

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

XM2

RNDr. Vladimíra Mádrová, CSc.

Obsah

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Definiční obory, vlastnosti a grafy funkcí | 4 |
| 2 | Limita a spojitost funkce | 6 |
| 3 | Derivace, tečna a normála, l'Hospitalovo pravidlo | 8 |
| 4 | Průběh funkce a globální extrémů funkce | 9 |
| 5 | Neurčité integrály | 10 |
| 6 | Užití integrálního počtu | 11 |

1 Definiční obory, vlastnosti a grafy funkcí

Příklad 1.1 Určete definiční obory funkcí:

- | | | | |
|---|---------------------------|---|--|
| a) $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-4x}$ | $[R \setminus \{0, 4\}]$ | f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ | $[(-\infty, 1) \cup (2, \infty)]$ |
| b) $f(x) = \log \frac{1}{x-3}$ | $[(3, \infty)]$ | g) $f(x) = \ln \frac{2x-1}{3+x}$ | $[(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, \infty)]$ |
| c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$ | $[\langle -2, 3 \rangle]$ | h) $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - x - 5)}$ | $[(-\infty, -2) \cup \langle 3, \infty \rangle]$ |
| d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}} + \frac{3x}{\sqrt{3-2x}}$ | $[\emptyset]$ | i) $f(x) = \ln \frac{-6e^{3x-1}}{x+5}$ | $[(-\infty, -5)]$ |
| e) $f(x) = \sqrt{8 + 2x^2}$ | $[R]$ | j) $f(x) = \frac{3+2\sin^2(3x-4)}{5e^{2x-8}}$ | $[R]$ |

Příklad 1.2 Rozhodněte, zda je funkce sudá či lichá:

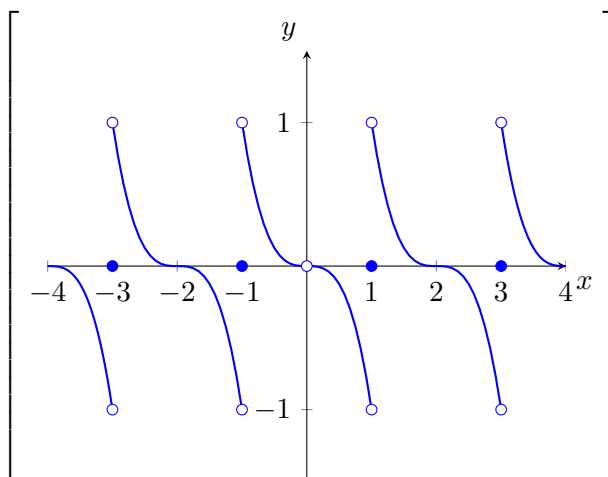
- | | | | |
|---------------------------------|----------------------|-------------------------------|--------|
| a) $f(x) = 2^{-x^2}$ | [sudá] | e) $f(x) = \frac{ x }{ x +2}$ | [sudá] |
| b) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ | [ani sudá ani lichá] | f) $f(x) = x - 2x^2$ | [sudá] |
| c) $f(x) = \frac{x}{3+x^2}$ | [lichá] | g) $f(x) = 3^{-x^2}$ | [sudá] |
| d) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ | [lichá] | | |

Příklad 1.3 Načrtněte grafy funkcí a určete: typ funkce, její $D(f)$, $H(f)$, paritu, zda je funkce monotónní, prostá, omezená a zda má globální extrém.

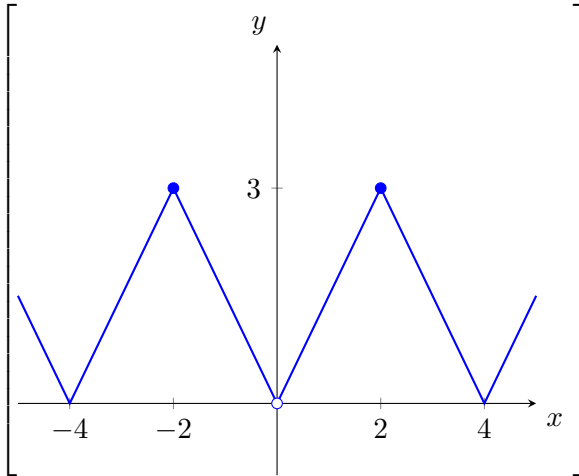
- | | |
|----------------------------------|-------------------------|
| a) $f(x) = 3x - x^2$ | e) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ |
| b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ | f) $f(x) = -2x^5$ |
| c) $f(x) = \frac{-3}{x}$ | g) $f(x) = 3^x$ |
| d) $f(x) = 2 \sin x$ | h) $f(x) = 4 - x$ |

Příklad 1.4 Sestrojte grafy periodických funkcí

- a) $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{pro } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{pro } x = -1 \end{cases}$; primitivní perioda $p_{(0)} = 2$



b) $f(x) = \frac{3}{2} |x|$ pro $x \in \langle -2, 2 \rangle$; primitivní perioda $p_{(0)} = 4$



2 Limita a spojitost funkce

Příklad 2.1 Vypočítejte limity.

