MVŠO

DIFERENCIÁLNÍ POČET (2)

STUDIJNÍ OPORA PRO KOMBINOVANÉ STUDIUM

DIFERENCIÁLNÍ POČET (2)

Funkce více proměnných

Řešené příklady

RNDr. Vladimíra MÁDROVÁ, CSc.

Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s., 2018

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Projekt EDULAM - „Zvýšení kvality vzdělávání na MVŠO s ohledem na potřeby trhu práce, digitalizaci a internacionalizaci“ (č. projektu XXXXX) je spolufinancován Evropskou unií.

Autor: RNDr. Vladimíra MÁDROVÁ, CSc.

Olomouc 2018

Obsah

Úvod

Cílem textu je seznámit studenty s diferenciálním počtem funkce více proměnných, a to především s jeho využitím formou řešených příkladů. Po přečtení textu student správně chápe pojem funkce dvou a tří proměnných. Pro tyto funkce bezpečně určuje jejich definiční obory, obory spojitosti a množiny bodů nespojitosti a dovede je znázornit. Umí vyšetřit existenci limity a počítat limity rozličných funkcí. Rutinně zvládá výpočet parciálních derivací a chápe jejich geometrický význam. Umí aplikovat poznatky z diferenciálního počtu při určování přibližných hodnot výrazů, sestavování rovnic tečné roviny a normály k ploše. Chápe rozdíl mezi lokálními a globálními extrémy, umí je vyhledat a určit jejich hodnotu. Rozumí pojmu implicitní funkce, dokáže vyšetřit její existenci, umí počítat derivaci a vyšetřovat vlastnosti implicitní funkce.

Kapitola 1

Zadání funkce a její hodnoty

Po prostudování kapitoly budete umět:

- určovat funkční hodnoty funkce.

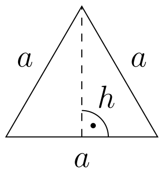
Klíčová slova:

Funkce, funkční hodnota.

Příklad 1.1 *Vyjádřeme objem V a povrch S pravidelného trojbokého hranolu jako funkci výšky v a podstavné hrany a.* $(a > 0 \; a \; v > 0)$

Řešení

Objem V má být funkcí a a v, tj. $V = f\,(a, v)$ a také S má být funkcí4 a a v, tj. $S = g\,(a, v)$. Podstavou pravidelného trojbokého hranolu je rovnostranný trojúhelník o straně a; vypočteme jeho obsah P.



$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (Pythagorova věta)

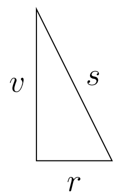
Obsah P trojúhelníku je $P = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
Objem V hranolu je $V = P \cdot v = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}v = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 v$
Povrch S hranolu je $S = P + 3av = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3av$

■

Příklad 1.2 *Vyjádřeme objem V a plášť S rotačního kužele jako funkci jeho výšky v a strany s.* $(v > 0, s > 0)$

Řešení

Objem V kužele je $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$; zatím je V funkcí r a v, π je konstanta.
Požadujeme, aby $V = f\,(v, s)$.



Užijeme Pythagorovu větu a vypočteme $r^2 = s^2 - v^2 \Longrightarrow r = \sqrt{s^2 - v^2}$

Do V dosadíme za r. Potom $V = \frac{1}{3}\pi\left(s^2 - v^2\right)$.
Plášť S kužele je $S = \pi r s$; zatím je S funkcí r a s, π je konstanta. Požadujeme, aby $S = g\,(v, s)$.
Do S dosadíme za r. Potom $S = \pi\sqrt{s^2 - v^2}s = \pi s\sqrt{s^2 - v^2}$.

■

Příklad 1.3 *Určeme hodnotu funkce $z = f\,(x, y)$ v bodě A.*

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^3};\; A = [0; 0]$

b) $f(x, y) = \frac{3x}{\sqrt{xy}};\; A = [2; 2]$

c) $f(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{3x^3}{y} - 15x + 30;\; A = [2; 4]$

d) $f(x, y) = 2\,\text{arcsin}\,(x + y)\,\text{cos}\,\frac{y}{x};\; A = [1; 0]$

e) $f(x, y) = \frac{e^{x^2 y}}{x} + 6xy - 5y^2;\; A = [0; 1]$

Řešení

Do předpisu dané funkce dosadíme souřadnice bodu A.

a) $f(A)=\sqrt{0^2+2\cdot 0^3}=\sqrt{0}=0$

b) $f(A)=\frac{3\cdot 2}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{6}{2}=3$

c) $f(A)=2\sqrt{4}+\frac{3\cdot 2^3}{4}-15\cdot 2+30=4+6-30+30=10$

d) $f(A)=2\arcsin\left(1+0\right)\cdot\cos\frac{0}{1}=2\arcsin 1\cdot\cos 0=2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=\pi$

e) $f(A)=\frac{e^{0^2\cdot 1}}{0}+6\cdot 0\cdot 1-5\cdot 1^2$; neexistuje
Výraz $\frac{e^0}{0}=\frac{1}{0}$ není definován, $f(A)$ neexistuje, neboť bod A nepatří do definičního oboru funkce.

