limitu v nevlastním bodě $-\infty$, jsou např. funkce x^2, x^3, $\sqrt[3]{x}$ nebo $\ln(-x)$.
- Funkce, které mají nevlastní limitu v nevlastním bodě ∞, jsou např. e^x, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ nebo $\ln x$.

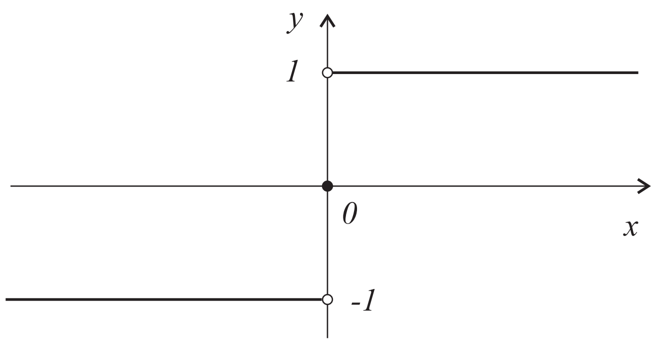
V předchozím textu jsme se seznámili se čtyřmi možnostmi, se kterými se můžeme v případě existence limity setkat. Pomocí okolí bodů lze uvedené definice shrnout do následující definice, která zahrnuje všechny uvedené varianty.

Definice 28 Nechť $c, a \in \mathbb{R}^*$ a nechť c je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má v bodě c limitu a*, jestliže pro každé okolí bodu a existuje redukované okolí bodu c takové, že pro každé x z definičního oboru funkce f ležící v tomto redukovaném okolí, leží $f(x)$ v uvažovaném okolí bodu a.

Pomocí kvantifikátorů lze psát:

$$\lim_{x \to c} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\, \mathcal{U}(a) \quad \exists\, \mathcal{U}^*(c) \quad \forall x \in D_f \cap \mathcal{U}^*(c) \colon\; f(x) \in \mathcal{U}(a).$$

Poznámka 12 Poznamenejme, že ne všechny funkce mají limity ve všech bodech, které jsou hromadnými body jejich definičních oborů. Např. funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá limitu v bodě $c = 0$, protože když se k 0 blížíme „zprava“, blíží se funkční hodnoty $f(x)$ k číslu 1, a když se blížíme „zleva“, blíží se funkční hodnoty $f(x)$ k číslu -1.



Obrázek 15: Graf funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Pro funkci $\sin x$ zase neexistuje $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ ani $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin x$ a totéž platí pro ostatní goniometrické funkce.

2.1 Jednostranné limity

Zatím jsme nerozlišovali, zda se proměnná x k bodu c přibližuje zprava (od větších hodnot) nebo zleva (od menších hodnot), protože to nehrálo žádnou roli. Existují však funkce, u nichž je třeba při výpočtu limity rozlišovat, zda se k danému bodu přibližujeme zprava nebo zleva.

Uvažujme např. funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Z jejího grafu (viz obr. 15) je zřejmé, že pokud se x blíží k bodu 0 zprava, blíží se $f(x)$ k 1, a pokud se x blíží k bodu 0 zleva, blíží se $f(x)$ k -1. Můžeme tedy hovořit o tom, že funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě 0 limitu zprava rovnu 1 a zleva rovnu -1.

V definicích jednostranných limit se oproti obecné definici limity změní pouze posuzování „blízkosti“ k bodu c. Budeme-li se přibližovat zleva, budou hodnoty x náležet do intervalu $(c-\delta, c)$ a budeme hovořit o *limitě zleva.* Při přibližování zprava budou hodnoty x patřit do intervalu $(c, c+\delta)$ a hovoříme o *limitě zprava.* Přesná definice těchto pojmů je uvedena v následujících definicích.

Definice 29 Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť v každém levém okolí $\mathcal{U}_-(c)$ leží nekonečně mnoho bodů z D_f. Říkáme, že *funkce f má v bodě c vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$ zleva*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad c - \delta < x < c\colon\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Zapisujeme

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = a.$$

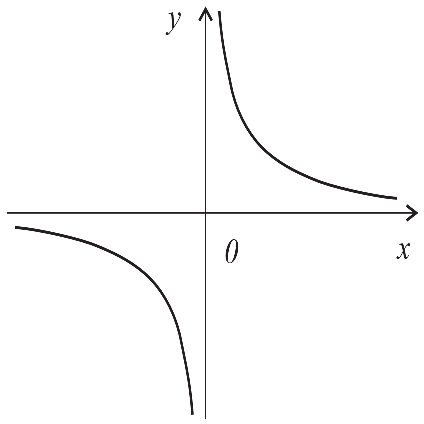
Definice 30 Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť v každém pravém okolí $\mathcal{U}_+(c)$ leží nekonečně mnoho bodů z D_f. Říkáme, že *funkce f má v bodě c vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$ zprava*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad c < x < c + \delta\colon\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Zapisujeme

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = a.$$

Pokud bychom zkoumali funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, zjistili bychom, že pokud se x blíží k bodu 0 zprava, blíží se $f(x)$ k $+\infty$, a pokud se x blíží k bodu 0 zleva, blíží se $f(x)$ k $-\infty$. Můžeme tedy hovořit o tom, že funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má v bodě 0 limitu zprava rovnu $+\infty$ a zleva rovnu $-\infty$ (viz také obr. 16) a jedná se tedy o nevlastní jednostranné limity.



Obrázek 16: Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x}$.

V následující poznámce jsou nevlastní jednostranné limity definovány přesněji.

Poznámka 13

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad c - \delta < x < \delta\colon\ f(x) > K,$$
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad c < x < c + \delta\colon\ f(x) > K,$$
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad c - \delta < x < \delta\colon\ f(x) < K,$$
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad c < x < c + \delta\colon\ f(x) < K.$$

Jako cvičení si nakreslete příslušné obrázky ilustrující $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$.

Poznámka 14 Protože se k bodu $-\infty$ můžeme blížit pouze zprava a k bodu ∞ pouze zleva, nemá smysl v těchto bodech uvažovat jednostranné limity.

Souvislost mezi limitou funkce v bodě c a jednostrannými limitami v tomto bodě udává následující věta, jejíž důkaz vyplývá přímo z definic.

Věta 4 *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť v každém $\mathcal{U}_-(c)$ i každém $\mathcal{U}_+(c)$ leží nekonečně mnoho bodů z D_f. Potom*

$$\lim_{x \to c} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 1.\ \textit{existují obě jednostranné limity} \\ 2.\ \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = a \end{array}$$

Tvrzení této věty využíváme k důkazu faktu, že limita dané funkce v bodě neexistuje. Vypočítáme obě jednostranné limity, a pokud se nerovnají nebo některá z nich neexistuje, tak limita neexistuje. Např. lze takto dokázat, že funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá v bodě 0 limitu, protože

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1 \text{ a } \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1.$$

Jednostranné limity dále použijeme při hledání vertikálních asymptot u vyšetřování průběhu funkce.

2.2 Vlastnosti limit funkcí

Nyní si uvedeme několik tvrzení zabývajících se základními vlastnostmi limit.

Věta 5 *Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu, tj. právě jednu nebo žádnou.*

Při výpočtech limit funkcí velmi často používáme následující tvrzení.

Věta 6 *Nechť existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(c)$ bodu c takové, že pro každé $x \in \mathcal{U}^*(c)$ platí $f(x) = g(x)$. Má-li funkce g v bodě c limitu a, pak má i funkce f v bodě c stejnou limitu a.*

Jinak řečeno, funkci v daném bodě c nedefinovanou nahradíme funkcí, která se jí rovná (kromě hodnoty v inkriminovaném bodě c), a její limitu v bodě c vypočteme. Vypočtená hodnota bude i limitou původní funkce v bodě c.

Příklad 9 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$.
Řešení: Po „dosazení“ 2 za x získáme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Snažíme se tedy funkci $\frac{x^2+x-6}{x-2}$ upravit dle předchozí věty na funkci v bodě 2 definovanou:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = „\frac{0}{0}“ = \lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+3) = 5.$$

Věta 7 *Má-li funkce f v bodě c vlastní limitu a, pak existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(c)$ takové, že je f omezená na množině $\mathcal{U}^*(c) \cap D_f$.*

Věta 7 neplatí obráceně. Tj. omezenost na $\mathcal{U}^*(c) \cap D_f$ nezaručuje existenci vlastní limity v bodě c. Např. funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je omezená na $D_f = \mathbb{R}$ a v bodě $c = 0$ vlastní limitu nemá.

Nyní si uvedeme větu, s jejíž pomocí jsme schopni počítat limity součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.

Věta 8 (***Algebraické operace s limitami***) *Nechť c je hromadným bodem definičních oborů funkcí f a g. Nechť existují limity $\lim\limits_{x\to c} f(x) \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x) \in \mathbb{R}^*$. Potom platí*

$$\begin{aligned}
1)\ \lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x) \\
2)\ \lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \\
3)\ \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)},
\end{aligned}$$

jestliže mají výrazy na pravé straně smysl v $\mathbb{R}^*$.

Poznámka 15 .

- Fakt, že mají výrazy na pravé straně smysl v $\mathbb{R}^*$, znamená, že se nejedná o neurčité výrazy, tj. např. výrazy typu $\infty - \infty$ nebo $\frac{0}{0}$.

