Funkce dvou proměnných

= zobrazení, které dvojici reálných čísel [*x,y*] přiřadí 1 reálné číslo *z*.

Např. funkcí dvou proměnných je zobrazení, které každému bodu [*x,y*], kde *x* je zeměpisná šířka a *y* je zeměpisná délka, přiřadí jeho nadmořskou výšku *z*.

Přesná matematická definice tohoto pojmu je následující:

**Definice**: Nechť D je neprázdná podmnožina roviny R2. Zobrazení *f* : D → R nazveme **funkce 2 proměnných**.

**Poznámka**: Jediný rozdíl oproti funkci 1 proměnné zavedené na začátku semestru je v tom, že D není podmnožinou R, ale R2.

Zápis funkce 2 proměnných: *z* = *f* (*x,y*)

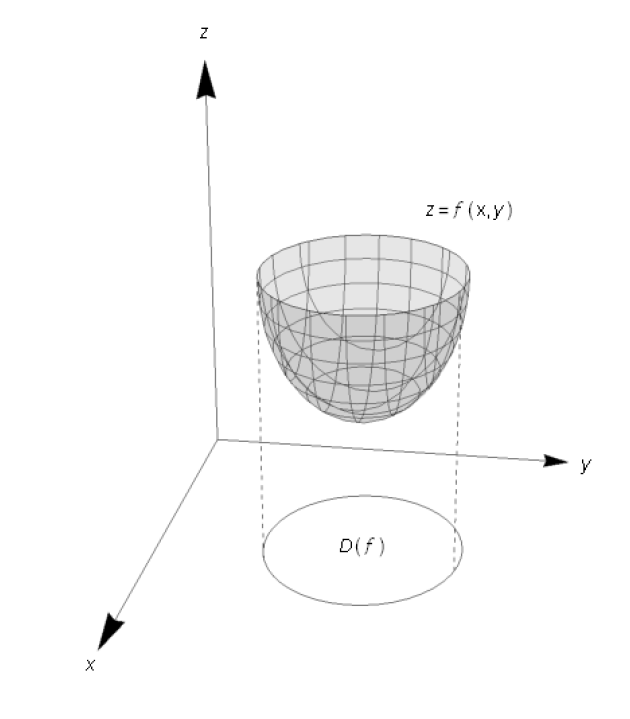
**Poznámka**:

* Množina D je definiční obor funkce *f*; není-li D určena, je definičním oborem maximální množina bodů [*x,y*], pro které má funkční předpis *f* smysl.
* Definiční obor funkce *f* opět značíme D*f* nebo D(*f*).
* Při určování definičního oboru používáme stejná pravidla jako u funkcí 1 proměnné:

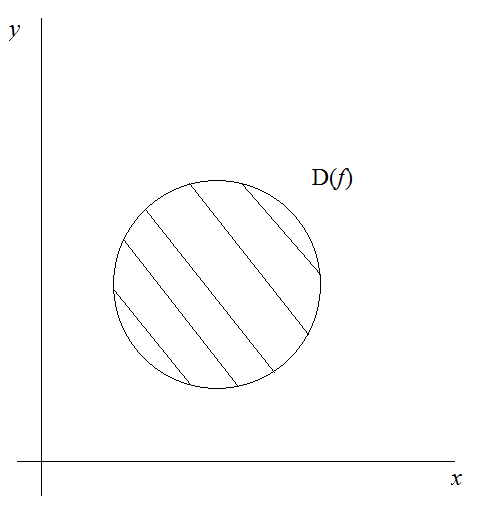
1. jmenovatel ≠ 0
2. výraz pod sudou √ musí být ≥ 0
3. výraz, který logaritmujeme, musí být > 0

**Definice**: **Grafem** funkce dvou proměnných nazveme množinu všech uspořádaných trojic

[*x, y*, *f* (*x,y*)], kde [*x,y*] ∈ D*f*



Obrázek grafu funkce *z* = *f* (*x*,*y*) v R3 a definičního oboru této funkce



Znázornění definičního oboru v R2

**Příklad**: Určete definiční obor pro funkci

**Příklad**: Určete definiční obor pro funkci

**Příklad**: Určete definiční obor pro funkci

Limita funkce 2 proměnných

**Limita funkce** *f* (*x,y*) **v bodě** [*x*0,*y*0] je hodnota L, ke které se blíží funkční hodnoty *f* (*x,y*), když se bod [*x,y*] blíží k bodu [*x*0,*y*0].

