ZÁKLADY MATEMATICKÉ ANALÝZY PRO FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

STUDIJNÍ OPORA PRO PŘEDMĚT YDIP

doc. RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., 2022

Obsah

Úvod

Matematická analýza jako samostatná disciplína vznikla kolem roku 1670, kdy nezávisle na sobě anglický fyzik Isaac Newton a německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz položili základy *diferenciálního* a *integrálního počtu*. Pomocí matematické analýzy se následně podařilo vyřešit mnoho fyzikálních a technických problémů, které se do té doby zdály být „neřešitelné“. Práce obou zakladatelů diferenciálního a integrálního počtu navazovaly na řadu předchůdců. K nejvýznamnějším z nich patřili francouzští matematikové René Descartes a Pierre de Fermat, kteří stáli u zrodu *analytické geometrie*.

Leibnizovy metody převzali posléze bratři Jakob a Johann Bernoulliové a také Leonhard Euler. Další matematici, kteří se zasloužili o rozvoj matematické analýzy, byli např. Joseph Louis Lagrange, Bernard Bolzano, Karl Weierstrass nebo Augustin Louis Cauchy, který kolem roku 1820 zavedl pojem *limita funkce*, vybudoval teorii integrálu pro spojité funkce jedné proměnné a který je považován za tvůrce moderní matematické analýzy. O další pokrok v teorii integrálu se zasloužil německý matematik Bernard Riemann, jehož myšlenky následně upřesnil francouzský matematik Gaston Darboux.

Aplikace matematické analýzy nacházíme ve fyzice, chemii, ekonomii i v mnoha dalších odvětvích. Pomocí diferenciálního počtu lze např. vypočítat okamžitou *rychlost* nebo *zrychlení* hmotného bodu v konkrétním čase, známe-li funkci popisující dráhu, kterou bod urazil. Pomocí integrálního počtu lze např. vypočítat *obsahy rovinných útvarů, objemy rotačních těles* nebo *délky rovinných křivek*.

Cílem tohoto studijního textu je seznámit studenty se základy diferenciálního a integrálního počtu funkce jedné proměnné.

Text je doplněn celou řadou řešených příkladů, na nichž je probíraná teorie ilustrována. Pro procvičení jsou na konci každé kapitoly uvedeny také neřešené příklady s výsledky a pojmy k zapamatování.

Kromě teoretických příkladů studijní opora obsahuje také prakticky laděné příklady, které ukazují, jak se dá probíraná matematická teorie využít.

Student by měl po nastudování textu správně chápat pojem funkce, charakterizovat základní vlastnosti funkcí a určit definiční obory. Dále by měl dokázat vypočítat limity funkcí jedné proměnné a rozumět pojmu spojitosti funkce. Rovněž by měl umět definovat a vypočítat derivaci funkce a chápat její geometrický význam. Také by měl dokázat popsat, jaká je souvislost mezi primitivní funkcí a derivací, a používat základní integrační metody. Navíc by měl být schopen charakterizovat základní vlastnosti určitého integrálu a využít určité i nevlastní integrály pro výpočet obsahů ploch.

1 Funkce jedné proměnné

S funkcemi se setkáváme všude tam, kde zkoumáme závislost mezi dvěma nebo více veličinami, přičemž tyto veličiny se obecně mění a jsou mezi sebou vázány jistým vztahem. Pomocí funkcí se dá popsat každá situace, v níž jsou nějaký jev nebo veličina jednoznačně určeny jinými jevy nebo veličinami.

Funkce se užívají v technických, přírodních, ekonomických i jiných vědách, ale také v běžném životě. Například obsah kruhu je funkcí jeho poloměru, teplota zahřívané vody v hrnci je funkcí doby ohřevu, dráha ujetá autem je funkcí rychlosti a doby jízdy atd.

Závisí–li zkoumaný jev pouze na jedné veličině, hovoříme o funkci jedné proměnné, a tímto speciálním typem funkcí se budeme nyní zabývat.

1.1 Základní pojmy

Nejdříve zavedeme pojmy *funkce* a *graf funkce*.

Definice 1 Zobrazení f neprázdné množiny $A \subset \mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$ (zapisujeme $f\colon A \to \mathbb{R}$) se nazývá *reálná funkce jedné reálné proměnné* (zkráceně *funkce*). Skutečnost, že funkce f přiřazuje hodnotě $x \in A$ hodnotu $y \in \mathbb{R}$, zapisujeme jako $y = f(x)$.

Proměnná $x \in A$ se nazývá *argument funkce* f nebo *nezávisle proměnná*. Proměnná $y \in \mathbb{R}$ se nazývá *závisle proměnná*. Číslo $f(x)$ se nazývá *hodnota funkce* f *v bodě* $x \in A$ (neboli *funkční hodnota v bodě* x).

Definice 2 Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ je funkce. Množina A se nazývá *definiční obor funkce* f a značíme ji $D(f)$ nebo D_f. Množina $\{y \in \mathbb{R}; y = f(x), x \in A\}$ tj. množina všech funkčních hodnot funkce f, se nazývá *obor hodnot funkce* f a značíme ji $H(f)$ nebo H_f.

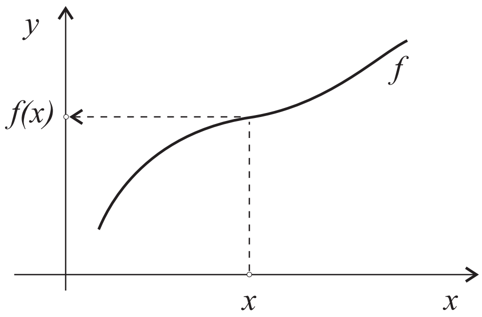
Funkce jedné proměnné f **je** tedy **předpis, který každé hodnotě** $x \in D_f$ **přiřazuje právě jednu hodnotu** $y = f(x) \in H_f$**. Musí přitom platit, že** $D_f \subset \mathbb{R}$ **i** $H_f \subset \mathbb{R}$

Definice 3 *Grafem funkce* f nazýváme množinu

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in D_f, y = f(x)\}.$$

Značíme ji $G(f)$ nebo G_f nebo graf f.

Grafem funkce f je tedy křivka v rovině o rovnici $y = f(x)$, kde $x \in D_f$.



Obrázek 1: Příklad grafu funkce.

Při určování definičních oborů využíváme vlastnosti základních elementárních funkcí, pravidla o skládání funkcí, o vytváření inverzních funkcí apod. (viz dále). Základními pravidly jsou:

- Ve jmenovateli zlomku nesmí být 0.
- Pod sudou odmocninou musí být výraz ≥ 0.
- Výraz, který logaritmujeme, musí být > 0.

Příklad 1 Určete definiční obory následujících funkcí:

a) $f(x) = \log(x^2 - x)$

Řešení: $x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) = D_f$

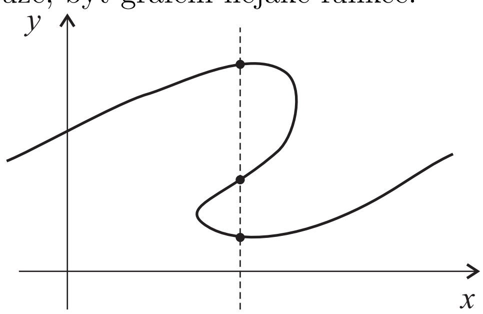
b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

Řešení: $25 - x^2 \geq 0$, tj. $x \in \langle -5, 5\rangle \;\Rightarrow\; D_f = \langle -5, 5\rangle$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

Řešení: $x - 3 \neq 0$, tj. $x \neq 3 \;\Rightarrow\; D_f = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

Při kreslení grafu funkce je nutné si uvědomit, jaká křivka může, resp. nemůže, být grafem nějaké funkce.



Křivka na obrázku nemůže být grafem žádné funkce, protože některým hodnotám proměnné x odpovídá více než jedna „funkční hodnota“. Jednoduše řečeno, aby křivka mohla být grafem funkce, může každá přímka rovnoběžná s osou y protnout tuto křivku nejvýše jednou (tj. buď právě jednou nebo vůbec).