- Vyjde-li na pravé straně neurčitý výraz, neznamená to, že limita na levé straně neexistuje, jen k jejímu výpočtu nelze tvrzení věty 8 použít. Pro výpočet takových limit se užívá např. vytýkání, rozšiřování nebo krácení. K výpočtu limit typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se využívá nejčastěji tzv. **l'Hospitalovo pravidlo**, se kterým se seznámíme v kapitole věnované derivacím.

Příklad 10 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x-1}{-5x^3+4}$.
Řešení: „Dosadíme-li“ za x nevlastní bod $-\infty$, získáme neurčitý výraz $\frac{-\infty}{\infty}$, proto nelze k výpočtu dané limity použít přímo tvrzení 3) z věty 8. Abychom limitu vypočítali, vytkneme z čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninu a zkrátíme.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x-1}{-5x^3+4} = „\frac{-\infty}{\infty}“ = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(-5+\frac{4}{x^3})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{-5+\frac{4}{x^3}} =$$

$$= \frac{3+0-0}{-5+0} = -\frac{3}{5}.$$

Poznámka 16 Dojdeme-li při výpočtu jednostranných limit např. k výrazu typu $\frac{1}{0^+}$, pak je tato jednostranná limita rovna ∞, a dojdeme-li k výrazu typu $\frac{1}{0^-}$, pak je tato jednostranná limita rovna $-\infty$.

Poznámka 17 Předchozí poznámku využíváme při výpočtech limit $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{a}{0}$, kde $a \neq 0$. Postupujeme přitom obvykle takto: Výpočet limity typu $\frac{a}{0}$ převedeme na výpočet jednostranných limit $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, které jsou rovny ∞, $-\infty$ nebo neexistují. Rovnají-li se jednostranné limity, limita existuje a je rovna jednostranným limitám. Pokud se jednostranné limity nerovnají nebo některá z nich neexistuje, limita neexistuje.

Příklad 11 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x}{(x-3)^2}$.

Řešení: „Dosadíme-li" za x číslo 3, získáme výraz $\frac{6}{0}$. Abychom limitu vypočítali, budeme postupovat dle předchozí poznámky a vypočítáme příslušné jednostranné limity:

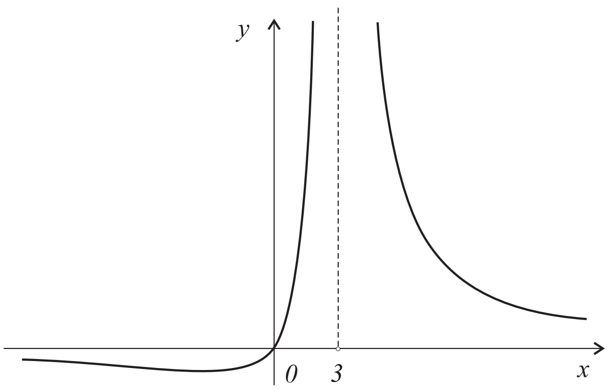
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{(x-3)^2} = „\frac{6}{0^+}" = \infty,$$

protože funkce $(x-3)^2$ je na levém redukovaném okolí bodu 3 kladná a

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{(x-3)^2} = „\frac{6}{0^+}" = \infty,$$

protože funkce $(x-3)^2$ je i na pravém redukovaném okolí bodu 3 kladná. Jednostranné limity se rovnají, limita tedy existuje a platí

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x}{(x-3)^2} = \infty.$$



Obrázek 17: Graf funkce $f(x) = \frac{2x}{(x-3)^2}$.

Příklad 12 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2}{x^3}$.

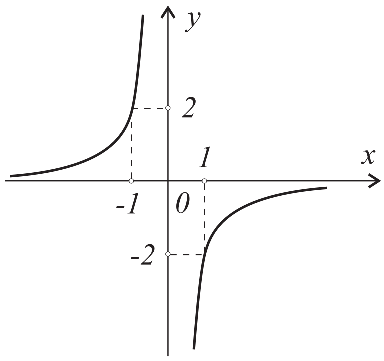
Řešení: „Dosadíme-li" za x číslo 0, získáme výraz $\frac{-2}{0}$. Abychom limitu vypočítali, budeme postupovat dle poznámky 17 a vypočítáme příslušné jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{x^3} = „\frac{-2}{0^-}\text{“} = \infty,$$

protože funkce x^3 je na levém redukovaném okolí bodu 0 záporná a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{x^3} = „\frac{-2}{0^+}\text{“} = -\infty,$$

protože funkce x^3 je na pravém redukovaném okolí bodu 0 kladná. Jednostranné limity se tedy nerovnají a limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2}{x^3}$ neexistuje.



Obrázek 18: Graf funkce $f(x) = \frac{-2}{x^3}$.

Pro výpočet limit se také často využívají následující dvě tvrzení – první se týká *součinu dvou funkcí, z nichž je jedna omezená a druhá má nulovou limitu*, a druhé *limity tří funkcí.*

Věta 9 *Nechť je funkce f omezená na nějakém redukovaném okolí $\mathcal{U}^*(c)$ a nechť*

$$\lim_{x\to c} g(x) = 0.$$

Potom

$$\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Příklad 13 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení: Protože $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje, nelze limitu vypočítat přímým dosazením. Jde ale o typický příklad na použití předchozí věty, protože $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin x$, kde funkce $\sin x$ je omezená (na $\mathbb{R}$) a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Platí tedy:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = „\frac{\text{neexistuje}}{\infty}“ = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = „0 \cdot \text{ omezená }“ = 0.$$

Věta 10 (O limitě tří funkcí) *Nechť pro funkce f, g a h platí*

- $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *na nějakém* $\mathcal{U}^*(c)$,
- *existují limity* $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *a* $\lim\limits_{x\to c} h(x)$,
- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = a$.

Potom existuje i limita $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ *a platí* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$.

Věta o limitě tří funkcí platí i pro jednostranné limity s tím rozdílem, že je redukované okolí $\mathcal{U}^*(c)$ nahrazeno pravým nebo levým redukovaným okolím.

2.3 Výpočet limit funkcí

Při výpočtu limit funkcí se používají věty uvedené v předchozí kapitole a hodnoty význačných limit některých elementárních funkcí:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pro}\, 0 < a < 1 \\ 1 & \text{pro}\, a = 1 \\ \infty & \text{pro}\, a > 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pro}\, 0 < a < 1 \\ 1 & \text{pro}\, a = 1 \\ 0 & \text{pro}\, a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \qquad \lim_{x\to 0} (1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k, \text{ kde } k \in \mathbb{R}$$

Poznámka 18 Máme-li vypočítat $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, pak lze použít všechny postupy, které jsme uvedli v kapitole o posloupnostech minulý semestr. Obdobně, při výpočtu limit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ lze podobné postupy použít s tím, že je potřeba "dát navíc pozor na znaménka".

Poznámka 19 Naopak, při výpočtu limit $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$ **nelze postupy uvedené u posloupností použít**, tj. např. limitu podílu polynomů nelze v bodě $c \in \mathbb{R}$ počítat porovnáním nejvyšších mocnin, což by byl postup použitelný pro $c = \pm\infty$.

Příklad 14 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+5}{x+2}\right)^x$.
Řešení: „Dosadíme-li“ za x nevlastní bod ∞, získáme neurčitý výraz 1^∞. Abychom limitu vypočítali, využijeme substituci a vztah $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^x = „1^\infty“ = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2+3}{x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^x.$$

Abychom mohli vztah $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ použít, potřebovali bychom mít místo výrazu $\frac{3}{x+2}$ výraz $\frac{1}{y}$, který získáme vhodnou substitucí: Pokud má platit rovnost $\frac{3}{x+2} = \frac{1}{y}$, pak $y = \frac{x+2}{3}$. Vhodnou substitucí je tudíž substituce $y = \frac{x+2}{3}$, při níž platí: Pokud $x \to \infty$, pak také $y \to \infty$; $x+2 = 3y$ a $x = 3y-2$. Proto lze ve výpočtu pokračovat následovně:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^x = \left|\begin{array}{l} y = \frac{x+2}{3} \;\Rightarrow x+2 = 3y,\; x = 3y-2 \\ x\to\infty \;\Rightarrow\; y\to\infty \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y-2} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^3 \cdot \left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2} = e^3\cdot 1^{-2} = e^3.$$

Příklad 15 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{2x}$.
Řešení: „Dosadíme-li“ za x číslo 0, získáme výraz $\frac{0}{0}$. Abychom odstranili

odmocninu v čitateli, využijeme vzorec $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, tj. rozšíříme zlomek výrazem $\sqrt{1-x}+1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{2x} = „\frac{0}{0}“ = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{2x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(\sqrt{1-x}+1)} = \frac{-1}{2(1+1)} = -\frac{1}{4}.$$

Pojmy k zapamatování:

- vlastní limita funkce ve vlastním bodě
- nevlastní limita funkce ve vlastním bodě
- vlastní limita funkce v nevlastním bodě
- nevlastní limita funkce v nevlastním bodě
- jednostranná limita funkce v bodě

Příklady k procvičení: Vypočítejte následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$ b) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-x^3\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x}$

e) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x+2}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-2x^2-x}{-4x^3+1}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3-2x^2+1}{2x+1}$

ch) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+3x-2}{5x^3+2x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to0} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x$ l) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x}{\sin x}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot\sin x-2x^3}{3x^3+x\cdot\cos x}$ n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+\cos(5x)}{5x+1}$

o) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(2x-1)+e^{\sin(\pi x)}}{(x-1)^2}$ p) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x}{x-\pi}$ q) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2}$

r) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(2x)+x^4\cdot\cos\left(\frac{4}{x}\right)+4}{x^2\cdot\sin(3x)-\pi x^3}$ s) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\cdot\cos(2x)-x^2\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)+2}{3x^2+x\cdot\sin(3x)}$ t) $\lim\limits_{x\to5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5}$