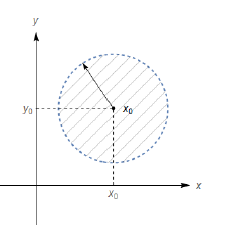
**Zápis**:



nebo

**Poznámka**:

* Bod [*x*0,*y*0] musí být (stejně jako u funkce 1 proměnné) **hromadným bodem** **D(*f*)**. Tzn., že v každém jeho okolí musí ležet nekonečně mnoho bodů z definičního oboru.
* U funkcí 1 proměnné bylo **okolí** otevřený interval, u funkcí 2 proměnných je okolí vnitřek kruhu.



Okolí *U*([*x*0,*y*0]) bodu [*x*0,*y*0]

* V obou případech je okolí množina bodů, které mají od středu vzdálenost menší, než je poloměr okolí.
* Vyjmeme-li z okolí jeho střed, získáme **redukované okolí** *U\**([*x*0,*y*0])

**Poznámka**:

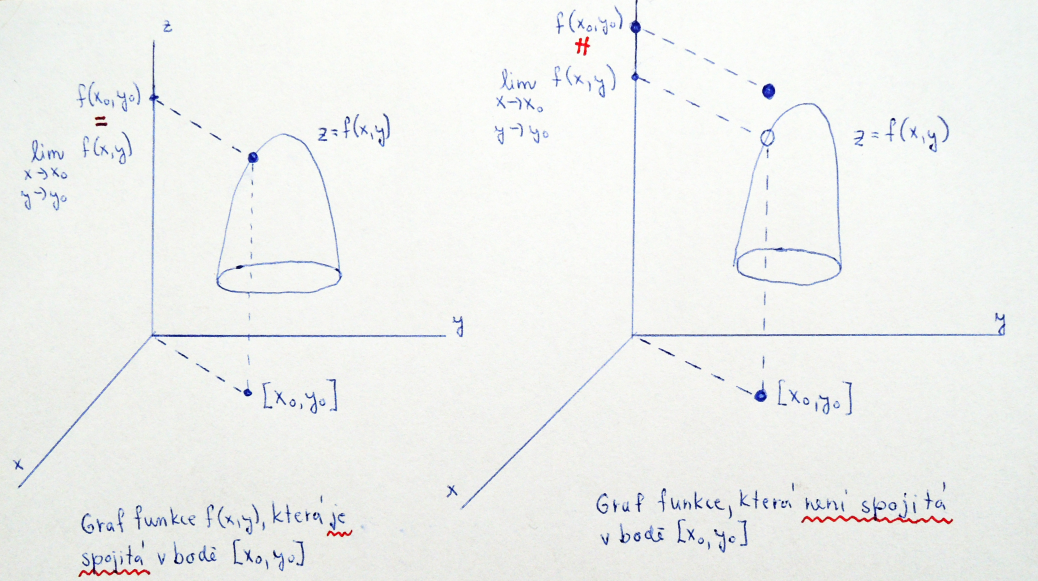
* Hodnota limity nezávisí na funkční hodnotě *f*(*x*0,*y*0). Funkční hodnota ani nemusí existovat.
* Problémem při výpočtu limit funkcí 2 proměnných je fakt, že zde neexistuje žádná alternativa k L´Hospitalovu pravidlu. Limity tak lze počítat jen dosazováním, krácením, pomocí vzorců... Typů limit u funkcí 2 proměnných, které lze spočítat bez pomoci počítače je jen velmi omezené množství.

**Příklad**: Vypočítejte limitu

Spojitost funkce 2 proměnných

Definice spojitosti je analogická jako u funkcí 1 proměnné – funkce 2 proměnných je spojitá v bodě, jestliže je limita v tomto bodě rovna funkční hodnotě.

**Definice**: Nechť [*x*0,*y*0] ∈ D*f* a nechť je to hromadný bod D*f*. Řekneme, že je funkce *f* (*x,y*) **spojitá v bodě** [*x*0,*y*0], jestliže



**Definice**: Funkce *f* (*x,y*) je spojitá na množině M, je-li spojitá v každém bodě této množiny.

**Poznámka**: Spojitost je zachovává aritmetickými operacemi (kromě dělení 0) a skládáním.

Parciální derivace funkce 2 proměnných

= derivace funkce 2 proměnných vzhledem k jedné z proměnných *x, y*, přičemž druhou z proměnných považujeme za konstantu.