1.2 Vlastnosti funkcí

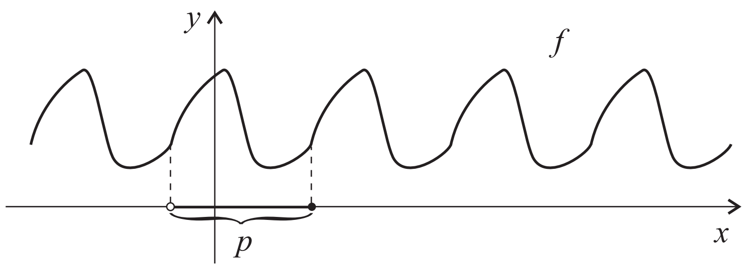
V této části představíme nejdůležitější vlastnosti funkcí jako je periodicita, omezenost, parita (sudost a lichost), prostota a monotonie.

Definice 4 Funkce f se nazývá *periodická*, jestliže existuje číslo $p \neq 0$ takové, že

a) $x \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad x + p \in D_f$;

b) $f(x+p) = f(x) \quad$ pro každé $x \in D_f$.

Číslo p se nazývá *perioda* funkce f. Nejmenší kladná perioda funkce f se nazývá *primitivní perioda* funkce f.

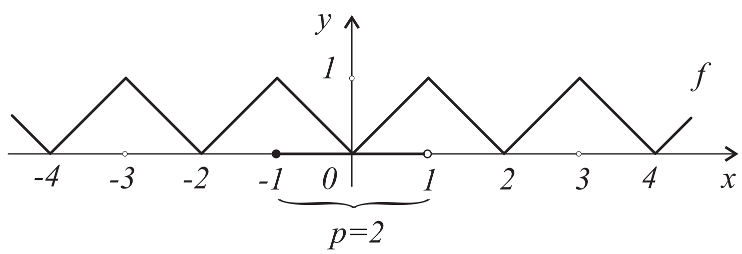


Obrázek 2: Graf periodické funkce s periodou p.

Při zkoumání vlastností periodické funkce se stačí omezit jen na libovolný polouzavřený interval délky p, kde p je primitivní perioda. Takový interval se nazývá *základní interval periodicity* této funkce.

Příklad 1 Sestrojte graf periodické funkce f, která je na základním intervalu periodicity $\langle -1, 1)$ definována jako $f(x) = |x|$.

Řešení: Protože je délka základního intervalu periodicity rovna 2, je funkce f periodická s primitivní periodou $p = 2$. Stačí tedy nakreslit graf jen na intervalu $\langle -1, 1)$ a dále jej „kopírovat“ vpravo a vlevo vždy po posunutí o 2 jednotky – viz následující obrázek.

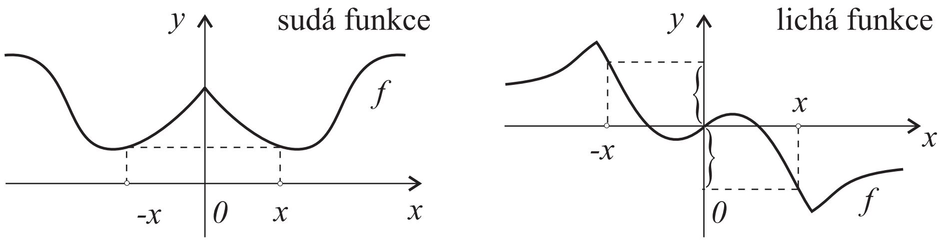


Definice 5 Nechť pro funkci f platí vztah $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$. Funkce f se nazývá

a) *sudá*, jestliže $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D_f$;

b) *lichá*, jestliže $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D_f$.

Definice požaduje, aby definiční obor sudé i liché funkce byl souměrný kolem počátku. Graf sudé funkce je osově souměrný kolem osy y a graf liché funkce je středově souměrný kolem počátku soustavy souřadnic (viz obr. 3).

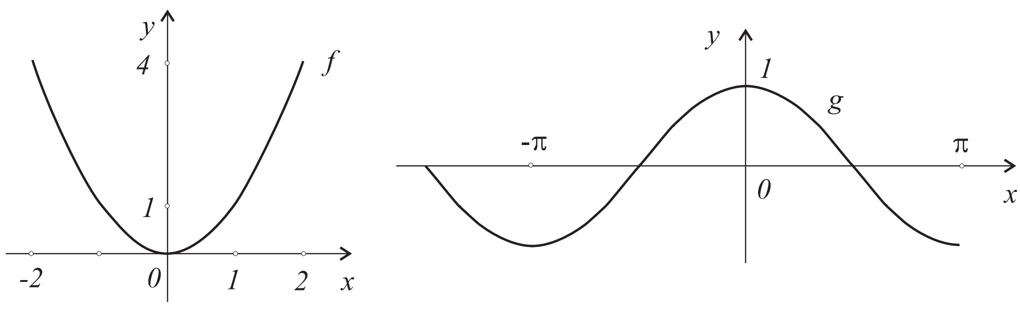


Obrázek 3: Graf sudé a liché funkce.

Příklad 2

a) Příklady sudých funkcí: $f(x) = x^2$ a $g(x) = \cos x$

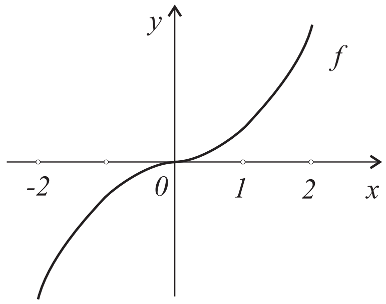
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$; $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$, $D_g = \mathbb{R}$

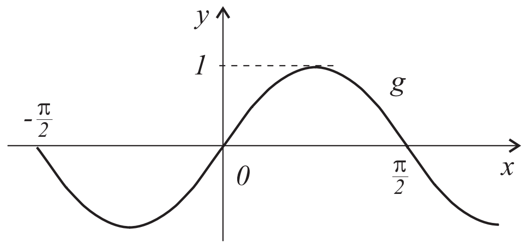


b) Příklady lichých funkcí: $f(x) = x^3$ a $g(x) = \sin 2x$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$;

$g(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -g(x)$, $D_g = \mathbb{R}$





c) Existují funkce, které jsou sudé i liché zároveň?

Ano, je jich nekonečně mnoho. Jejich funkční předpis je vždy $f(x) = 0$, liší se pouze definičním oborem. Například $f_1(x) = 0$, $D_{f_1} = \langle -2, 2 \rangle$ nebo $f_2(x) = 0$, $D_{f_2} = (-3, -1) \cup (1, 3)$.

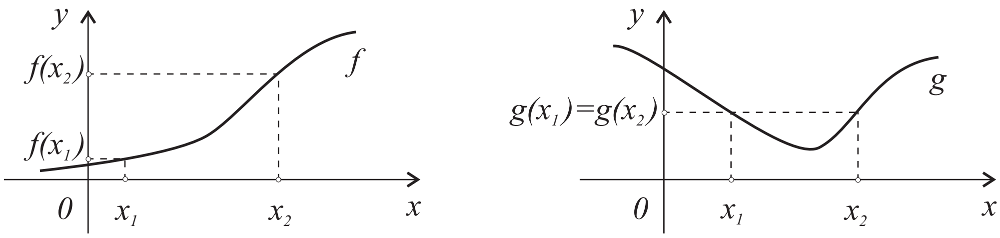
d) Funkce $f(x) = x^2$ na $\langle -1, 2 \rangle$ není sudá, protože není splněna podmínka z definice sudosti týkající se definičního oboru – ten musí být podle definice souměrný kolem počátku.

V následujících definicích a větách budeme uvažovat neprázdnou množinu $M \subset D_f$.