Výsledky příkladů k procvičení:

a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{1}{\pi}$ c) ∞ d) 0 e) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ f) -4 g) $-\frac{3}{4}$ h) ∞

ch) 0 i) 0 j) 0 k) e^2 l) neexistuje

m) $-\frac{2}{3}$ n) $-\infty$ o) ∞ p) neexistuje

q) $-\infty$ r) $-\infty$ s) $-\frac{1}{3}$ t) $\frac{1}{24}$

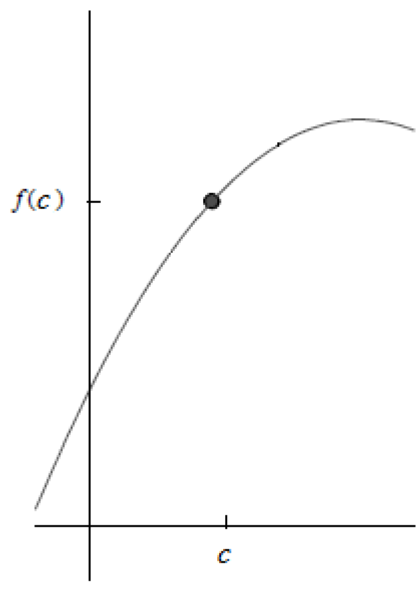
3 Spojitost funkce

Spojitá funkce je taková funkce, jejíž funkční hodnoty se mění plynule, tj. při dostatečně malé změně proměnné x se hodnota $f(x)$ změní také málo. Zjednodušeně řečeno můžeme spojitou funkci poznat podle toho, že lze její graf nakreslit jedním tahem, aniž by se tužka zvedla z papíru. Funkce, která není spojitá, se označuje jako nespojitá.

V této kapitole se budeme nejprve zabývat *spojitostí funkce v bodě* a ukážeme si, jaká existuje souvislost mezi spojitostí a limitou.

Definice 31 Nechť $c \in D_f$ je hromadným bodem D_f. Funkce f se nazývá *spojitá v bodě* c, jestliže

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$



Obrázek 19: Graf funkce spojité v bodě c.

Platí-li rovnost $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ uvedená ve Definici 31 pro některou z jednostranných limit, hovoříme o tzv. *spojitosti zleva*, resp. *spojitosti zprava v bodě c*.

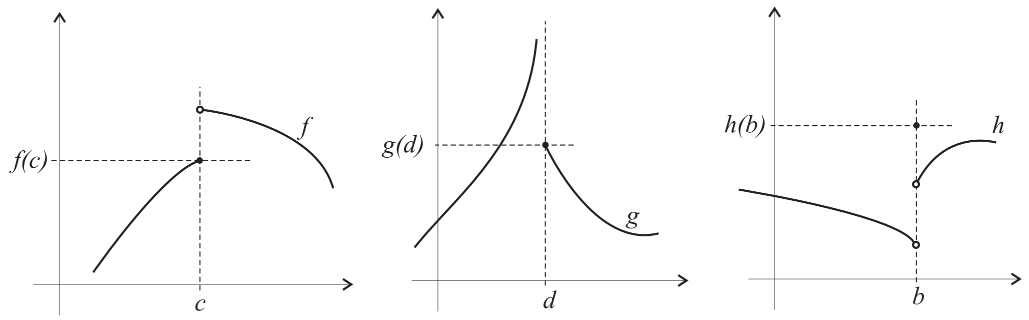
Definice 32 .

- Nechť $c \in D_f$ a nechť v každém $\mathcal{U}_-(c)$ leží nekonečně mnoho bodů z D_f. Funkce f se nazývá *spojitá zleva v bodě* c, jestliže

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c).$$

- Nechť $c \in D_f$ a nechť v každém $\mathcal{U}_+(c)$ leží nekonečně mnoho bodů z D_f. Funkce f se nazývá *spojitá zprava v bodě* c, jestliže

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c).$$



Obrázek 20: Graf funkce f spojité v bodě c pouze zleva, graf funkce g spojité v bodě d pouze zprava a graf funkce h, která není v bodě b spojitá zleva ani zprava.

Vztah mezi spojitostí v bodě a spojitostí zleva a zprava je popsán v následující větě.

Věta 11 *Nechť $c \in D_f$ a nechť v každém $\mathcal{U}_-(c)$ i v každém $\mathcal{U}_+(c)$ leží nekonečně mnoho bodů z D_f. Potom*

$$f \text{ je spojitá v bodě } c \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ je spojitá v bodě } c \text{ zleva i zprava}$$

3.1 Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Funkce spojité v bodě mají celou řadu vlastností, z nichž si nyní uvedeme ty nejzákladnější.

Věta 12 *Nechť f je spojitá v bodě $c \in D_f$. Potom existuje okolí $\mathcal{U}(c)$ takové, že funkce f je omezená na $\mathcal{U}(c) \cap D_f$.*

Věta 12 neplatí obráceně. Tj. omezenost na $\mathcal{U}(c) \cap D_f$ nezaručuje spojitost v bodě c. Např. funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je omezená na $D_f = \mathbb{R}$ a v bodě $c = 0$ není spojitá.

Součet, rozdíl, součin a podíl funkcí spojitých v bodě jsou funkce v daném bodě rovněž spojité.

Věta 13 *Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $c \in D_f \cap D_g$. Potom jsou v bodě c spojité i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (pro $g(c) \neq 0$) a $|f|$.*

Tvrzení věty 13 lze rozšířit na konečný počet funkcí. Lze také dokázat, že složením spojitých funkcí vznikne funkce spojitá a že inverzní funkce k prosté spojité funkci je funkce spojitá.

Věta 14 (O spojitosti složené funkce) *Nechť je funkce f spojitá v bodě $c \in D_f$ a nechť je funkce g spojitá v bodě $f(c) \in D_g$. Potom je složená funkce $g(f(x))$ spojitá v bodě c.*

Věta 15 (O spojitosti inverzní funkce) *Nechť je funkce f prostá na D_f a nechť je spojitá v bodě $c \in D_f$. Potom je inverzní funkce f^{-1} spojitá v bodě $f(c)$.*

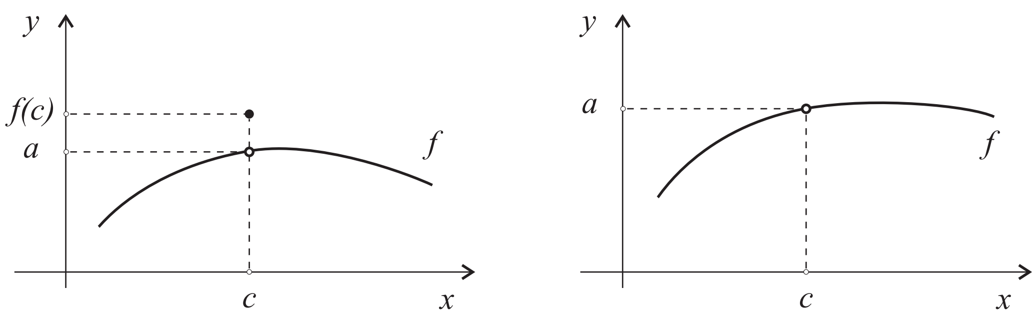
3.2 Body nespojitosti

Body, v nichž funkce f není spojitá, označujeme jako *body nespojitosti*. Druhy nespojitosti jsou definovány pomocí limit, proto budeme u všech tří typů nespojitosti předpokládat, že je daný bod hromadným bodem D_f. Patřit přitom do D_f daný bod nemusí.

Prvním typem nespojitosti je tzv. *odstranitelná nespojitost*.

Definice 33 Nechť c je hromadným bodem D_f. Říkáme, že funkce f *má v bodě c odstranitelnou nespojitost*, jestliže

- existuje vlastní limita
$$\lim_{x \to c} f(x) = a,$$
- existuje-li $f(c)$, pak $f(c) \neq a$.



Obrázek 21: Grafy funkcí, které mají v bodě c odstranitelnou nespojitost.

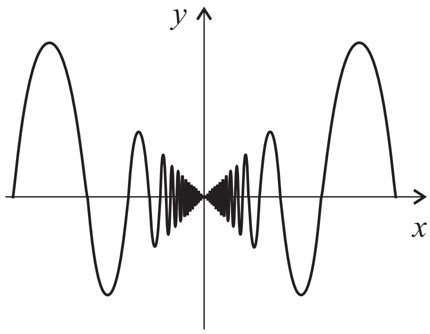
Příklad 16 Dokažte, že má funkce $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ v bodě 0 odstranitelnou nespojitost.

Řešení: Protože je definičním oborem funkce f množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, je bod 0 hromadným bodem D_f a $f(0)$ neexistuje. Abychom dokázali, že má f v bodě

0 odstranitelnou nespojitost, zbývá ukázat, že má f v bodě 0 vlastní limitu. Limita

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

je (podle věty 9) rovna 0, protože $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ je funkce omezená a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Funkce $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ má tedy v bodě 0 odstranitelnou nespojitost.