■

Příklad 1.4 *Určeme hodnotu funkce $z=4e^{xy}+3x-2y^2$ v bodech $A=[1;1]$, $B=[1;0]$, $C=[a;-a]$, $D=\left[a;\frac{1}{a}\right]$, $a\neq 0$.*

Řešení

Postupně dosazujeme souřadnice bodů do předpisu funkce.

$$z(A)=4e^{1\cdot 1}+3\cdot 1-2\cdot 1^2=4e+3-2=4e+1$$
$$z(B)=4e^{1\cdot 0}+3\cdot 1-2\cdot 0^2=4e^0+3-0=4\cdot 1+3=7$$
$$z(C)=4e^{a\cdot(-a)}+3\cdot a-2\cdot(-a)^2=4e^{-a^2}+3a-2a^2=4e^{-a^2}+3a-2a^2$$
$$z(D)=4e^{a\cdot\frac{1}{a}}+3\cdot a-2\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2=4e^1+3a-\frac{2}{a^2}=4e+3a-\frac{2}{a^2}$$

■

Příklad 1.5 *Určeme hodnotu funkce $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x-y^2}{x-y} & \text{pro } y\neq x\\ 3x+y & \text{pro } y=x\end{cases}$ v bodech $A=[1;1]$, $B=[1;-1]$, $C=[0;-2]$,$D=[2;2]$, $E=\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$.*

Řešení

Pokud jsou souřadnice bodu různé $(x\neq y)$, pak dosazujeme do té části předpisu funkce, která je uvedena v horním řádku; pokud jsou souřadnice bodu stejné $(x=y)$, pak dosazujeme do dolního řádku předpisu funkce.

$$f(A)=3\cdot 1+1=4$$
$$f(B)=\frac{2\cdot 1-(-1)^2}{1-(-1)}=\frac{2-1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
$$f(C)=\frac{2\cdot 0-(-2)^2}{0-(-2)}=\frac{0-4}{0+2}=-2$$
$$f(D)=3\cdot 2+2=8$$
$$f(E)=\frac{2\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}=\frac{1-\frac{4}{9}}{\frac{3-4}{6}}=\frac{\frac{5}{9}}{-\frac{1}{6}}=-\frac{30}{9}=-\frac{10}{3}$$

■

Příklad 1.6 *Je dána funkce* $f(x,y) = \frac{x}{x-y}$*. Určeme její definiční obor* $D(f)$ *a dokažte, že pro každý bod* $[a;b] \in D(f)$ *platí rovnost* $f\left(a,b\right) + f\left(b,a\right) = 1$*.*

Řešení

Určíme $D(f) : x - y \neq 0 \Longrightarrow y \neq x$;
$f\left(a,b\right) = \frac{a}{a-b}$ a $f\left(b,a\right) = \frac{b}{b-a}$
Potom $f\left(a,b\right) + f\left(b,a\right) = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} = \frac{a-b}{a-b} = 1$.
Daná rovnost platí.

■

Hodnotu funkce v daném bodě určíme tak, že za proměnné v předpisu funkce dosadíme odpovídající souřadnice bodu.

1. *Určete hodnotu funkce* $f(x,y) = 4x^2y + 5y^2x - 6x + 2y + 9$ *v bodech* $A = [1,-1]$, $B = \left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$, $C = \left[a, \frac{1}{a}\right]$, $a \neq 0$.

   $\left[f(A) = 2, f(B) = \frac{131}{12}, f(C) = \frac{-2a^2+9a+7}{a}\right]$

2. *Určete hodnotu funkce* $f(x,y) = \frac{6x-y}{x-2y+5}$ *v bodech* $A = [3,-1]$, $B = [-1,2]$, $C = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $D = [1,6]$.

   $\left[f(A) = \frac{19}{10}, f(B)\right.$ neexistuje, $\left.f(C) = \frac{5}{9}, f(D) = 0\right]$

3. *Určete hodnotu funkce*

   $$f(x,y) = \begin{cases} x - 2y + 3 & \text{pro } xy > 0 \\ 5 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0 \\ \frac{1}{xy} & \text{pro } xy < 0 \end{cases}$$

   v bodech $A = [1,1]$, $B = [-2,3]$, $C = [0,1]$, $D = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right]$, $E = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right]$, $F = \left[\frac{5}{2}, 0\right]$.