Definice 6 Funkce f se nazývá *prostá na množině* M, jestliže pro všechny dvojice $x_1, x_2 \in M$ platí

$$x_1 \neq x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2).$$

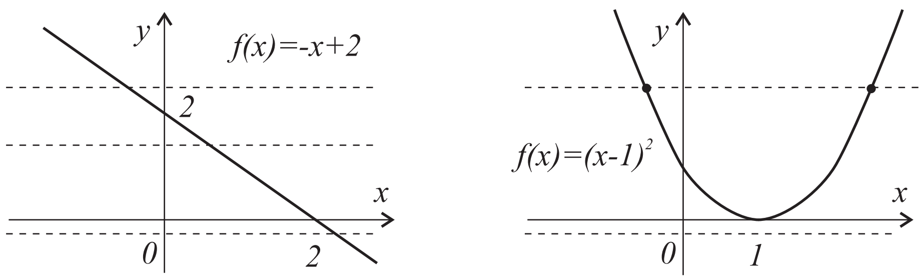
Jestliže je f prostá na množině M, potom každá rovnoběžka s osou x protíná graf funkce f nejvýše v jednom bodě - srovnejte s podmínkou, kdy je křivka grafem nějaké funkce.



Obrázek 4: Graf prosté funkce f a funkce g, která není prostá.

Příklad 3 Uvažujme funkci $f(x) = -x + 2$, $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f je prostá na svém definičním oboru, protože $\forall x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) = -x_1 + 2 \neq -x_2 + 2 = f(x_2)$ (viz také obr. 5).

Příklad 4 Uvažujme funkci $f(x) = (x-1)^2$, $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f není prostá na svém definičním oboru, protože například $2 \neq 0$, ale $f(2) = f(0) = 1$. Můžeme ale najít množinu $M \subset D_f$ tak, aby byla f na množině M prostá; například $M = (-\infty, 1\,\rangle$ nebo $M = \langle\, 1, \infty)$ (viz také obr. 5).

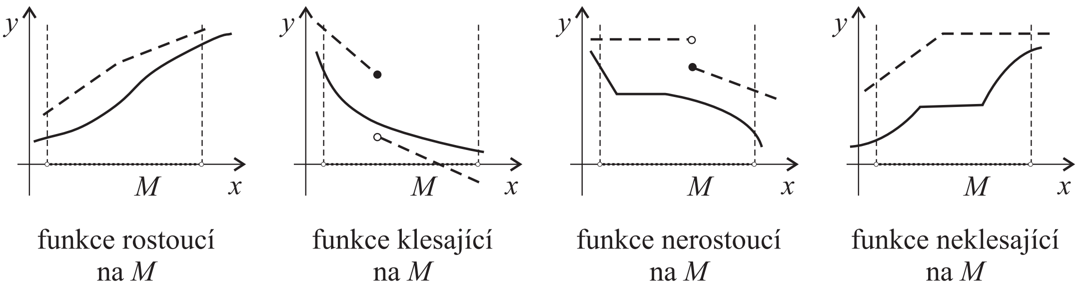


Obrázek 5: Grafy funkcí $f(x) = -x + 2$ a $f(x) = (x-1)^2$.

Definice 7 Jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí, že

$$\begin{pmatrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_1) \leq f(x_2) \end{pmatrix}, \text{ pak se funkce } f \text{ nazývá } \begin{pmatrix} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \\ \textit{nerostoucí} \\ \textit{neklesající} \end{pmatrix} \textit{ na } M.$$

Definice 8 Funkce, která je nerostoucí nebo neklesající na množině M, se nazývá *monotonní na množině M*. Funkce, která je rostoucí nebo klesající na množině M, se nazývá *ryze monotonní na množině M*.



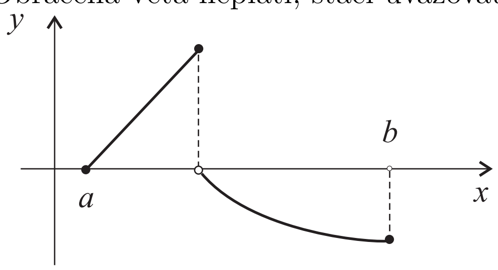
Obrázek 6: Příklady funkcí monotonních na M (na každém obrázku jsou znázorněny grafy dvou funkcí, jeden graf plnou čarou a druhý čárkovanou).

Přímo z definic je zřejmé, že

- každá rostoucí funkce je zároveň i neklesající, ale naopak to neplatí;
- každá klesající funkce je zároveň i nerostoucí, ale naopak to neplatí.

Věta 1 *Funkce, která je ryze monotonní (tj. rostoucí nebo klesající) na M, je prostá na M.*

Obrácená věta neplatí, stačí uvažovat například následující funkci:



Funkce je prostá na intervalu $\langle a, b\rangle$, ale není na tomto intervalu monotonní.

Definice 9 Funkce f se nazývá *konstantní na M*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.

Je-li f konstantní na M, pak existuje konstanta $a \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) = a$.

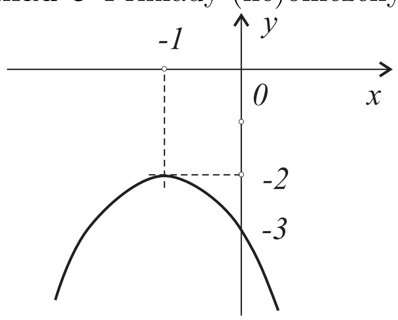
Z definice funkce konstantní na M plyne, že funkce konstantní na M je na M zároveň neklesající i nerostoucí.

Další důležitou vlastností, se kterou se setkáváme u funkcí, je *omezenost*.

Definice 10 Funkce f se nazývá

- *omezená shora na M*, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \leq k$ pro každé $x \in M$;
- *omezená zdola na M*, jestliže existuje $l \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \geq l$ pro každé $x \in M$;
- *omezená na M*, jestliže je na M omezená shora i zdola zároveň.

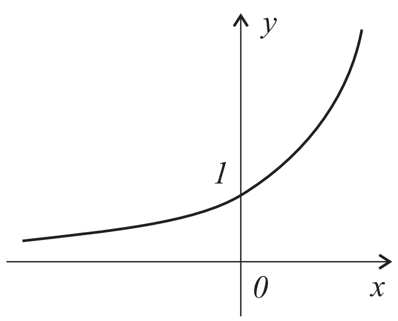
Příklad 5 Příklady (ne)omezených funkcí:



$f(x) = -(x+1)^2 - 2,\ D_f = \mathbb{R}$

f je omezená shora : $f(x) \leq -2\ \forall x \in D_f$

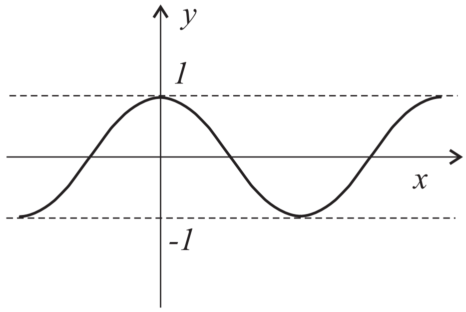
f není omezená zdola



$g(x) = \mathrm{e}^{2x},\ D_g = \mathbb{R}$

g je omezená zdola : $g(x) > 0\ \forall x \in D_g$

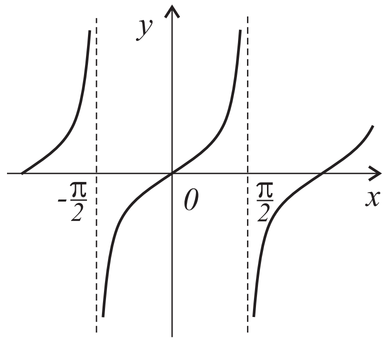
g není omezená shora



$h(x) = \cos x$, $D_h = \mathbb{R}$

h je omezená (shora i zdola) :

$|h(x)| \leq 1 \ \forall x \in D_h$



$q(x) = \operatorname{tg} x$, $D_q = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

q není omezená (ani shora ani zdola)

Poznámka 1 Některé vlastnosti funkcí jsme vztahovali jen k určité množině $M \subset D_f$ (monotonie, prostota), jiné k celému D_f (sudost, lichost, periodicita). Pokud $M = D_f$, uvádíme pouze danou vlastnost funkce, aniž dodáváme „na množině M“, například výrokem „f je rostoucí“ rozumíme „f je rostoucí na D_f“.