Obrázek 22: Graf funkce $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Má-li funkce f v bodě c odstranitelnou nespojitost, můžeme ji odstranit dodefinováním nebo předefinováním:

- Pokud $c \notin D_f$ a $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a$, pak dodefinujeme funkci f v bodě c limitou a.
- Pokud $c \in D_f$ a $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a \neq f(c)$, pak hodnotu funkce f v bodě c předefinujeme na a.

Dodefinujeme-li např. funkci z předchozího příkladu takto:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

získáme funkci spojitou v bodě 0.

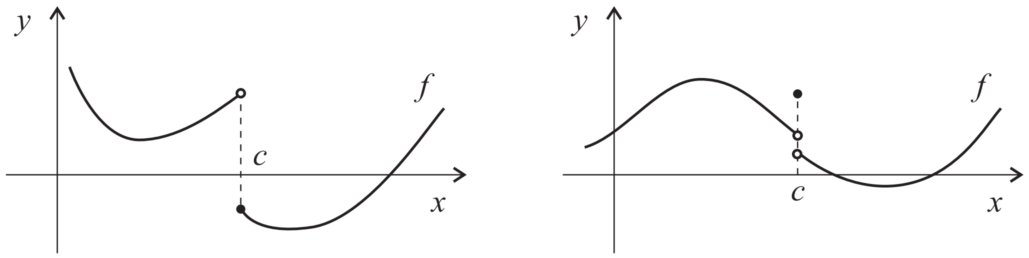
Dalším typem nespojitosti je *nespojitost typu skok*.

Definice 34 Nechť c je hromadným bodem D_f. Říkáme, že funkce f *má v bodě* $c \in \mathbb{R}$ *nespojitost 1. druhu* (*typu skok*), jestliže existují vlastní jednostranné limity v bodě c, které se nerovnají, tj. jestliže existují

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \in \mathbb{R} \text{ a } \lim_{x\to c^-} f(x) \in \mathbb{R}$$

a

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x).$$



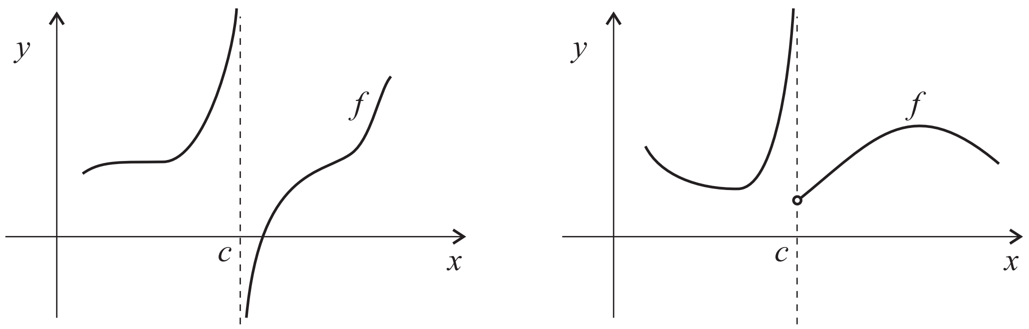
Obrázek 23: Grafy funkcí, které mají v bodě c nespojitost typu skok.

Příklad 17 Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě 0 nespojitost typu skok, protože

$$-1 = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x \neq \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1.$$

Posledním typem nespojitosti je *nespojitost 2. druhu*.

Definice 35 Nechť c je hromadným bodem D_f. Říkáme, že funkce f *má v bodě* $c \in \mathbb{R}$ *nespojitost 2. druhu*, jestliže alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě c neexistuje nebo je nevlastní.



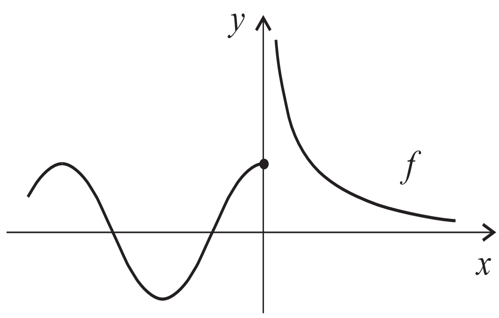
Obrázek 24: Grafy funkcí, které mají v bodě c nespojitost 2. druhu.

Příklad 18 Funkce

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{pro } x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

má v bodě 0 nespojitost 2. druhu, protože

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty.$$



Obrázek 25: Graf funkce definované předpisem (1).

Poznámka 20 Nespojitost 2. druhu mají také např. elementární funkce $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ (v bodě 0), $\operatorname{tg} x$ (v bodech $(2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$) nebo $\operatorname{cotg} x$ (v bodech $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$).

3.3 Spojitost funkce na množině

Spojitost funkce v bodě je stejně jako limita funkce v bodě lokální pojem, který nám charakterizuje chování dané funkce na okolí zvoleného bodu. Na rozdíl od pojmu limita lze pojem spojitost rozšířit na libovolnou podmnožinu definičního oboru nebo na celý definiční obor.

Definice 36 .

- Funkce f se nazývá *spojitá na neprázdné množině* $M \subset D_f$, jestliže je spojitá v každém bodě množiny M. Je-li $M = D_f$, nazývá se f *spojitá na definičním oboru*, stručně *spojitá*.
- Je-li $M \subset D_f$ interval s krajními body a a b, kde $a < b$, potom se funkce f nazývá *spojitá na intervalu* M, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě množiny M a pokud $a \in M$, resp. $b \in M$, je spojitá v bodě a zprava, resp. v bodě b zleva.

Věta 16 *Součet, rozdíl, součin a podíl dvou spojitých funkcí, absolutní hodnota spojité funkce a funkce složená ze dvou spojitých funkcí jsou funkce spojité na svých definičních oborech.*

Příklad 19 Funkce $f(x) = \sin(x^2)$ je složená z funkcí $g(x) = \sin x$ a $h(x) = x^2$, které jsou spojité na $D_g = D_h = \mathbb{R}$, a proto je i funkce f spojitá na svém $D_f = \mathbb{R}$.

Příklad 20 Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ a, & \text{pro } x = 3 \end{cases}$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Řešení: Definičním oborem funkce f je množina $D_f = \mathbb{R}$. Pro $x \neq 3$ je funkce f spojitá, protože je dána jako podíl dvou spojitých funkcí. Abychom analyzovali spojitost, resp. typ nespojitosti v bodě 3, je potřeba vypočítat limitu v tomto bodě.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6.$$

Pokud je tedy $a = 6$, pak je f spojitá na $D_f = \mathbb{R}$. Je-li $a \neq 6$, má f v bodě 3 odstranitelnou nespojitost, protože $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6 \neq a$.

Příklad 21 Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Řešení: Definičním oborem je množina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože je funkce f definována jako podíl dvou spojitých funkcí, je spojitá na svém definičním oboru. Abychom analyzovali typ nespojitosti v bodě 0, je potřeba vypočítat limitu v tomto bodě.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = „\frac{1}{0}“.$$

K výpočtu této limity tedy použijeme dle poznámky 17 příslušné jednostranné limity.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = „\frac{1}{0^+}“ = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = „\frac{1}{0^+}“ = \infty.$$

Jednostranné limity se rovnají, a tedy celková limita existuje a je rovněž rovna ∞. Z toho vyplývá, že má funkce f v bodě 0 nespojitost 2. druhu.

Pojmy k zapamatování:

- spojitost funkce v bodě
- spojitost funkce v bodě zprava, resp. zleva
- odstranitelná nespojitost
- nespojitost 1.druhu (typu skok)
- nespojitost 2.druhu
- spojitost funkce na množině

Příklady k procvičení:

Vyšetřete spojitost funkcí.

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ b) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$ d) $f(x) = x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+2} + e^{\sin x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+3}$ f) $f(x) = \ln x^2$ g) $f(x) = \frac{1}{x^2-\pi}$

Výsledky příkladů k procvičení:

a) odstranitelná nespojitost v bodě -2 b) nespojitost 2. druhu v bodě 0

c) nespojitost 2. druhu v bodě 0 d) odstranitelná nespojitost v bodě 0

e) spojitá na $\mathbb{R}$ f) nespojitost 2. druhu v bodě 0

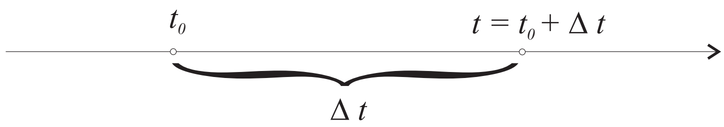
g) nespojitost 2. druhu v bodech $-\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi}$

4 Derivace funkce

Derivace funkce je základním pojmem diferenciálního počtu, ke kterému vede celá řada matematických, ekonomických a fyzikálních úloh. Jako hlavní úlohy, které v minulosti vedly k zavedení pojmu derivace, se udává úloha o rychlosti a úloha o tečně, kterými se budeme dále zabývat.

- Úloha o okamžité rychlosti (fyzikální motivace, I. Newton)

  Předpokládejme, že je přímočarý pohyb hmotného bodu popsán funkcí f, přičemž hodnota $f(t)$ vyjadřuje polohu bodu v čase t. Pohyb bodu začneme pozorovat v čase t_0, v němž je poloha tohoto bodu popsána hodnotou $f(t_0)$.