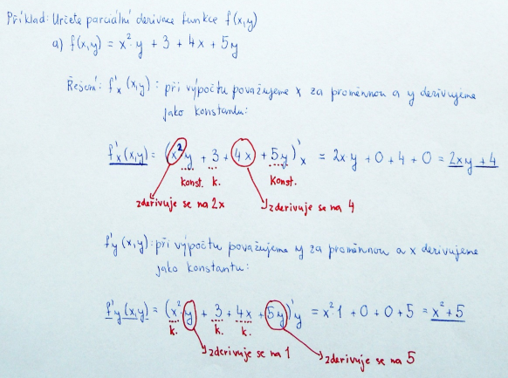
Existují 2 parciální derivace funkce *f* (*x,y*):

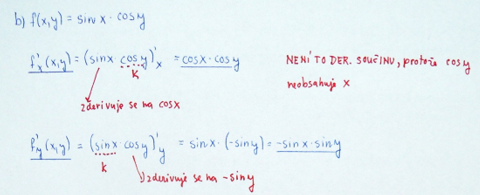
1. **Parciální derivace podle proměnné *x***. Značení

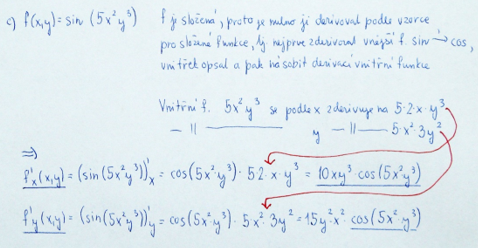
Při jejím výpočtu je *x* proměnná a *y* konstanta

1. **Parciální derivace podle proměnné *y***. Značení

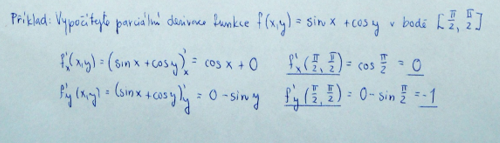
Při jejím výpočtu je *y* proměnná a *x* konstanta





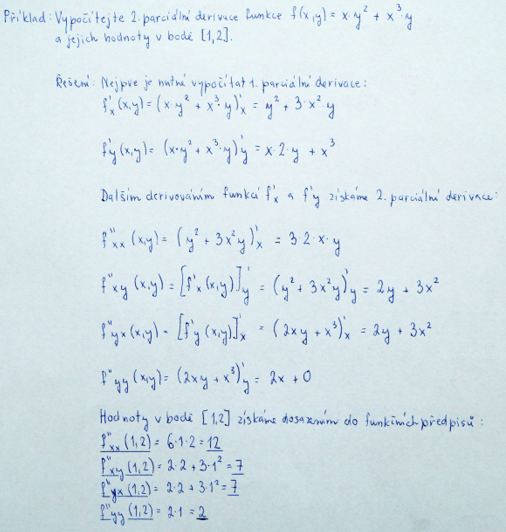


**Poznámka**: Obdobně jako u funkcí 1 proměnné lze do i do za *x* i za *y* dosadit reálná čísla a získat tak číslo nazývané **parciální derivace funkce v bodě**.



Parciální derivace **druhého řádu** pro funkce 2 proměnných

Protože i jsou opět funkcemi 2 proměnných, lze je znovu parciálně derivovat podle *x* nebo podle *y*. Tím získáme 4 **druhé parciální derivace** , , , .



**Poznámka**: Smíšené parciální derivace a vyšly v příkladu stejně. To není náhoda, ale důsledek toho, že pokud jsou a spojité, pak jsou si rovny.