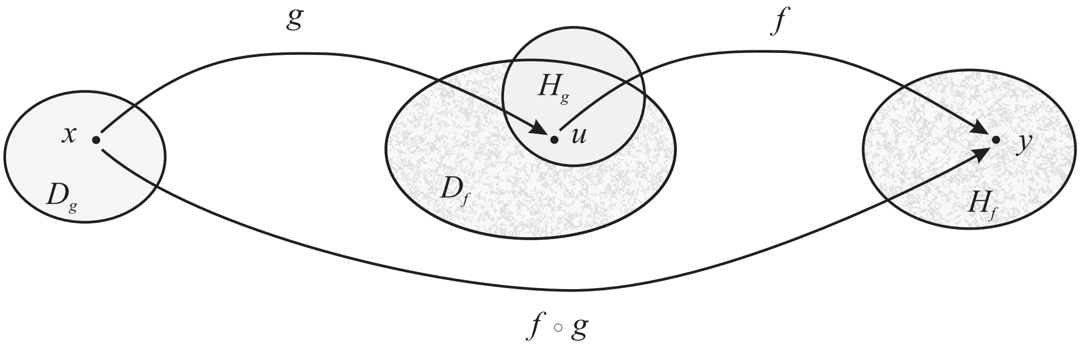
1.3 Složená funkce

Jednou z operací, se kterou se můžete u funkcí setkat, je jejich *skládání.*

Definice 11 Nechť funkce $f : D_f \to H_f$ a nechť funkce $g : D_g \to H_g$ jsou takové, že $D_f \cap H_g \neq \emptyset$. Pak funkci h definovanou vztahem $h(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ s definičním oborem

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f\}$$

nazveme složenou funkcí. Funkce f se nazývá *vnější funkce* a g se nazývá *vnitřní funkce* složené funkce $f \circ g$.



Příklad 6 Mějme dány funkce $f(x) = \cos x$ a $g(x) = x^3$. Určete obě složené funkce $f \circ g$ a $g \circ f$.

Řešení: Nejdříve určíme definiční obory a obory hodnot: $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -1, 1\rangle$, $D_g = \mathbb{R}$, $H_g = \mathbb{R}$.

$f \circ g$: Zde je g vnitřní a f vnější funkce, skládat můžeme, protože $H_g \subset D_f$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \cos(x^3) \quad x \in \mathbb{R} = D_g$$

$g \circ f$: Zde je f vnitřní a g vnější funkce, skládat můžeme, protože $H_f \subset D_g$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = (\cos x)^3 = \cos^3 x \quad x \in \mathbb{R} = D_f$$

Příklad 7 Určete, ze kterých funkcí jsou složeny následující funkce p a q:

$$p(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad\qquad q(x) = (\ln(x-1))^2$$

Řešení:

p: funkce $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ je vnitřní a $g(x) = \sqrt{x}$ je vnější funkce;
$p(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$; $D_p = (-\infty, -1\,\rangle \cup (\,1, \infty)$

q: funkce q je složena ze tří funkcí $f(x) = x - 1$, $g(x) = \ln x$ a $h(x) = x^2$, kde $q(x) = h(g(f(x))) = (h \circ g \circ f)(x)$; $D_q = (1, \infty)$

Jak snadno poznáme, která funkce je vnitřní a která vnější? Představme si, že chceme do složené funkce dosadit nějakou konkrétní hodnotu za proměnnou x. Při dosazování totiž vždy postupujeme od funkce, která je „nejvíc uvnitř", a postupujeme až k té vnější. Například u funkce q v předchozím příkladu při dosazení $x = 2$ postupně počítáme

$$x - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \ln(1) = 0 \Rightarrow 0^2 = 0.$$

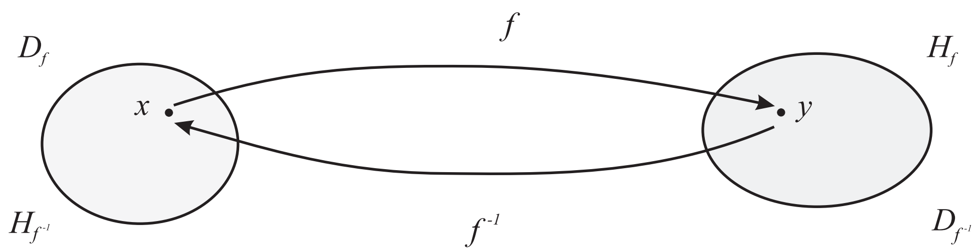
1.4 Inverzní funkce

Další možností, jak získat nové funkce, je vytvoření *inverzní funkce.*

Definice 12 Nechť je funkce f prostá na D_f. Potom funkci f^{-1}, která každému $y \in H_f$ přiřazuje to číslo $x \in D_f$ pro které platí, že $y = f(x)$ nazýváme *funkcí inverzní k funkci* f.

Předpoklad, aby f byla prostá, je pro existenci inverzní funkce nezbytný.

Pro funkce f a f^{-1} platí, že $D_f = H_{f^{-1}}$ a $H_f = D_{f^{-1}}$.



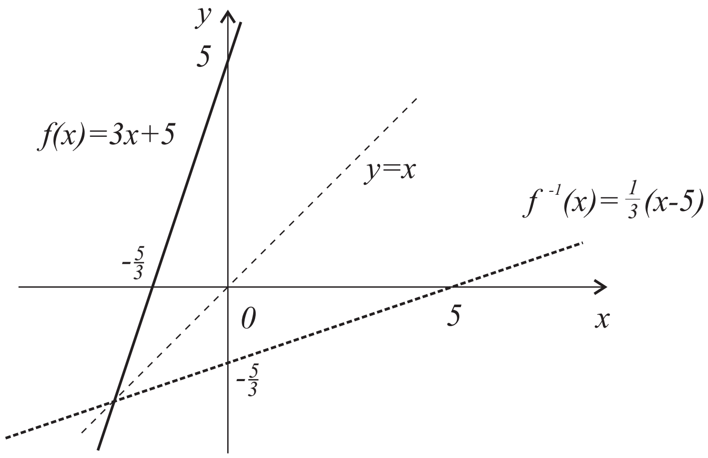
Příklad 8 *Určete funkci inverzní k funkci* $f(x) = 3x + 5$ *a nakreslete grafy obou funkcí.*

Řešení: Nejdříve určíme definiční obor a obor hodnot: $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}$, f *je na* D_f *prostá, existuje tedy inverzní funkce.*

Funkci f *zapíšeme ve tvaru* $y = 3x+5$. *Inverzní funkci lze určit například tak, že zaměníme označení proměnných a opět vyjádříme* y *jako funkci proměnné* x, *tj.*

$$x = 3y + 5 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x - 5) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 5).$$

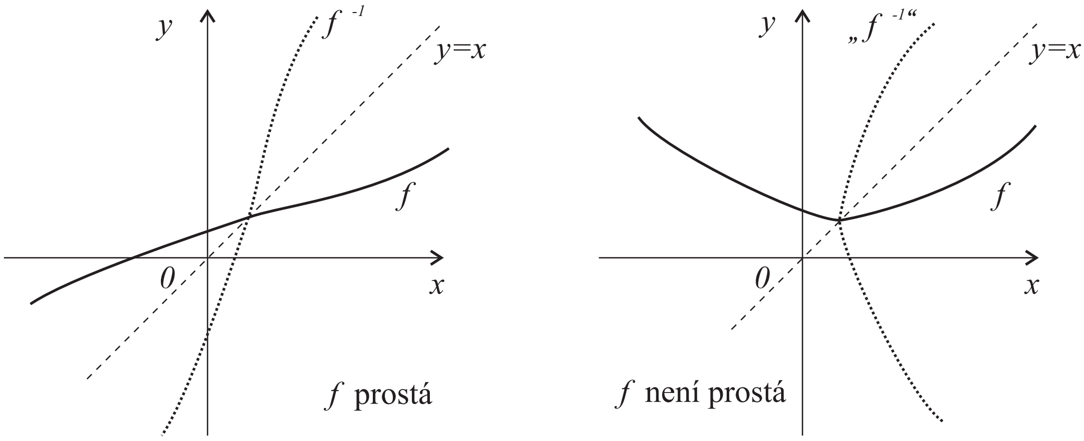
Grafy obou funkcí jsou znázorněny na následujícím obrázku.