  Za dobu $\Delta t = t - t_0$ urazí bod dráhu

  $$\Delta s = f(t) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

  Průměrnou rychlost lze pak určit jako

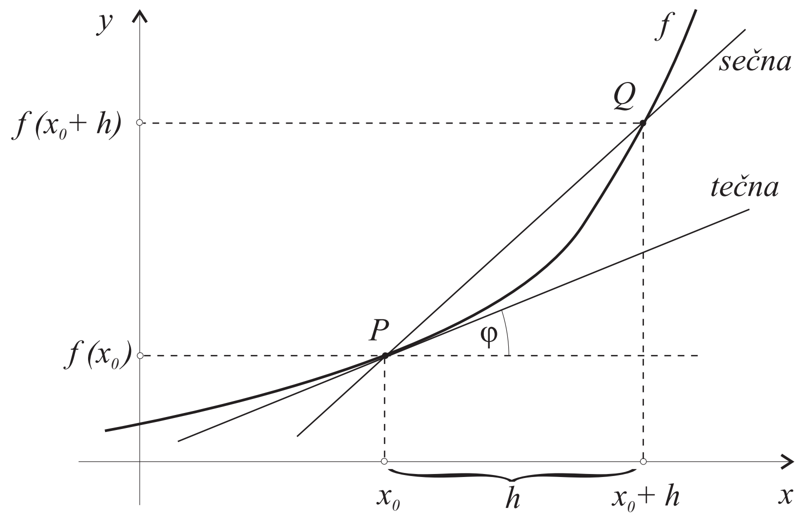
  $$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

  Zmenšujeme-li Δt, blíží se bod $(t_0 + \Delta t)$ k bodu t_0 a průměrná rychlost se blíží k *okamžité rychlosti* hmotného bodu v čase t_0. Okamžitou rychlost v_{t_0} hmotného bodu v čase t_0 tedy získáme tak, že určíme limitu $\overline{v}$ pro $\Delta t \to 0$:

  $$v_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

- Úloha o tečně (geometrická motivace, G. W. Leibniz)

  Uvažujme spojitou funkci f, bod x_0, jehož okolí je součástí D_f, a pokusme se sestrojit *tečnu* ke grafu funkce f v bodě $P = (x_0, f(x_0))$. Tečna je popsána jednoznačně bodem P a svou směrnicí k_t. Ta je dána jako tangens úhlu, který svírá tečna s kladným směrem osy x, tj. jako $\operatorname{tg} \varphi$ (viz obr. 26).



Obrázek 26: Úloha o tečně.

Protože směrnici tečny k_t, tj. $\operatorname{tg} \varphi$, nedokážeme přímo určit, budeme nejprve uvažovat místo tečny *sečnu* procházející bodem P a bodem $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Směrnice této sečny je dána vztahem

$$k_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(tj. jako tangens úhlu, který sečna svírá s kladným směrem osy x). Pro $h \to 0$ se bod Q „blíží“ po grafu funkce f k bodu P a směrnice sečny k_s se blíží ke směrnici tečny k_t. Směrnici tečny lze tedy vypočítat opět pomocí limity:

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

4.1 Derivace funkce v bodě

V předchozí kapitole jsme v obou motivačních příkladech dospěli k limitě stejného typu, tj. k limitě tzv. diferenčního podílu funkce v daném bodě. S touto limitou se můžeme setkat také při řešení dalších úloh, a proto dostala speciální název – *derivace funkce v bodě.*

Definice 37 Nechť je funkce f definovaná na nějakém okolí bodu $x_0 \in D_f$. Existuje-li limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \tag{2}$$

pak se tato limita nazývá *derivace funkce* f *v bodě* x_0 a značí se nejčastěji jako $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ nebo $\frac{df}{dx}(x_0)$. Existuje-li $f'(x_0)$, říkáme, že *funkce* f *má v bodě* x_0 *derivaci.*

Je-li derivace v bodě x_0 rovna ∞ nebo $-\infty$, nazývá se *nevlastní derivace v bodě* x_0. Je-li $f'(x_0)$ reálné číslo, říkáme, že má funkce f *vlastní derivaci v bodě* x_0.

Protože je pojem derivace funkce v bodě definován prostřednictvím limity, byly zavedeny také pojmy *jednostranné derivace funkce v bodě*; jejich vztah je obdobný jako v případě limit funkcí.

Definice 38 .

- Nechť je f definována na nějakém pravém okolí bodu $x_0 \in D_f$. Existuje-li limita
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$
nazývá se *derivace funkce* f *v bodě* x_0 *zprava* a značí se nejčastěji jako $f'_+(x_0)$.

- Nechť je f definována na nějakém levém okolí bodu $x_0 \in D_f$. Existuje-li limita
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
nazývá se *derivace funkce f v bodě x_0 zleva* a značí se nejčastěji jako $f'_-(x_0)$.

- Derivace zprava a zleva v bodě x_0 se souhrnně nazývají *jednostranné derivace funkce f v bodě x_0*.

Z definice derivace funkce v bodě a z vlastností limit přímo vyplývá následující tvrzení.

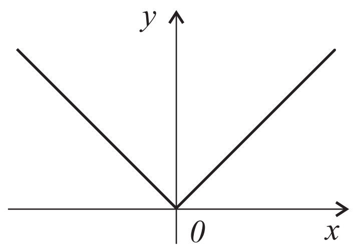
Věta 17 *Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když má v bodě x_0 obě jednostranné derivace, pro které navíc platí, že $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.*

V následující větě je shrnuto, jaká je souvislost mezi spojitostí funkce v bodě a existencí derivace.

Věta 18 (Vztah mezi spojitostí a derivací v bodě) *Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, potom je v bodě x_0 spojitá.*

Na následujících protipříkladech si ukážeme, že obrácená věta neplatí, a také, že předpoklad existence *vlastní derivace* je nutný.

Příklad 22 Dokažte, že ačkoli je funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0 spojitá, nemá v tomto bodě derivaci.
Řešení: Z grafu funkce $f(x) = |x|$ je zřejmé, že je tato funkce spojitá na celém svém $D_f = \mathbb{R}$.



Obrázek 27: Graf funkce $f(x) = |x|$.

Pro důkaz neexistence derivace v bodě 0 nejprve vypočítáme obě jednostranné derivace v tomto bodě:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

protože pro $h < 0$ je $|h| = -h$.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

protože pro $h > 0$ je $|h| = h$. Jednostranné derivace v bodě 0 se nerovnají, a tudíž (dle věty 17) nemá funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0 derivaci, i když je v tomto bodě spojitá.

Příklad 23 Dokažte, že i když má funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0 derivaci, není v tomto bodě spojitá (protože není tato derivace vlastní).

Řešení: Z grafu funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je zřejmé, že není spojitá v bodě 0. Pro výpočet derivace v bodě 0 nejprve vypočítáme obě jednostranné derivace v tomto bodě:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} h - \operatorname{sgn} 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{h} = \infty,$$

protože pro $h < 0$ je $\operatorname{sgn} h = -1$.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} h - \operatorname{sgn} 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} = \infty,$$

protože pro $h > 0$ je sgn $h = 1$. Obě jednostranné derivace v bodě 0 se tedy rovnají ∞, z čehož vyplývá, že $f'(0) = \infty$. Přesto není funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ v tomto bodě spojitá.

4.2 Tečna ke grafu funkce

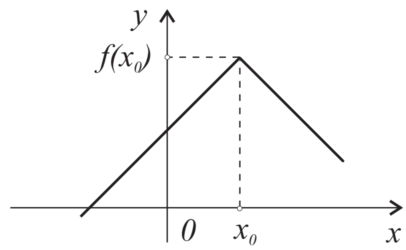
Jak jsme si již naznačili, je z geometrického hlediska derivace funkce f v bodě x_0 *směrnicí tečny* sestrojené v bodě $(x_0, f(x_0))$ ke grafu funkce f. V této kapitole se budeme vztahem mezi derivací a tečnou zabývat podrobněji.

Věta 19 (Rovnice tečny) *Nechť f je spojitá v bodě x_0 a nechť má v bodě x_0 derivaci (vlastní nebo nevlastní). Potom existuje tečna ke grafu funkce f v bodě $T = (x_0, f(x_0))$. Tato tečna je dána rovnicí*

- $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, *pokud je $f'(x_0)$ vlastní,*
- $x = x_0$, *pokud je $f'(x_0)$ nevlastní.*

Speciálně pro $f'(x_0) = 0$ má rovnice tečny tvar $y = f(x_0)$.

Poznámka 21 Jestliže f *není* v x_0 *spojitá* nebo v x_0 *neexistuje derivace*, potom v bodě T *neexistuje tečna*. Z geometrického hlediska poznáme, že v x_0 neexistuje derivace, a tedy ani tečna v bodě T, podle toho, že má graf funkce f v bodě T hrot (viz obr. 28).



Obrázek 28: Graf funkce f nemající v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu (tj. ani derivaci).

4.3 Derivace funkce na množině

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s derivací funkce v jednom konkrétním bodě x_0. Jestliže má funkce f vlastní derivaci v každém bodě nějaké podmnožiny svého definičního oboru, můžeme definovat na této podmnožině novou funkci f' následujícím způsobem:

Definice 39 Nechť M_1 je neprázdná množina všech bodů z D_f, v nichž má f vlastní derivaci. Potom funkci f', která každému $x_0 \in M_1$ přiřadí reálné číslo $f'(x_0)$ definované předpisem (2), nazýváme *derivací funkce* f na množina M_1.

Je důležité si uvědomit, že f' (tj. derivace funkce f) je *funkce*, zatímco $f'(x_0)$ (tj. derivace funkce f v bodě x_0) je *číslo.*

Poznámka 22 Funkce f' se také značí jako $\frac{df}{dx}$ nebo $\frac{d(f(x))}{dx}$.