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}$ [$\frac{6}{5}$]

b) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x^2 - 6x - 7}$ [$\frac{1}{48}$]

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 20}{(x - 5)^2}$ [$+\infty$]

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 7}{5x^8 - 9x^3} - \frac{x^3 - 6x^6}{2 + x^3} \right)$ [$+\infty$]

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ [$\frac{4}{5}$]

f) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x+3} - 3}$ [6]

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2}{x - 3}$ [neexistuje]

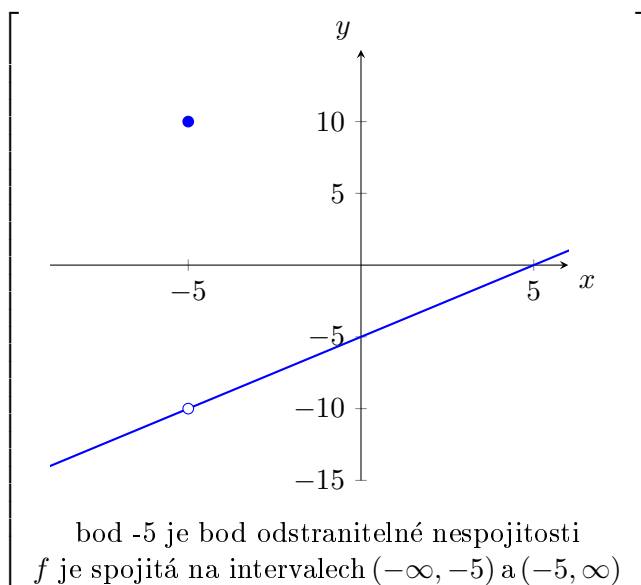
h) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 4}$ [2]

i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 20}{(x - 4)^2}$ [$-\infty$]

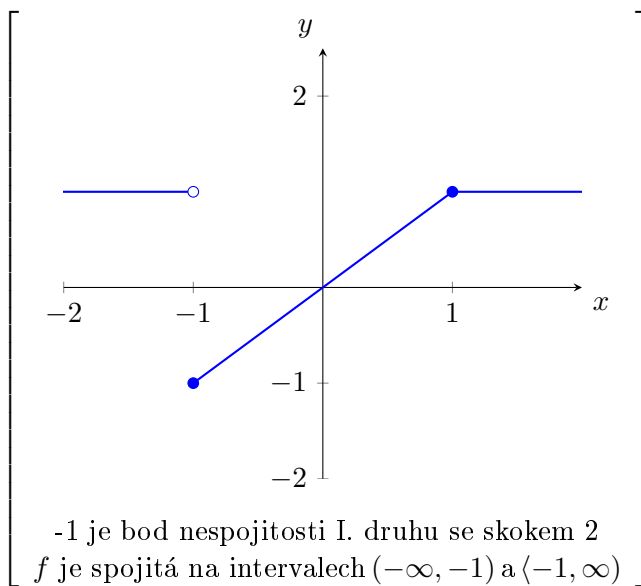
j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3 - 4x}{7x + 2} - \frac{6x + 1}{x^3 + 5} \right)$ [$+\infty$]

Příklad 2.2 Pojďte o spojitosti funkcí a sestrojte jejich graf.

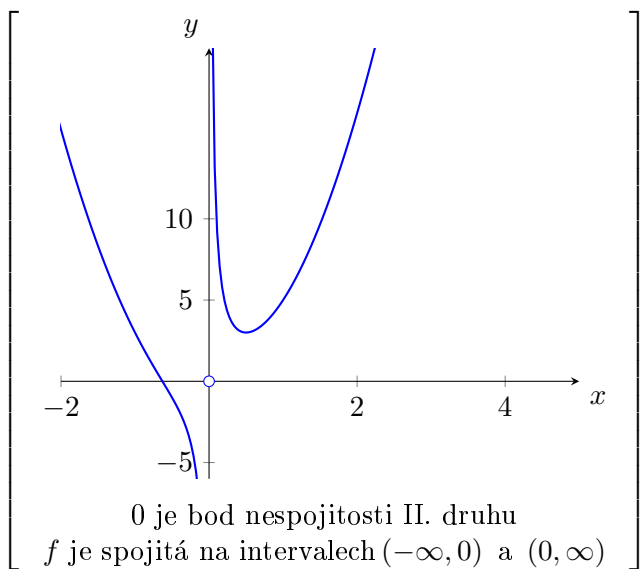
a) $f(x) = \begin{cases} 10 & \text{pro } x = -5 \\ \frac{x^2 - 25}{x + 5} & \text{pro } x \neq -5 \end{cases}$