Poznámka 2 Grafy funkcí f a f^{-1} jsou osově souměrné podle přímky $y = x$, tj. podle osy prvního a třetího kvadrantu (viz také předchozí příklad).

Uvažujme nyní graf funkce f, která není prostá. Souměrné podle přímky $y = x$ vytvoříme křivku „graf funkce f^{-1}“. Tato křivka ale nemůže být grafem žádné funkce – viz konec kapitoly Základní pojmy a také obr. 7.

Pokud není funkce f prostá na celém svém D_f, ale pouze na $M \subset D_f$, inverzní funkci hledáme pouze na M, a ne na D_f.



Obrázek 7: Sestrojování grafu inverzní funkce a nutnost prostoty funkce pro existenci funkce inverzní.

1.5 Základní elementární funkce

Koncem 18. století se matematici a přírodovědci shodli na tom, že většina reálných situací se dá reprezentovat modely obsahujícími pouze tzv. *elementární funkce*.

Elementární funkce jsou funkce, které lze vytvořit pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí pouze ze *základních elementárních funkcí*. Mezi základní elementární funkce řadíme funkce mocninné, exponenciální a logaritmické, goniometrické a cyklometrické.

S většinou ze základních elementárních funkcí jste se určitě setkali na střední škole. V této kapitole najdete jejich souhrnný přehled včetně grafů a nejdůležitějších vlastností.

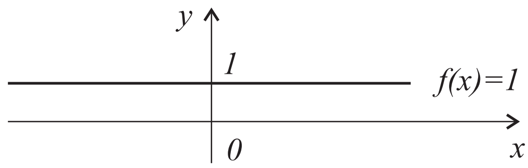
1.5.1 Mocninná funkce

Definice 13 *Mocninná funkce s exponentem* $a \in \mathbb{R}$ je každá funkce tvaru $f(x) = x^a$.

Definiční obor, obor hodnot i vlastnosti této funkce závisí na tom, z jaké podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ je exponent a.

- **Konstantní funkce**

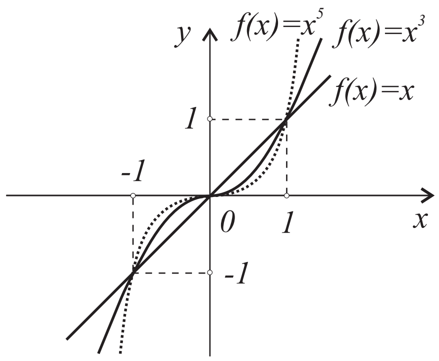
  Jestliže $a = 0$, dostáváme konstantní funkci $f(x) = 1$. Tato funkce je sudá, $D_f = \mathbb{R}$ (pro $x = 0$ dodefinujeme $f(0) = 1$), $H_f = \{1\}$.

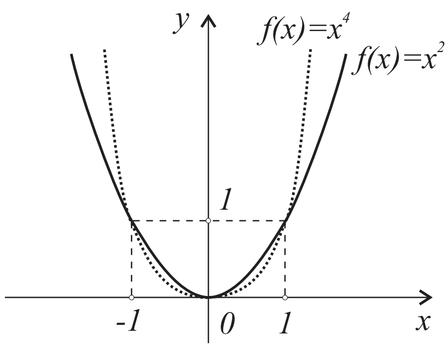


- **Mocninná funkce s přirozeným exponentem**

  Jestliže je exponent a přirozené číslo, obvykle ho značíme n a dostáváme mocninnou funkci ve tvaru $f(x) = x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

  * Je-li n liché, pak platí $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}$, funkce je lichá, neomezená a rostoucí na D_f.
  * Je-li n sudé, pak platí $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}_0^+$, funkce je sudá, omezená zdola, klesající na $(-\infty, 0\,\rangle$ a rostoucí na $\langle 0, \infty)$.

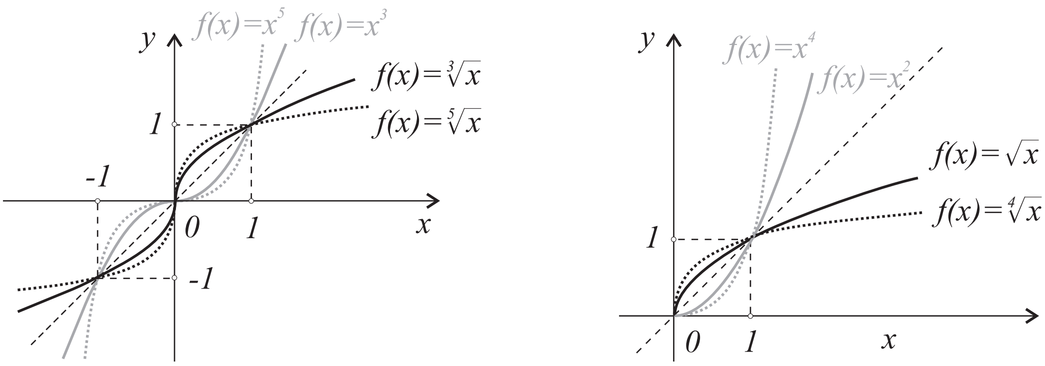




- **Funkce n-tá odmocnina**

  Jestliže $a = \frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dostáváme mocninnou funkci ve tvaru $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

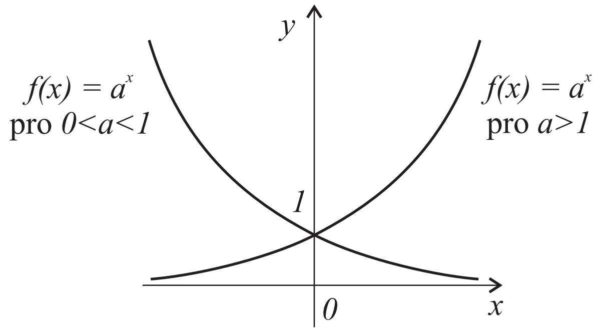
* Je-li n liché ($n \geq 3$), je funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ inverzní funkcí k funkci x^n pro $x \in \mathbb{R}$. Navíc platí, že $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}$, funkce je lichá, neomezená a rostoucí na D_f.
* Je-li n sudé ($n \geq 2$), je funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ inverzní funkcí k funkci x^n pro $x \in \langle 0, \infty)$. Navíc platí, že $D_f = \langle 0, \infty)$, $H_f = \langle 0, \infty)$, funkce zdola omezená a rostoucí na D_f.



1.5.2 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce se využívá pro modelování mnoha (nejen) přírodních jevů, protože vyjadřuje tzv. *zákon přirozeného růstu.* Pomocí ní můžeme popsat například organický růst (např. vývoj populace), vyrovnávání rozdílů (např. ochlazování nebo rozpouštění), průběh chemických reakcí aj. Typickým ekonomickým příkladem je pak spojité úročení.

Definice 14 *Exponenciální funkcí se základem a,* $a > 0$, $a \neq 1$, je každá funkce tvaru $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.



Definičním oborem této funkce je tedy celá množina $\mathbb{R}$, oborem hodnot pak $H_f = \mathbb{R}^+$. Funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická. Typ monotonie funkce závisí na jejím základu a; pro $a > 1$ je rostoucí a pro $0 < a < 1$ je klesající. Graf funkce a^x vždy prochází bodem $(0, 1)$.