Pro funkce, které mají spojitou derivaci, byl zaveden speciální pojem – funkce *hladké.*

Definice 40 Funkce f se nazývá *hladká na množině* M*,* jestliže je její derivace f' na M spojitá.

Je-li f hladká na M, znamená to, že existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in M$. To znamená, že v každém bodě na grafu lze sestrojit tečnu a graf funkce f nemá na M „hroty“.

4.4 Derivace elementárních funkcí

Abychom mohli derivace funkce snadněji vypočítat, byly na základě teoretického předpisu (2) z definice derivace funkce v bodě odvozeny následující vzorce pro derivování základních elementárních funkcí.

4.4.1 Vzorce pro výpočet derivací základních elementárních funkcí

$$
\begin{aligned}
(a)' &= 0 && a \in \mathbb{R} \\
(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} && n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \\
(x^\alpha)' &= \alpha \cdot x^{\alpha-1} && \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+ \\
(e^x)' &= e^x && x \in \mathbb{R} \\
(a^x)' &= a^x \cdot \ln a && a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R} \\
(\ln x)' &= \tfrac{1}{x} && x \in \mathbb{R}^+ \\
(\log_a x)' &= \tfrac{1}{x \cdot \ln a} && a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R}^+ \\
(\sin x)' &= \cos x && x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x && x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &= \tfrac{1}{\cos^2 x} && x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
(\operatorname{cotg} x)' &= -\tfrac{1}{\sin^2 x} && x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} && x \in (-1,1) \\
(\arccos x)' &= -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} && x \in (-1,1) \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \tfrac{1}{1+x^2} && x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arccotg} x)' &= -\tfrac{1}{1+x^2} && x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Na následujícím příkladu si ukážeme, jakým způsobem byly odvozeny tři nejjednodušší vzorce – vzorec $(a)' = 0$ pro derivování konstanty a vzorce $(x)' = 1$ a $(x^2)' = 2x$ pro derivování funkce x^n pro $n = 1$ a $n = 2$.

Příklad 24 Pomocí definice derivace funkce v bodě dokažte platnost vzorců

$$(a)' = 0 \text{ pro každé } a \in \mathbb{R},$$

$$(x^1)' = 1 \text{ pro každé } x \in \mathbb{R},$$

$$(x^2)' = 2x \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Označme $f(x) = a$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dle definice 37 derivace funkce v bodě pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$(a)' = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

čímž je dokázáno, že derivace libovolné konstanty je rovna 0.

Označme $g(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dle definice 37 derivace funkce v bodě pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$(x)' = g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

čímž je dokázáno, že $(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Označme $k(x) = x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dle definice 37 derivace funkce v bodě pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$(x^2)' = k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x,$$

čímž je dokázáno, že $(x^2)' = 2x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

4.4.2 Výpočet derivací

Pro výpočet derivací elementárních funkcí se používají kromě vzorců pro derivace základních elementárních funkcí také věty o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí a věty o derivaci složené a inverzní funkce.

Věta 20 *Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na množině M. Potom mají na M vlastní derivace také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (poslední pouze pokud $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$) a platí*

$$\begin{aligned} (i) \quad (f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x), \\ (ii) \quad (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \\ (iii) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Ze vzorce pro derivování součinu a vzorce pro derivování konstanty plyne, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ a každé $x \in M$ navíc platí

$$(iv) \quad (a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x).$$

Poznámka 23 Výše uvedené vzorce můžeme stručně zformulovat takto:

(i) Derivace součtu (rozdílu) je rovna součtu (rozdílu) derivací.

(*ii*) Derivace součinu je první derivovaná krát druhá opsaná plus první opsaná krát druhá derivovaná.

(*iii*) Derivace podílu je derivovaný čitatel krát nederivovaný jmenovatel mínus nederivovaný čitatel krát derivovaný jmenovatel lomeno jmenovatel na druhou.

(*iv*) Derivace součinu konstanty a funkce je rovna součinu konstanty a derivace funkce.

Příklad 25 Určete derivaci funkce f a definiční obory funkcí f a f'.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x - \frac{1}{x} + \ln x$.

Řešení: Aby se nám funkce f lépe derivovala, přepíšeme její funkční předpis takto:

$$f(x) = 2x^3 + 3x - x^{-1} + \ln x.$$

Definičním oborem funkce f je množina $D_f = (0, \infty)$. Pro výpočet f' použijeme vzorce pro výpočet derivací elementárních funkcí a větu o součtu:

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 3x^0 - (-1)x^{-2} + \frac{1}{x} = 6x^2 + 3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Definiční obor derivace je roven definičnímu oboru původní funkce, tj. $D_{f'} = (0, \infty)$. Poznamenejme, že pokud bychom funkci f' nezískali jako derivaci funkce f, pak by jejím definičním oborem byla celá množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro definiční obory funkce a její derivace ale musí platit, že $D_{f'} \subset D_f$, protože nelze počítat derivaci funkce v bodě, v němž není samotná funkce definována, a proto je $D_{f'}$ roven pouze intervalu $(0, \infty)$.

b) $f(x) = \frac{3}{x^2} + \sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x}$.

Řešení: Aby se nám funkce f lépe derivovala, přepíšeme její funkční předpis takto:

$$f(x) = 3x^{-2} + x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{3}}.$$

Definičním oborem funkce f je množina $D_f = (0, \infty)$. Pro výpočet f' použijeme opět vzorce pro výpočet derivací elementárních funkcí a větu o součtu:

$$f'(x) = 3 \cdot (-2)x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{6}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Definiční obor derivace je roven definičnímu oboru původní funkce, tj. $D_{f'} = (0, \infty)$.

c) $f(x) = (1 + \sqrt[5]{x}) \cdot \sin x$.

Řešení: Aby se nám funkce f lépe derivovala, přepíšeme její funkční předpis takto:

$$f(x) = (1 + x^{\frac{1}{5}}) \cdot \sin x.$$

Funkce f je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tudíž $D_f = \mathbb{R}$. Pro výpočet f' použijeme vzorce pro výpočet derivací elementárních funkcí a větu o součinu:

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \cdot \sin x + (1 + x^{\frac{1}{5}}) \cdot \cos x = \frac{\sin x}{5\sqrt[5]{x^4}} + (1 + x^{\frac{1}{5}}) \cdot \cos x.$$

Definiční obor derivace je v tomto případě menší než je definiční obor původní funkce, protože f' není definována pro $x = 0$, tj. $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+4}$.

Řešení: Definičním oborem funkce f je množina $D_f = \mathbb{R}$. Pro výpočet f' použijeme vzorce pro výpočet derivací elementárních funkcí a větu o podílu:

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot (x^2 + 4) - \cos x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2}.$$

Definiční obor derivace je roven definičnímu oboru původní funkce, tj. $D_{f'} = \mathbb{R}$.

Při výpočtu derivací se velmi často setkáme s funkcemi složenými. Návod, jak tyto funkce derivovat, nám dává následující věta.

Věta 21 (Derivace složené funkce) *Nechť g má vlastní derivaci v bodě x_0 a nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $g(x_0)$. Potom složená funkce $f \circ g$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Příklad 26 Určete derivaci funkce F a její definiční obor.

a) $F(x) = \cos(x^2 + 1)$.

Řešení: Funkce F je složená z vnější funkce $f(x) = \cos x$ a z vnitřní funkce $g(x) = = x^2 + 1$, proto ji musíme derivovat jako funkci složenou:

$$F'(x) = -\sin(x^2 + 1) \cdot 2x = -2x \cdot \sin(x^2 + 1).$$

Definičním oborem funkce F i její derivace je množina $\mathbb{R}$, tj. $D_F = D_{F'} = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$.

Řešení: Funkce F je složená z vnější funkce $f(x) = \ln x$ a z vnitřní funkce $g(x) = = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, proto ji musíme derivovat jako funkci složenou:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}, \text{ pro každé } x \in D_F = D_{F'} = (0, \infty).$$

4.5 Derivace vyšších řádů

Přesná definice derivací vyšších řádů je uvedena níže, ale princip výpočtu těchto derivací lze zhruba popsat následovně: První derivace f' funkce f

je funkce, která je definovaná na podmnožině definičního oboru funkce f. Vzhledem k tomu, že f' je opět funkce, má smysl ji (ve smyslu definice 37 a definice 39) znovu derivovat. Derivováním funkce f' získáme novou funkci, označovanou jako f'', kterou nazýváme druhou derivací funkce f. Jejím definičním oborem je množina všech bodů, v nichž má funkce f' vlastní derivaci. Samozřejmě i druhou derivaci můžeme znovu derivovat a postupným derivováním pak získat derivaci libovolného řádu.

Definice 41 .

1. Nechť má funkce f pro každé $x \in M_1$ vlastní derivaci. Funkce f', která každému $x_0 \in M_1$ přiřadí číslo $f'(x_0)$ se nazývá *první derivace funkce* f nebo *derivace prvního řádu funkce* f.

2. Nechť $M_2 \subset M_1$ je neprázdná množina všech bodů, v nichž má funkce f' vlastní derivaci. Potom se funkce f'', která každému $x_0 \in M_2$ přiřadí číslo $(f')'(x_0)$, nazývá *druhá derivace funkce* f nebo *derivace druhého řádu funkce* f. Funkce f'' má definiční obor M_2 a značí se také $f^{(2)}$ nebo $\frac{d^2f}{dx^2}$.