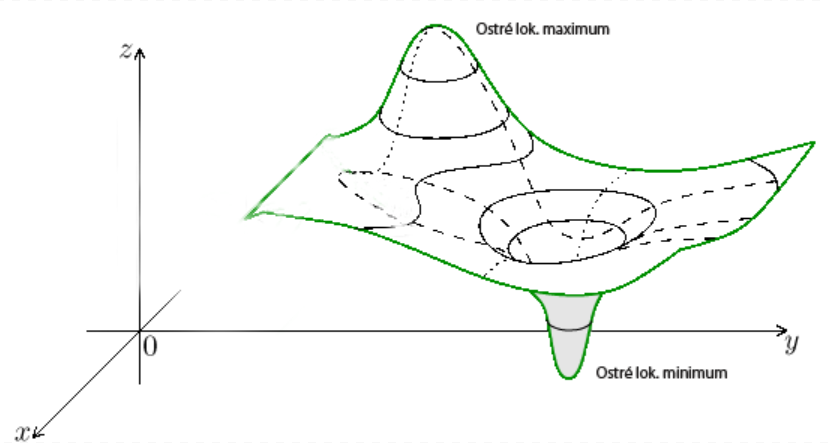
Lokální extrémy funkce 2 proměnných

Lokální extrémy funkcí 2 proměnných jsou definovány obdobně jako u funkcí jedné proměnné podle toho, jaké jsou funkční hodnoty v okolí zkoumaného bodu.

**Definice**: Říkáme, že má funkce *f*(*x,y*) v bodě [*x*0,*y*0] **ostré lokální maximum**, jestliže existuje redukované okolí tohoto bodu takové, že pro všechna [*x,y*] z tohoto redukovaného okolí platí, že

*f* (*x*0,*y*0) > *f* (*x,y*)

Nahradíme-li nerovnost *f* (*x*0,*y*0) > *f* (*x,y*) nerovností *f* (*x*0,*y*0) < *f* (*x,y*), má *f* v bodě [*x*0,*y*0] **ostré lokální minimum**.



Body, v nichž může mít funkce *f* (*x,y*) lokální extrém jsou buď

1. **stacionární body**, tj. body splňující ,

nebo

1. body, v nichž ani jedna z parciálních derivací neexistuje

nebo

1. body, v nichž jedna parciální derivace neexistuje a druhá je rovna 0

Existují-li ve stacionárním bodě [*x*0,*y*0] všechny druhé parciální derivace, které jsou navíc na okolí tohoto bodu spojité, lze o existenci lokálních extrémů rozhodnout pomocí druhých parciálních derivací takto:

**Označíme**: **D1 =**

**D2 = ·-**

**Platí**: Je-li **D2 > 0** a **D1 > 0**, pak má *f* v [*x*0,*y*0] **ostré lokální minimum**

Je-li **D2 > 0** a **D1 < 0**, pak má *f* v [*x*0,*y*0] **ostré lokální maximum**

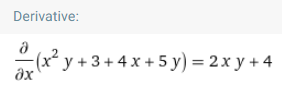
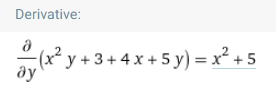
Je-li **D2 < 0**, pak *f* **nemá**v [*x*0,*y*0] **lokální extrém**

**Příklad**: najděte lokální extrémy funkce

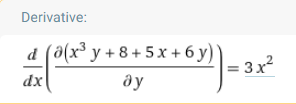
**Příklad**: Najděte lokální extrémy funkce

**Poznámka**: Kontrola výpočtů pro funkce 2 proměnných ve WolframAlpha

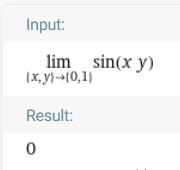
* **Parciální derivace:**
* **Zápis**: d/dx x^2y+3+4x+5y d/dy x^2y+3+4x+5y

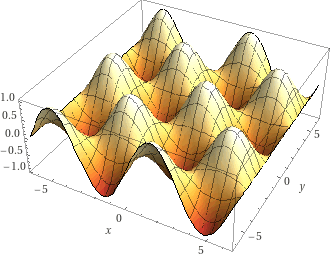
* **Parciální derivace 2. řádu:**
* **Zápis**: d/dx d/dy x^3y+8+5x+6y



* **Limity**: lim sin x\*y as x->0 y-> 1



* **Grafy**: plot sin x \* cos y



Funkce *n* proměnných

= zobrazení, které každé *n*-tici reálných čísel přiřadí 1 reálné číslo.

Příkladem funkce více proměnných je např. funkce pro výpočet hrubé mzdy: vstupními proměnnými jsou základní mzda, výše odměn, vyplacené dávky nemocenského pojištění, náhrady mzdy za dovolenou a svátek...a výstupní proměnnou je výše hrubé mzdy.

Všechny pojmy týkající se funkcí 2 proměnných (limita, spojitost, parc. derivace, lok. extrémy) lze zobecnit i pro funkce více než 2 proměnných.