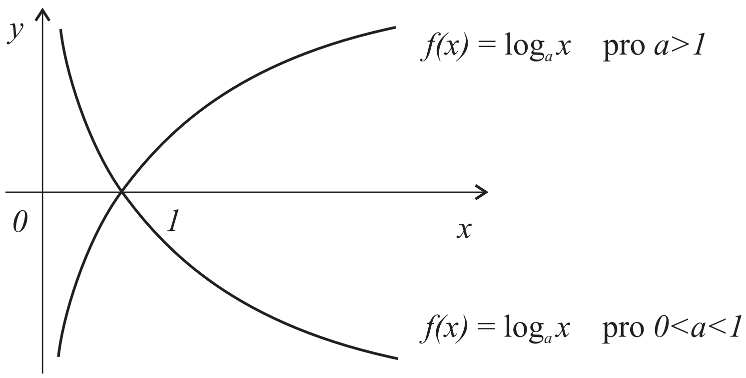
Poznámka 3

- Mezi exponenciálními funkcemi zaujímá důležité místo tzv. *přirozená exponenciální funkce* $f(x) = e^x$, kde e je Eulerovo číslo (viz Posloupnosti minulý semestr).
- Exponenciální funkce se základem $a = 10$ se nazývá *dekadická exponenciální funkce.*

Funkce exponenciální je na svém D_f prostá, existuje k ní tedy funkce inverzní - ta se nazývá logaritmická funkce a je popsána v následující části.

1.5.3 Logaritmická funkce

Definice 15 Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Inverzní funkce k exponenciální funkci a^x se nazývá *logaritmická funkce o základu a* a značí se $f(x) = \log_a x$.



Z výše uvedené definice tedy plyne následující ekvivalence ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$):

$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y.$$

Definičním oborem logaritmické funkce je $D_f = (0, \infty)$, obor hodnot je $H_f = \mathbb{R}$, funkce není sudá ani lichá, není periodická; pro $0 < a < 1$ je klesající a pro $a > 1$ je rostoucí. Graf funkce $\log_a x$ vždy prochází bodem $(1, 0)$.

Věta 2 *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $b \neq 1$; pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x \qquad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Poznámka 4

- Funkční hodnoty logaritmické funkce se nazývají *logaritmy*; symbol $\log_a x$ čteme jako *logaritmus čísla x o základu a* nebo *logaritmus o základu a čísla x.*

- Specielně pro $a = e$ dostáváme tzv. *přirozenou logaritmickou funkci* a značíme ji $f(x) = \ln x$ (tj. $\ln x = \log_e x$). Pro $a = 10$ dostáváme tzv. *dekadickou logaritmickou funkci* a značíme ji $f(x) = \log x$ (tj. $\log x = \log_{10} x$).

Věta 3 *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$; potom platí*

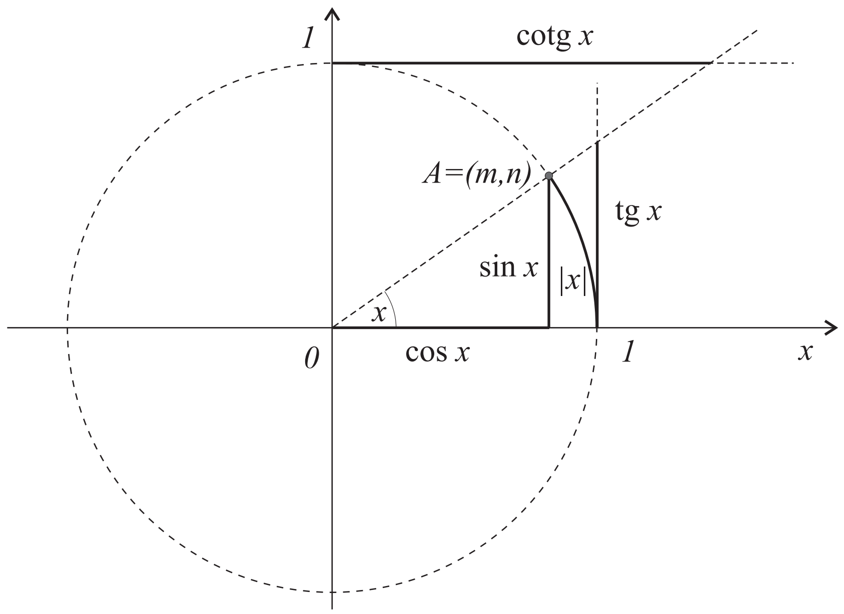
$$x^a = e^{a \ln x}.$$

1.5.4 Goniometrické funkce

Mezi goniometrické funkce řadíme funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens. Máme více možností, jak tyto funkce definovat (jako součet nekonečné řady, použitím funkcionálních rovnic aj.). My použijeme definici využívající jednotkovou kružnici.

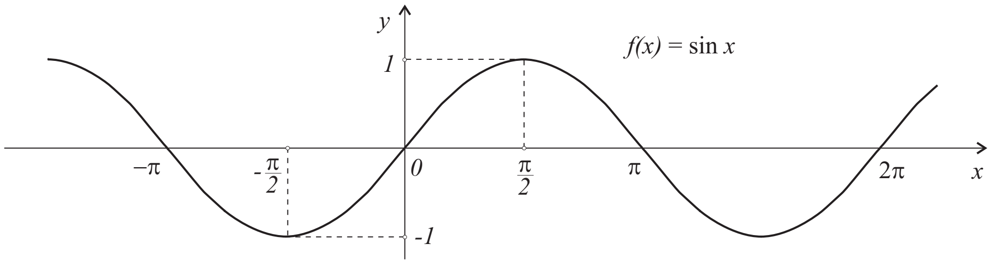
Úhly budeme měřit v míře obloukové, kdy platí, že $1°$ v míře stupňové je roven úhlu velikosti $\frac{\pi}{180}$ v míře obloukové.

Uvažujme tedy jednotkovou kružnici se středem v počátku a bod $A = (m, n)$ ležící na této kružnici. Jako x označíme orientovaný úhel (v míře obloukové), který svírá kladný směr osy x s průvodičem bodu A – viz následující obrázek:



- **Funkce sinus**

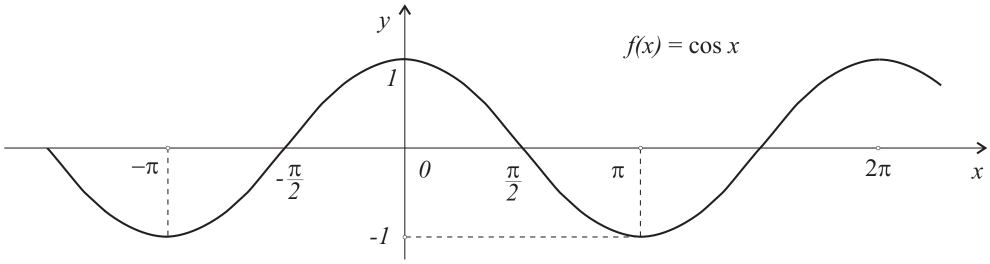
Definice 16 Funkce f, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna souřadnici n bodu A, se nazývá *sinus*. Hodnota funkce sinus v bodě x se značí $\sin x$.



Definičním oborem je $D_f = \mathbb{R}$, oborem hodnot $H_f = \langle -1, 1 \rangle$; funkce je lichá, tj. platí $\sin(-x) = -\sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$; funkce je periodická s primitivní periodou 2π, tj. platí $\sin(x + 2\pi) = \sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$; funkce je rostoucí na všech intervalech $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ a klesající na všech intervalech $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

- **Funkce kosinus**

Definice 17 Funkce f, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna souřadnici m bodu A se nazývá *kosinus*. Hodnota funkce kosinus v bodě x se značí $\cos x$.