3. Nechť $M_3 \subset M_2$ je neprázdná množina všech bodů, v nichž má funkce f'' vlastní derivaci. Potom se funkce f''', která každému $x_0 \in M_3$ přiřadí číslo $(f'')'(x_0)$, nazývá *třetí derivace funkce* f nebo *derivace třetího řádu funkce* f. Funkce f''' má definiční obor M_3 a značí se také $f^{(3)}$ nebo $\frac{d^3f}{dx^3}$.

...

n. Nechť $n \geq 2$ a nechť $M_n \subset M_{n-1}$ je neprázdná množina všech bodů, v nichž má funkce $f^{(n-1)}$ vlastní derivaci. Potom se funkce $f^{(n)}$, která každému $x_0 \in M_n$ přiřadí číslo $(f^{(n-1)})'(x_0)$, nazývá *n-tá derivace* *funkce f* nebo *derivace n-tého řádu funkce f*. Funkce $f^{(n)}$ má definiční obor M_n a značí se také $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Derivaci n-tého řádu tedy získáme tak, že zderivujeme $(n-1)$-ní derivaci. Např. třetí derivaci vypočítáme tak, že nejprve spočítáme derivaci první a tu znovu zderivujeme, čímž dostaneme derivaci druhou. Jejím dalším derivováním pak získáme hledanou třetí derivaci.

Dosadíme-li do funkce $f^{(n)}(x)$ za x číslo $x_0 \in M_n$, získáme hodnotu n-té derivace v bodě x_0.

Definice 42 Číslo $f^{(n)}(x_0)$ nazveme *derivací n-tého řádu funkce f v bodě x_0*.

Poznámka 24 Jinak lze derivaci n-tého řádu funkce f v bodě $x_0 \in M_n$ opět definovat pomocí limity, tj. jako

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

Poznámka 25 Nechť $n \geq 2$. Má-li funkce f vlastní n-tou derivaci v bodě x_0, pak má f v bodě x_0 také vlastní derivaci všech nižších řádů a je v bodě x_0 spojitá.

Příklad 27 Určete 4. derivaci funkce $f(x) = 3x^4 - x^2 + 1$ a její definiční obor.

Řešení: Definičním oborem funkce f je množina $\mathbb{R}$. První derivaci funkce f získáme jednoduše použitím vzorců pro výpočet derivací elementárních funkcí a pravidla pro derivování součtu:

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 2x = 12x^3 - 2x.$$

Definičním oborem funkce f' je opět množina $\mathbb{R}$. Druhou derivaci funkce f získáme derivováním první derivace:

$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 - 2 = 36x^2 - 2.$$

Definičním oborem funkce f'' je opět množina $\mathbb{R}$. Derivováním druhé derivace získáme derivaci třetí:

$$f'''(x) = 36 \cdot 2x = 72x$$

a jejím následným zderivováním hledanou derivaci čtvrtou:

$$f^{(4)}(x) = 72.$$

Definičním oborem třetí i čtvrté derivace je opět celá množina $\mathbb{R}$, tj. $D_{f'''} = D_{f^{(4)}} = \mathbb{R}$.

Na závěr této kapitoly se vraťme k počáteční motivaci k zavedení pojmu derivace, kde byly zkoumány dvě úlohy – úloha o okamžité rychlosti a úloha o tečně.

Prozkoumejme znovu úlohu o okamžité rychlosti a zkusme najít možnou interpretaci derivace druhého řádu. Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce. Jeho poloha je závislá na čase, ve kterém polohu zjišťujeme. Dráha s, kterou bod urazil za čas t se dá vyjádřit jako funkce $s = f(t)$. Budeme-li chtít zjistit okamžitou rychlost tohoto bodu v konkrétním čase t_0, stačí spočítat první derivaci funkce f v bodě t_0. Budeme-li chtít určit změnu rychlosti v čase t_0, spočítáme druhou derivaci funkce f v bodě t_0. Změna rychlosti v konkrétním čase t_0, a tedy druhá derivace funkce f v bodě t_0, se z fyzikálního hlediska nazývá *okamžité zrychlení v čase* t_0.

Geometrickou interpretací druhé derivace se budeme zabývat v kapitole týkající se průběhu funkce.

4.6 L'Hospitalovo pravidlo

V kapitole věnované limitám funkce jsme se zmínili o tom, že se výpočet některých limit provádí nejsnáze pomocí tzv. l'Hospitalova pravidla. Toto pravidlo se nejčastěji používá u limit typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Věta 22 (l'Hospitalovo pravidlo) *Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na nějakém $\mathcal{U}^*(c)$, kde $c \in \mathbb{R}^*$. Nechť dále platí*

1. *buď*
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0,$$
nebo
$$\lim_{x\to c} |g(x)| = \infty$$
(*o limitě $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ v tomto případě nepředpokládáme nic, ani její existenci*),

2. *existuje limita* (*vlastní nebo nevlastní*)
$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom existuje také limita
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textit{a platí} \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Je důležité si uvědomit, že funkci $\frac{f(x)}{g(x)}$ nederivujeme jako podíl, ale čitatel i jmenovatel derivujeme zvlášť.

L'Hospitalovo pravidlo nelze použít, pokud nejsou předpoklady věty splněny, je proto nutné je vždy nejprve ověřit.

Poznámka 26

- L'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity.

- L'Hospitalovo pravidlo lze použít i vícekrát po sobě.
- Použití l'Hospitalova pravidla budeme dále značit $l'H$.

Příklad 28 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x+3}$.

Řešení: Po „dosazení“ ∞ za x získáme neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$, můžeme tedy pro výpočet dané limity použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x+3} = „\frac{\infty}{\infty}“ \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{1} = \infty.$$

Příklad 29 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Řešení: Po „dosazení“ 2 za x získáme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, můžeme tedy pro výpočet dané limity použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = „\frac{0}{0}“ \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2x-1} = \frac{4}{3}.$$

Příklad 30 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-1+\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

Řešení: Po „dosazení“ $\frac{\pi}{2}$ za x získáme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, můžeme tedy pro výpočet dané limity použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-1+\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = „\frac{0}{0}“ \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = „\frac{0}{0}“ \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Neurčité výrazy jiných typů než $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{cokoliv}{\pm\infty}$ musíme před použitím l'Hospitalova pravidla nejprve na některý z uvedených typů převést. Způsoby, jakými se tento „převod“ nejčastěji provádí si ilustrujeme na následujících příkladech.

Příklad 31 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \cdot \ln x$.

Řešení: Po „dosazení“ 0^+ za x získáme neurčitý výraz $0\cdot(-\infty)$, přímo tedy l'Hospitalovo pravidlo nemůžeme použít; nejprve je nutné funkci, která je ve tvaru součinu, převést na podíl. Teprve poté, budou-li předpoklady pravidla splněny, jej můžeme aplikovat:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \cdot \ln x = „0 \cdot (-\infty)“ = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = „\frac{-\infty}{\infty}“ \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0.$$

Příklad 32 Vypočtěte $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

Řešení: Po „dosazení“ 0^+ za x získáme neurčitý výraz $\infty - \infty$, a přímo tedy l'Hospitalovo pravidlo opět nemůžeme aplikovat; nejprve je nutné funkci, která je ve tvaru rozdílu, převést na podíl. Budou-li předpoklady pravidla poté splněny, můžeme jej využít:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = „\infty - \infty“ = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = „\frac{0}{0}“ =$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cdot \cos x} = „\frac{0}{0}“ \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \cdot \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Jestliže neexistuje $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, neznamená to, že neexistuje $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, jen ji nelze pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítat. Konkrétně si tuto situaci ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 33 Vypočtěte $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+1}$.

Řešení: Po „dosazení“ ∞ za x získáme neurčitý výraz $\frac{\infty + \text{ neexistuje}}{\infty}$, a l'Hospitalovo pravidlo tedy můžeme zkusit aplikovat:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x + 1} = „\frac{\infty + \text{ neexistuje}}{\infty}“ \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \text{ neexistuje.}$$

Neexistence limity $\lim_{x\to\infty} (1 + \cos x)$ neznamená, že neexistuje původní limita $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+1}$, jen ji nelze pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítat. Pro její výpočet použijeme vytýkání a tvrzení věty o součinu dvou funkcí, z nichž je jedna omezená a druhá má nulovou limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x} \cdot \sin x)}{x(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} \cdot \sin x}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

V některých případech lze sice l'Hospitalovo pravidlo použít, efektivnější je však zvolit jinou metodu. V následujícím příkladu bychom l'Hospitalovo pravidlo např. museli aplikovat padesátkrát, než bychom se dostali k výsledku. Proto je podstatně rychlejší vypočítat danou limitu pomocí vytýkání a krácení, přestože jsou všechny předpoklady l'Hospitalova pravidla splněny.

Příklad 34 Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{52}+x}{-2x^{50}+x^{49}+x^2+5}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{52}+x}{-2x^{50}+x^{49}+x^2+5} = „\frac{\infty}{\infty}“ = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{50}(x^2+\frac{1}{x^{49}})}{x^{50}(-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{48}}+\frac{5}{x^{50}})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\frac{1}{x^{49}}}{-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{48}}+\frac{5}{x^{50}}} = \frac{\infty}{-2} == -\infty.$$

4.7 Aproximace funkce polynomem

V praktických aplikacích jsou někdy vztahy mezi nezávisle proměnnou x a závisle proměnnou y vyjádřeny pomocí velmi složitých předpisů. Z toho důvodu vznikla potřeba danou složitou funkci popisující vztahy mezi proměnnými v okolí určitého bodu x_0 nahradit (aproximovat) funkcí jednodušší, jejíž hodnoty lze snadno vypočítat, a s níž se lépe pracuje.