$$b) f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}$$



$$c) f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$$



3 Derivace, tečna a normála, l'Hospitalovo pravidlo

Příklad 3.1 *K dané funkci f určete její první derivaci, tj. f' .*

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = 3x^4 \cos x$ | $[f'(x) = 3x^3 (4 \cos x - x \sin x)]$ |
| b) $f(x) = \frac{2e^x}{x^2-4}$ | $\left[f'(x) = \frac{2e^x(x^2-4-2x)}{(x^2-4)^2} \right]$ |
| c) $f(x) = \frac{6}{(x^3-5)^2}$ | $\left[f'(x) = \frac{-36x^2}{(x^3-5)^3} \right]$ |
| d) $f(x) = \left(\operatorname{tg} \frac{2}{x}\right)^4$ | $\left[f'(x) = -8 \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{2}{x}\right)^3}{x^2 \cdot \cos^2 \frac{2}{x}} \right]$ |
| e) $f(x) = \sqrt{1 + \ln^2 x}$ | $\left[f'(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}} \right]$ |
| f) $f(x) = (\sin x)^{x^2}$ | $\left[f'(x) = x (\sin x)^{x^2} (2 \ln \sin x + x \operatorname{cotg} x) \right]$ |
| g) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$ | $\left[f'(x) = \frac{x}{x^4-1} \right]$ |
| h) Určete $f'''(-1)$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x} + 3x^3$. | $[f'''(-1) = 12]$ |

Příklad 3.2 *Určete rovnici tečny t a normály n grafu funkce f v bodě T .*

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{x}$; $T = [1; ?]$ | $\left[\begin{array}{l} t: y = 3x - \frac{7}{2} \\ n: y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} \end{array} \right]$ |
| b) $f(x) = x^2 - 4$; $T = [0; ?]$ | $\left[\begin{array}{l} t: y = -4 \\ n: x = 0 \end{array} \right]$ |

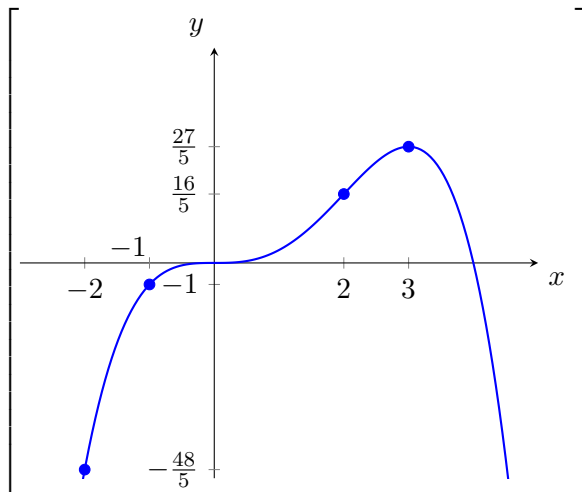
Příklad 3.3 *Užitím l'Hospitalova pravidla spočtete dané limity.*

- | | |
|---|-----|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{x \cdot \cos x}$ | [2] |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 \ln(x-1)}{\ln(2x-2)}$ | [5] |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ | [2] |

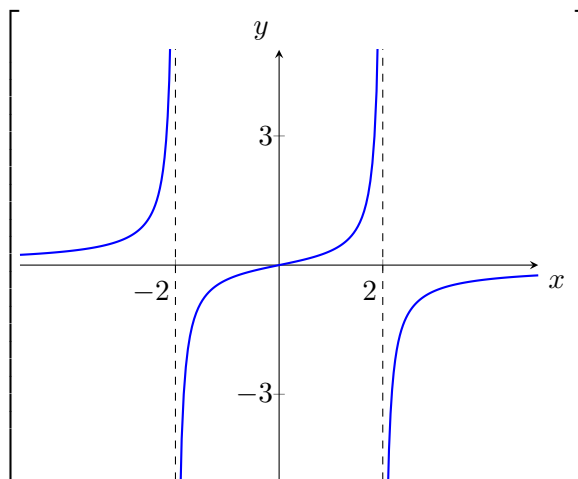
4 Průběh funkce a globální extrémy funkce

Příklad 4.1 Vyšetřete průběh funkce, načrtněte její graf a napište, zda je funkce omezená, prostá a zda má globální extrémy.

a) $f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{5}$



b) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$



Příklad 4.2 Najděte globální extrémy funkce $f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{5}$ na intervalu

a) $\langle 2, 4 \rangle$

b) $\langle -1, 2 \rangle$

Srovnejte s grafem funkce z příkladu 1 a).