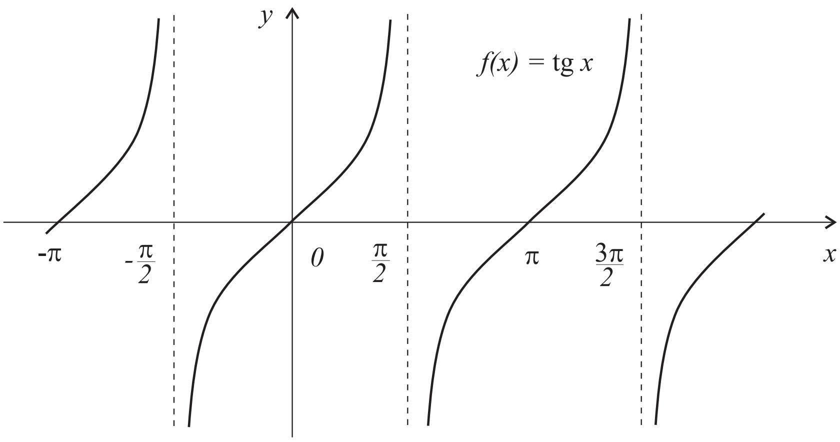


Definičním oborem je $D_f = \mathbb{R}$, oborem hodnot $H_f = \langle -1, 1\rangle$; funkce je sudá, tj. platí $\cos(-x) = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$; funkce je periodická s primitivní periodou 2π, tj. platí $\cos(x + 2\pi) = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$; funkce je rostoucí na všech intervalech $\langle (2k-1)\pi, 2k\pi\rangle$ a klesající na všech intervalech $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

- **Funkce tangens**

Definice 18 Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ se nazývá *tangens*. Hodnota funkce tangens v bodě x se značí $\operatorname{tg} x$, tj.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

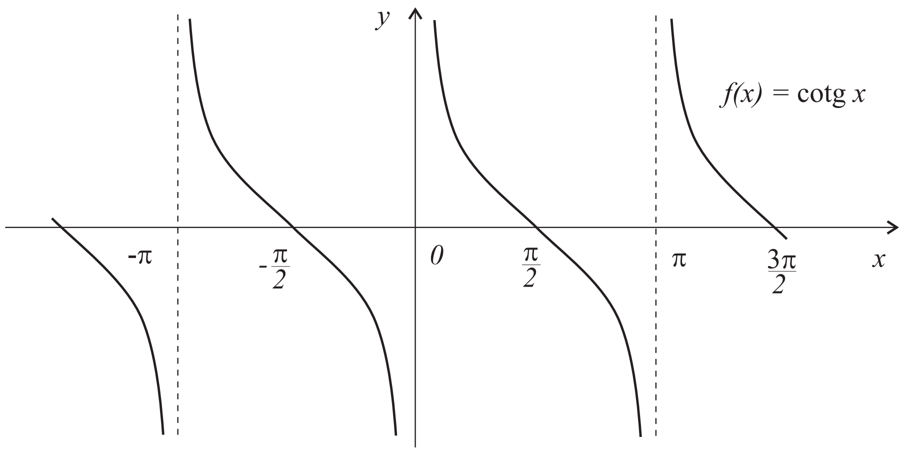


Definičním oborem je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, oborem hodnot $H_f = \mathbb{R}$; funkce je lichá, tj. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \ \forall x \in D_f$, funkce je periodická s primitivní periodou π, tj. $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x \ \forall x \in D_f$; funkce je rostoucí na intervalech $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

- **Funkce kotangens**

Definice 19 Funkce $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ se nazývá *kotangens*. Hodnota funkce kotangens v bodě x se značí $\operatorname{cotg} x$, tj.

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$



Definičním oborem je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, oborem hodnot $H_f = \mathbb{R}$; funkce je lichá, tj. $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x \ \forall x \in D_f$, funkce je periodická s primitivní periodou π, tj. $\operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x \ \forall x \in D_f$; funkce je klesající na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vlastnosti goniometrických funkcí

V této části uvedeme nejpoužívanější vztahy a vzorce platné pro goniometrické funkce. Všechny uvedené rovnosti platí všude, kde je současně definovaná levá i pravá strana rovnosti. Připomeňme, že např. zápis

$\sin^2 x$ znamená $(\sin x)^2$, tj. rozlišujte $\sin^2 x$ a $\sin x^2$ (viz také příklad 6 na str. 15).

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

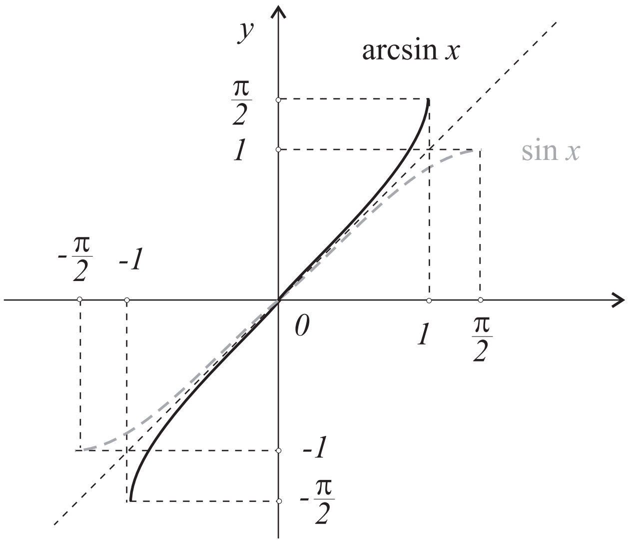
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

1.5.5 Cyklometrické funkce

Cyklometrickými funkcemi rozumíme funkce arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Definujeme je jako inverzní funkce k funkcím goniometrickým. Protože goniometrické funkce nejsou na svých definičních oborech prosté, musíme jejich definiční obory nejdříve vhodně zúžit.

- **Funkce arkussinus**

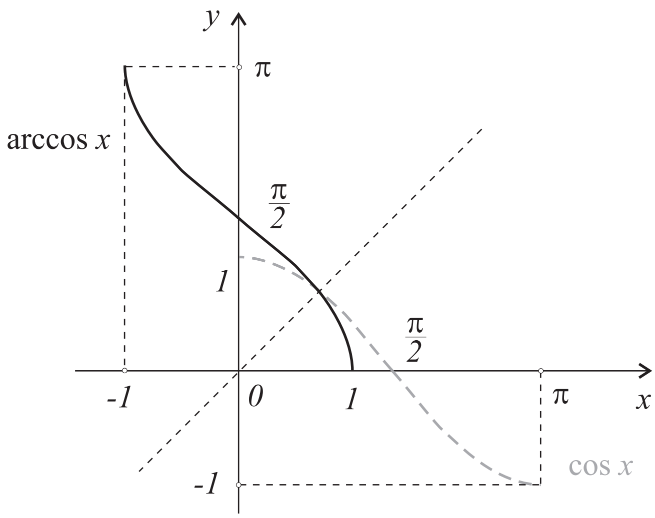
Definice 20 Funkcí *arkussinus* nazveme funkci, která je inverzní k funkci $\sin x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Hodnota funkce arkussinus v bodě x se značí $\arcsin x$.



Definičním oborem funkce arkussinus je $D_f = \langle -1, 1\rangle$, oborem hodnot $H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$; funkce je lichá, rostoucí, omezená a není periodická.

- **Funkce arkuskosinus**

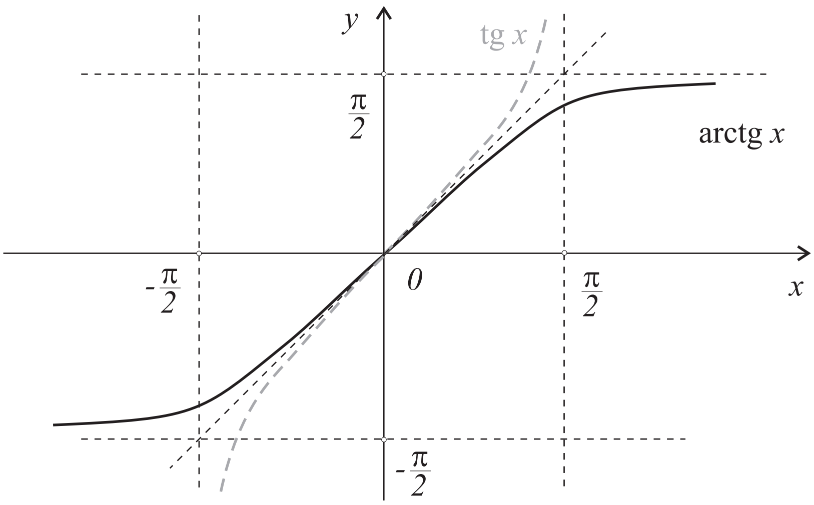
Definice 21 Funkcí *arkuskosinus* nazveme funkci, která je inverzní k funkci $\cos x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$. Hodnota funkce arkuskosinus v bodě x se značí $\arccos x$.