   $\left[f(A) = 2, f(B) = -\frac{1}{6}, f(C) = 5, f(D) = -6, f(E) = \frac{16}{3}, f(F) = 5\right]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 2

Definiční obor funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- určovat definiční obory funkcí;
- znázorňovat definiční obory v kartézských souřadnicích.

Klíčová slova:

Definiční obor.

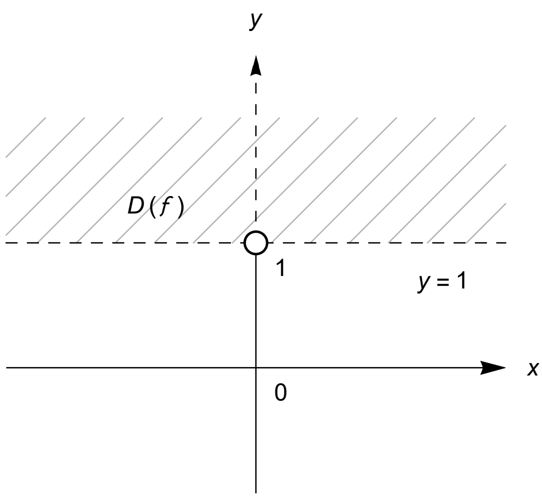
Připomínáme: Při určování definičního oboru vycházíme z těchto podmínek:

- jmenovatel zlomku musí být různý od čísla 0,
- odmocněnec v odmocnině se sudým odmocnitelem musí být nezáporný,
- argument logaritmu musí být kladný,
- argument funkce tangens, resp. kotangens, musí být různý od lichých, resp. sudých, násobků čísla $\frac{\pi}{2}$,
- argument funkcí arkussinus a arkuskosinus musí patřit do intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Příklad 2.1 *Určeme a načrtněme definiční obor* $D(f)$ *funkce* $f\,(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{x}$.

Řešení

Definiční obor určíme z podmínek
$\sqrt{y-1} \neq 0 \wedge y - 1 \geq 0 \wedge x \neq 0$
Z prvních dvou podmínek obdržíme
$y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1$
Množina bodů $[x, y]$, pro něž platí $y > 1$ je polorovina neobsahující počátek (zjistíme dosazením souřadnic bodu $[0, 0]$) s hraniční přímkou $y = 1$.
Množina bodů $[x, y]$, pro něž platí $x = 0$ je osa y, ta do $D(f)$ nepatří.



Obr. 2.1 $D\,(f) = \left\{[x,y] \in R^2;\ y > 1 \wedge x \neq 0\right\}$
Zdroj: Vlastní zpracování

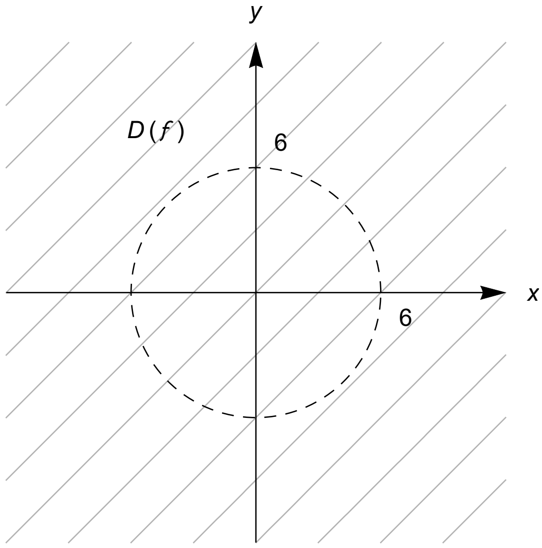
Definiční obor je horní polorovina s hraniční přímkou $y = 1$, bez bodů přímky $y = 1$ a bez bodů osy y.

■

Příklad 2.2 *Určeme a načrtněme definiční obor* $D(f)$ *funkce* $f(x,y) = \frac{2xy}{36-x^2-y^2}$.

Řešení

Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, tj. $36 - x^2 - y^2 \neq 0$. Nerovnici upravíme na tvar $x^2 + y^2 \neq 36$.
Víme, že $x^2 + y^2 = 6^2$ je rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem 6.