[a) globální minimum $-\frac{48}{5}$ v bodě -2
globální maximum $\frac{27}{5}$ v bodě 3]

[b) globální minimum -1 v bodě -1
globální maximum $\frac{16}{5}$ v bodě 2]

5 Neurčité integrály

Příklad 5.1 *Linearita + tabulkové integrály*

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \left(\frac{x^3 \cos x - 2x^2}{x^3} + \frac{4}{\sin^2 x} \right) dx & \quad [\sin x - 2 \ln |x| - 4 \cotg x + c] \\
 \text{b) } \int \frac{4x^3 - 2x + 6x \cdot 3^x + 5}{x} dx & \quad \left[\frac{4x^3}{3} - 2x + 6 \frac{3^x}{\ln 3} + 5 \ln |x| + c \right] \\
 \text{c) } \int \left(\frac{7}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{2}{3+x^2} \right) dx & \quad \left[7 \arcsin \frac{x}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c \right]
 \end{aligned}$$

Příklad 5.2 *Metoda per partes*

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int (x-5) \ln x \, dx & \quad \left[\left(\frac{x^2}{2} - 5x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} + 5x + c \right] \\
 \text{b) } \int (2x-3) \cos x \, dx & \quad [(2x-3) \sin x + 2 \cos x + c] \\
 \text{c) } \int (4x-3x^2) e^x \, dx & \quad [(-3x^2 + 10x + 2) e^x + c] \\
 \text{d) } \int (3x-5x^2) \cos x \, dx & \quad [(10 + 3x - 5x^2) \sin x + (3 - 10x) \cos x + c] \\
 \text{e) } \int e^{4x} \sin x \, dx & \quad \left[\frac{e^{4x}}{17} (4 \sin x - \cos x) + c \right]
 \end{aligned}$$

Příklad 5.3 *Substituční metoda*

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \frac{dx}{3+4x^2} & \quad \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{3}} + c \right] \\
 \text{b) } \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+4x^3)^2}} dx & \quad \left[\frac{1}{4} \sqrt[3]{1+4x^3} + c \right] \\
 \text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x-\frac{5}{2})^2}} & \quad \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-\frac{5}{2}}{2} + c \right] \\
 \text{d) } \int \frac{7 \sin x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx & \quad \left[-\frac{35}{2} \sqrt[5]{\cos^2 x} + c \right] \\
 \text{e) } \int \frac{6dx}{x^2+2x+7} & \quad \left[\sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{6}} + c \right]
 \end{aligned}$$

6 Užití integrálního počtu

Příklad 6.1 Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného křivkou $y = x^2 - 6x + 5$, osou x v intervalu $\langle 0; 6 \rangle$ a přímkami $x=0$ a $x=6$.

$$[P = 15\frac{1}{3} (j^2)]$$

Příklad 6.2 Určete obsah P rovinného obrazce omezeného grafy funkcí $y = 4 - x^2$ a $y = x^2 - 2x$.

$$[P = 9 (j^2)]$$

Příklad 6.3 Určete obsah P rovinného obrazce omezeného čarami $2y = x^2$ a $2x + 2y - 3 = 0$.

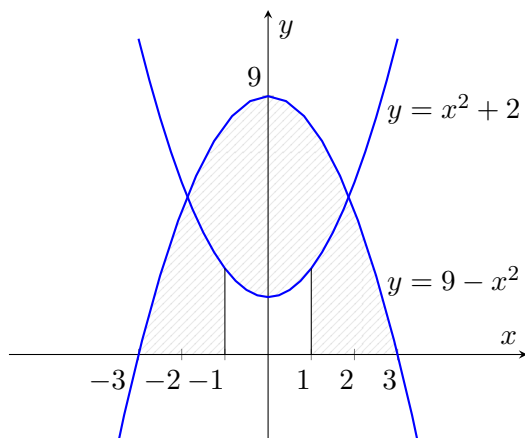
$$[P = 5\frac{1}{3} (j^2)]$$

Příklad 6.4 Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného čarami $y = x^3$, $x=0$, $x=2$ a $y=0$. Určete objem V tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x .

$$[P = 4 (j^2); V = 18\frac{2}{7}\pi (j^3)]$$

Příklad 6.5 Vypočítejte obsah P vyšrafovaného obrazce a objem V dutého rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce kolem osy x .

$$[P = 31\frac{1}{3} (j^2); V = 248\frac{2}{16}\pi (j^3)]$$



RNDr. Vladimíra Mádrová, CSc.

Příklady na procvičení

Vydala Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s.

Jeremenkova 1142/42, 772 00 Olomouc

www.mvso.cz

tel./fax: +420 587 332 311

Vytiskl Vydavatel

Nová Ulice 560/404

www.vydavatel.cz

+420 777 666 555

Zdrojové umístění URL: <http://www.adresa.cz/dokument.pdf>

Text neprošel jazykovou úpravou.

Grafický návrh obálky zpracoval Jméno Příjmení

1. vydání

© Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s.

ISBN: 978-1-56619-909-4