Aproximace funkce se také využívá v případech, kdy neznáme funkční předpis popisující vztahy mezi proměnnými a pokud máme k dispozici pouze experimentálním měřením získané funkční hodnoty a hodnoty derivace v určitém bodě.

V této kapitole si ukážeme, jak aproximující funkci zvolit, aby bylo nahrazení v okolí určitého bodu x_0 co nejpřesnější. Budeme se zabývat situací nejjednodušší – funkci budeme nahrazovat polynomem prvního stupně, tedy funkcí lineární.

4.7.1 Diferenciál

Jak jsme již zmínili v úvodním odstavci, nejjednodušší je aproximace pomocí polynomu 1. stupně. V tomto případě nejlepší aproximaci funkce f v okolí daného bodu x_0 získáme, pokud funkci aproximujeme tečnou ke grafu funkce f sestrojenou v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak má rovnice tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ tvar $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Pro funkční hodnotu $f(x)$, kde $x = x_0 + h$ je dostatečně blízko bodu x_0, platí, že

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{3}$$

(ekvivalentně $f(x_0+h) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot h$). Symbolem $\approx$ značíme přibližnou rovnost.

Přírůstek funkce (diference) $f(x_0 + h) - f(x_0)$ je tedy přibližně roven hodnotě $f'(x_0) \cdot h$, kterou nazýváme *diferenciálem funkce f v bodě x_0* nebo *diferenciálem prvního řádu funkce f v bodě x_0*. Diferenciál funkce f v bodě x_0 označujeme $df(x_0)$, tj.

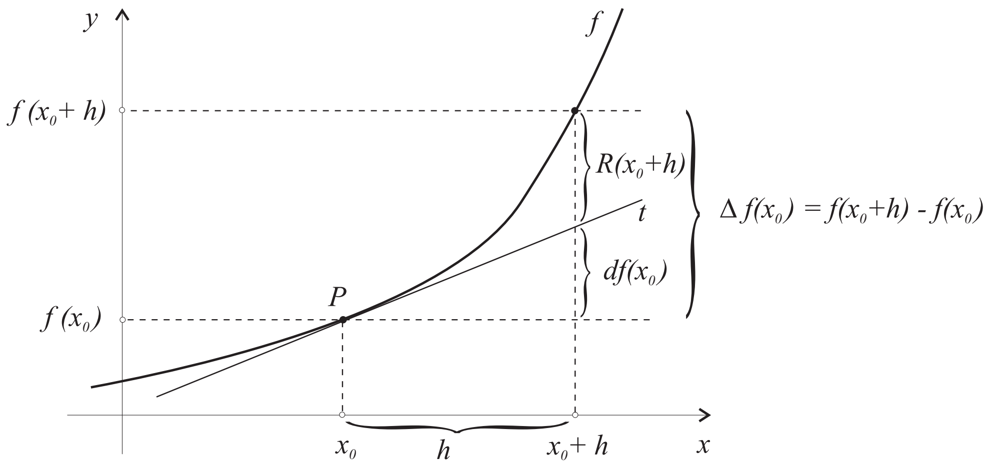
$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h.$$

Skutečný přírůstek funkce $f(x_0+h)-f(x_0)$ se však obvykle od diferenciálu funkce f v bodě x_0 liší. Velikost chyby, které se dopustíme, když skutečný přírůstek funkce f nahradíme diferenciálem funkce f v bodě x_0, se označuje jako chyba aproximace a značí se $R(x_0 + h)$. Platí tedy, že

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0) + R(x_0 + h).$$

Nejběžnější aplikace diferenciálu spočívá v tom, že (pro malá h, tj. pro x blízká x_0) klademe

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0),$$



Obrázek 29: Aproximace funkce tečnou a diferenciál funkce v bodě.

tj. skutečný přírůstek funkce aproximujeme diferenciálem (viz také obr. 29).

Poznámka 27

- Poznamenejme, že diferenciál funkce f v bodě x_0 je lineární funkce závisející na proměnné h.
- Při zápisu diferenciálu funkce f v bodě x_0 se výraz $h = x - x_0$ často značí jako dx, tj.
$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx.$$
- Z výše uvedeného vyplývá, že existence diferenciálu funkce f v bodě x_0 je ekvivalentní s existencí vlastní derivace $f'(x_0)$. Proto často říkáme „f je diferencovatelná v bodě x_0“ místo „f má vlastní derivaci v bodě x_0“.

Nyní si na konkrétním příkladu ukážeme, jak lze pomocí popsaného postupu určit přibližně funkční hodnoty dané funkce.

Příklad 35 Určete přibližně hodnotu $\ln 1,2$ bez použití kalkulačky.

Řešení: Pro výpočet použijeme vztah (3); číslo x_0 přitom volíme tak, aby bylo „blízko“ čísla $1,2$ a přitom takové, abychom byli schopni vypočítat $\ln x_0$ bez použití kalkulačky.

Definujme $f(x) = \ln x$ a $x_0 = 1$. Poté $f'(x) = \frac{1}{x}$ a

$$\ln\, 1,2 \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = \ln\, 1 + \frac{1}{1}(1,2 - 1) = 0,2.$$

Skutečná hodnota $\ln 1,2$ je přitom $0,1823\ldots$

Poznámka 28 Je zřejmé, že výpočet přibližných funkčních hodnot pomocí výše uvedeného postupu je v dnešní době kalkulaček poněkud archaický. Nicméně dobře ilustruje princip, na jehož základě počítače a kalkulačky počítají hodnoty některých funkcí.

Pojmy k zapamatování:

- derivace funkce v bodě
- jednostranné derivace funkce v bodě
- tečna ke grafu funkce
- derivace funkce
- derivace vyšších řádů
- l'Hospitalovo pravidlo
- diferenciál

Příklady k procvičení:

1. Vypočítejte derivaci funkce $f(x)$ a výsledek upravte.

   a) $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$ b) $f(x) = \sqrt{\cos(4x)}$ c) $f(x) = \mathrm{tg}(2x)$
   d) $f(x) = \mathrm{arctg}(3x)$ e) $f(x) = \sqrt{\ln(\sqrt{x})}$ f) $f(x) = \cos(x^3)$
   g) $f(x) = \cos^3 x$ h) $f(x) = (x + \sqrt{\pi}) \cdot \sqrt{\sin x}$
   ch) $f(x) = (x^3 + e^2) \cdot \ln x$ i) $f(x) = \sqrt[5]{x^2} \cdot e^{3x}$ j) $f(x) = \frac{\ln(5x)}{\ln 3 - \sqrt{e}}$
   k) $f(x) = \frac{1}{(x^3-\pi)^2}$ l) $f(x) = \frac{x \cdot e^x}{1-x^4}$ m) $f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}$

2. Vypočítejte derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0.

   a) $f(x) = \sqrt{1 - \cos x},\ x_0 = -\frac{\pi}{2}$ b) $f(x) = \ln^2 x,\ x_0 = e$
   c) $f(x) = \frac{2^x}{x^2},\ x_0 = 1$ d) $f(x) = (\ln\sqrt{2} + \sin(2x)) \cdot e^{\cos x},\ x_0 = \pi$

3. Vypočítejte druhou derivaci funkce $f(x)$ a výsledek upravte.

   a) $f(x) = x \cdot \ln x$ b) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ c) $f(x) = \cos(\sin x)$

4. Vypočítejte limity pomocí l'Hospitalova pravidla.

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{x-\pi}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot\ln x$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\cdot\ln x}{x^3+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln(\frac{x+1}{x})$

5. Pomocí prvního diferenciálu určete přibližně hodnotu:

a) $\sqrt[3]{7,5}$ b) $\sin 0,02$ c) $\ln^2 0,8$

Výsledky příkladů k procvičení:

1. a) $f'(x) = \cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$ b) $f'(x) = -\frac{2\sin(4x)}{\sqrt{\cos(4x)}}$

c) $f'(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)}$ d) $f'(x) = \frac{3}{1+9x^9}$ e) $f'(x) = \frac{1}{4x\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}$

f) $f'(x) = -3x^2\cdot\sin(x^3)$ g) $f'(x) = -3\cos^2 x\cdot\sin x$

h) $f'(x) = \sqrt{\sin x} + \frac{(x+\sqrt{\pi})\cdot\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ ch) $f'(x) = 3x^2\cdot\ln x + x^2 + \frac{e^2}{x}$

i) $f'(x) = \frac{2e^{3x}}{5\sqrt[5]{x^3}} + 3\sqrt[5]{x^2}\cdot e^{3x}$ j) $f'(x) = \frac{1}{(\ln 3-\sqrt{e})x}$

k) $f'(x) = -\frac{6x^2}{(x^3-\pi)^3}$ l) $f'(x) = \frac{e^x\cdot\left(1+x+3x^4-x^5\right)}{(1-x^4)^2}$

m) $f'(x) = -\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x\cdot\ln(\cos x)}{\sin^2 x}$

2. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{e}$ c) $2(\ln 2-2)$ d) $\frac{2}{e}$

3. a) $f''(x) = \frac{1}{x}$ b) $f''(x) = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$

c) $f''(x) = -\cos(\sin x)\cdot\cos^2 x + \sin(\sin x)\cdot\sin x$

4. a) 0 b) $-\frac{1}{\pi}$ c) 0 d) 0 e) $\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{2}$ g) 1

5. a) $\frac{47}{24} = 1,958\overline{3}$ b) $0,02$ c) 0