Obr. 2.2 $D(f) = \{[x,y] \in R^2;\ x^2 + y^2 \neq 36\}$
Zdroj: Vlastní zpracování

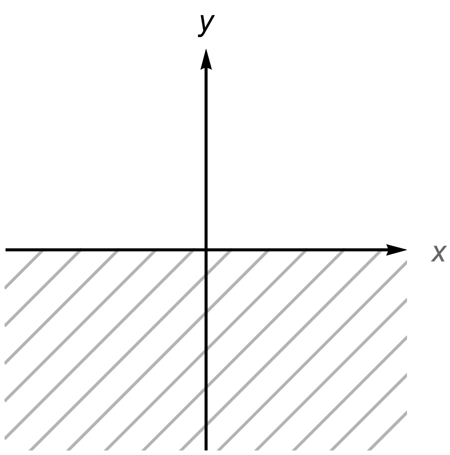
Definičním oborem funkce je rovina R^2 s výjimkou všech bodů, které leží na kružnici $x^2 + y^2 = 36$.

■

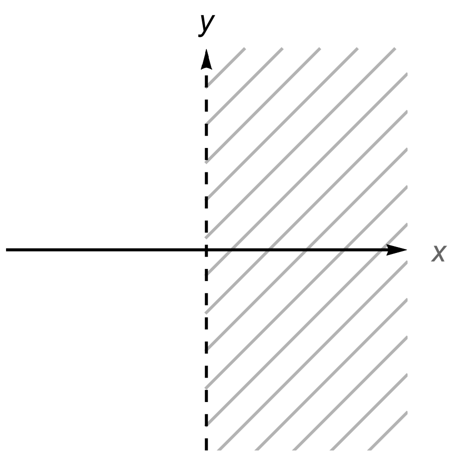
Příklad 2.3 *Určeme a načrtněme definiční obor* $D(f)$ *funkce* $f(x,y) = \sqrt{-2y} + \frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Řešení

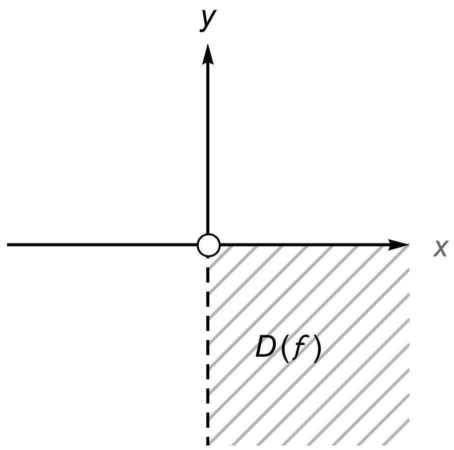
Pod sudou odmocninou musí být číslo nezáporné, tedy $-2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0$ a také $x \geq 0$; poněvadž $\sqrt{x}$ je ve jmenovateli musí zároveň platit $\sqrt{x} \neq 0$, tedy $x > 0$.
Určíme průnik množin $y \leq 0$ a $x > 0$; obě množiny jsou poloroviny.



$y \leq 0$



$x \geq 0$



Obr. 2.3 $D\left(f\right)=\left\{[x,y]\in R^2;\ y\leq 0\wedge x>0\right\}$
Zdroj: Vlastní zpracování

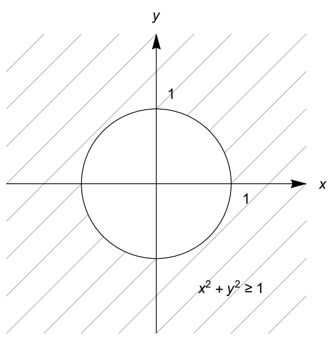
Definičním oborem jsou vnitřní body IV. kvadrantu včetně bodů části osy x, ale bez bodů osy y. ■

Příklad 2.4 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce*
$f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2-1}\log\left(9-x^2-y^2\right)$.

Řešení

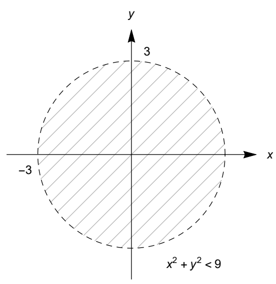
Definiční obor určíme z podmínek
$x^2+y^2-1\geq 0\wedge 9-x^2-y^2>0.$
Pod sudou odmocninou musí být nezáporný výraz, tj. $x^2+y^2-1\geq 0.$
Upravíme nerovnost $x^2+y^2-1\geq 0\Rightarrow x^2+y^2\geq 1.$
Množina bodů vyhovujících nerovnosti jsou vnější body kružnice o rovnici $x^2+y^2=1$, včetně této kružnice. Kružnice má střed v počátku a poloměr 1.