Definičním oborem funkce arkuskosinus je $D_f = \langle -1, 1\rangle$, oborem hodnot $H_f = \langle 0, \pi\rangle$; funkce je klesající, omezená a není ani lichá ani sudá, není periodická.

- **Funkce arkustangens**

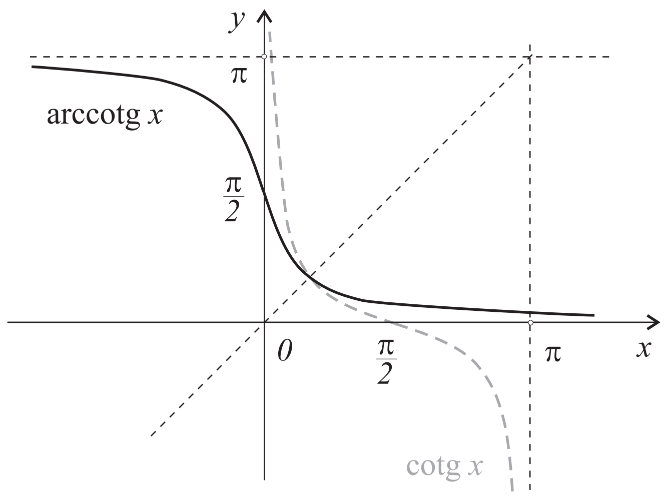
Definice 22 Funkcí *arkustangens* nazveme funkci, která je inverzní k funkci $\operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Hodnota funkce arkustangens v bodě x se značí $\operatorname{arctg} x$.



Definičním oborem funkce arkustangens je $D_f = \mathbb{R}$, oborem hodnot $H_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; funkce je lichá, rostoucí, omezená a není periodická.

- **Funkce arkuskotangens**

Definice 23 Funkcí *arkuskotangens* nazveme funkci, která je inverzní k funkci $\operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$. Hodnota funkce arkuskotangens v bodě x se značí $\operatorname{arccotg} x$.



Definičním oborem funkce arkuskotangens je $D_f = \mathbb{R}$, oborem hodnot $H_f = (0, \pi)$; funkce je klesající, omezená a není ani lichá ani sudá, není periodická.

Poznámka 5 Z výše uvedených definic ihned plyne následující:

$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$, kde $x \in \langle -1, 1 \rangle$, $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$, kde $x \in \langle -1, 1 \rangle$, $y \in \langle 0, \pi \rangle$

$y = \operatorname{arctg} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{tg} y$, kde $x \in \mathbb{R}$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y = \operatorname{arccotg} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{cotg} y$, kde $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, \pi)$

$\arcsin(\sin x) = x$, pro $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$\sin(\arcsin x) = x$, pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, pro $x \in \mathbb{R}$

Pojmy k zapamatování:

- reálná funkce jedné reálné proměnné, funkce
- graf funkce
- periodická funkce, primitivní perioda
- funkce sudá a lichá
- prostá funkce
- monotonní funkce
- omezená funkce
- složená funkce
- inverzní funkce
- základní elementární funkce (mocninné, exponenciální a logaritmické, goniometrické a cyklometrické)

Příklady k procvičení:

1. Nakreslete grafy následujících funkcí a rozhodněte o sudosti/lichosti a monotonii těchto funkcí:

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 2 & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \\ -x & \text{pro } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ -1 & \text{pro } x \in (1, \infty) \end{cases}$

c) $h(x) = |x|$

2. Určete, zda je funkce sudá/lichá:

a) $f(x) = 3x^2 + 1$ b) $g(x) = x^2 + x$ c) $h(x) = -1$ d) $k(x) = \frac{5x}{2x^2+1}$

3. Rozhodněte o monotonii následujících funkcí:

a) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \langle 0, \infty)$ b) $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ c) $h(x) = 2 - 5x$

4. Nakreslete graf periodické funkce s periodou 2, jestliže

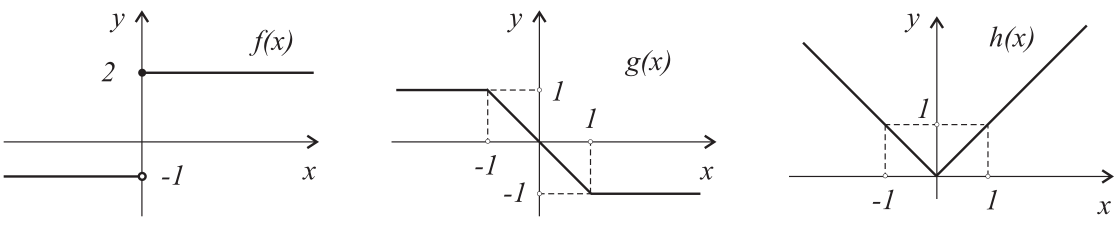
a) pro $x \in \langle -1, 1)$ platí $f(x) = 2x$ b) pro $x \in (-2, 0\,\rangle$ platí $g(x) = -x^2$

5. Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$.

6. Jsou dány funkce $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = \frac{2}{3x^3}$. Vytvořte funkce $f+g$, $f-g$, $\frac{f}{g}$, fg, $f \circ g$ a $g \circ f$ a určete jejich definiční obory.

Výsledky příkladů k procvičení:

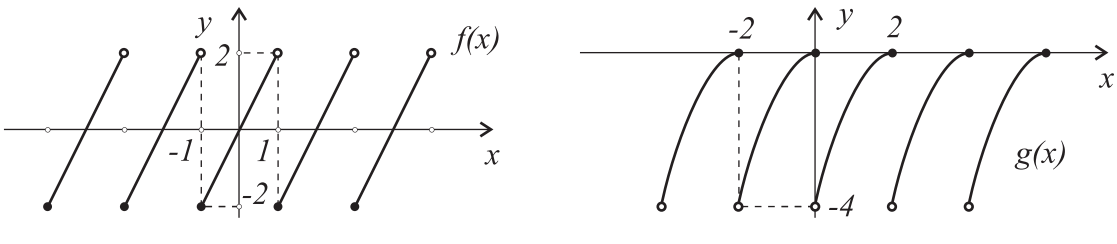
1. a) f není sudá ani lichá, je neklesající na $\mathbb{R}$, konstantní na $\mathbb{R}^-$, konstantní na $\mathbb{R}^+$ b) g je lichá, nerostoucí na $\mathbb{R}$, konstantní na $(-\infty, -1\,\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle -1, 1\rangle$ c) h je sudá, není monotonní na $\mathbb{R}$, je klesající na $\mathbb{R}_0^-$ a rostoucí na $\mathbb{R}_0^+$



2. a) sudá b) ani sudá ani lichá c) sudá d) lichá

3. a) rostoucí b) klesající c) klesající

4. Grafy periodických funkcí jsou na následujícím obrázku:



5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Inverzní funkci vypočítáme postupně:

$$f : y = \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow f^{-1} : x = \frac{y+2}{y-3} \Rightarrow f^{-1} : y = \frac{3x+2}{x-1}\,,\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

6. $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle 1, \infty)$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $H_g = \mathbb{R}$;

$$(f+g)(x) = x^2 + 1 + \tfrac{2}{3x^3}\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(f-g)(x) = x^2 + 1 - \tfrac{2}{3x^3}\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left(\tfrac{f}{g}\right)(x) = \tfrac{3x^3(x^2+1)}{2}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = (x^2+1) \cdot \tfrac{2}{3x^3}\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \tfrac{4}{9x^6} + 1\ ,\ H_g \subset D_f,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \tfrac{2}{3(x^2+1)^3}\ ,\ H_f \subset D_g,\ x \in \mathbb{R}$$