(a)

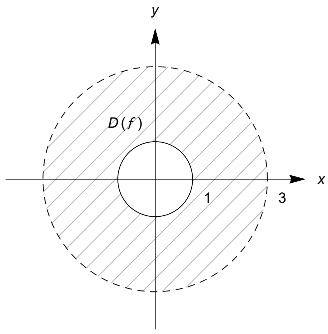


Podmínku $9-x^2-y^2>0$ jsme obdrželi na základě toho, že argument logaritmu musí být kladný. Upravíme nerovnost $9-x^2-y^2>0\Rightarrow x^2+y^2<9$. Odpovídající množina bodů jsou body vnitřku kružnice o rovnici $x^2+y^2=3^2$ se středem v počátku a poloměrem 3.

(b)



Zda jde o body vnitřku či vnějšku kružnice zjistíme dosazením souřadnic vhodně zvoleného bodu, nejlépe počátku $[0,0]$.



Obr. 2.4 $D\left(f\right)=\left\{[x,y]\in R^2;\ 1\leq x^2+y^2<9\right\}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Definiční obor je průnikem množin (a) a (b).
Definiční obor jsou body mezikruží včetně kružnice $x^2+y^2=1$ s výjimkou bodů kružnice $x^2+y^2=3^2$.

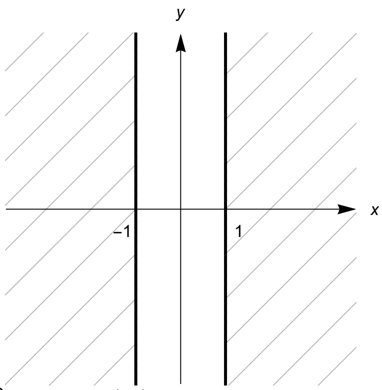
■

Příklad 2.5 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{4-y^2}$.*

Řešení

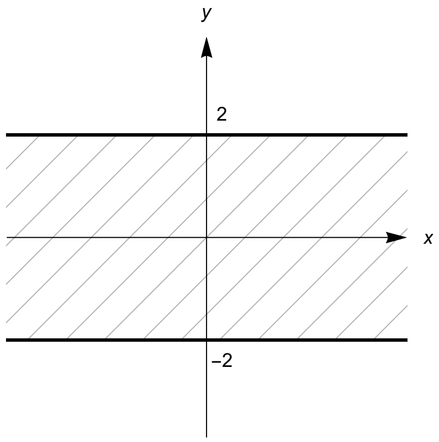
Pod sudou odmocninou musí být nezáporné výrazy, tedy $x^2-1\geq 0$ a $4-y^2\geq 0$.
Z podmínky $x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow |x|\geq 1\Leftrightarrow(x\leq -1\vee x\geq 1)$.
Množiny bodů $x\leq -1$ a $x\geq 1$ jsou poloroviny s příslušnými hraničními přímkami.

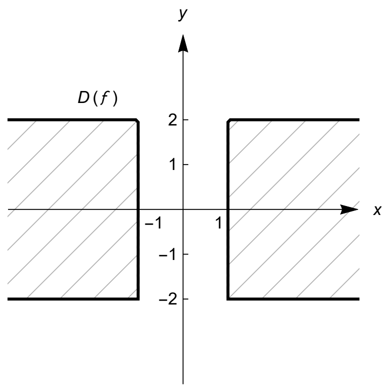
(a)



Z podmínky $4-y^2\geq 0\Rightarrow y^2\leq 4\Rightarrow |y|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq y\leq 2$.
Množina bodů $-2\leq y\leq 2$ je vodorovný pás mezi přímkami $y=-2$ a $y=2$, včetně těchto přímek.

(b)





Obr. 2.5 $D\left(f\right)=\left\{[x,y]\in R^2;\ |x|\geq 1\wedge |y|\leq 2\right\}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Definiční obor obdržíme jako průnik množin (a) a (b).

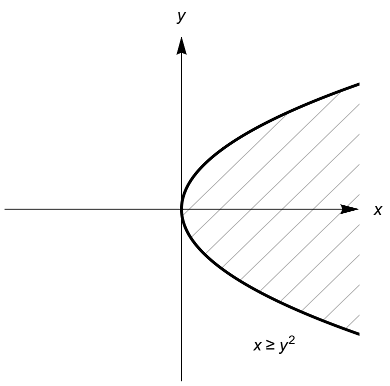
■

Příklad 2.6 *Určeme a načrtněme definiční obor* $D(f)$ *funkce* $f\left(x,y\right)=\sqrt{x-y^2}+\sqrt{y-x^2}$.

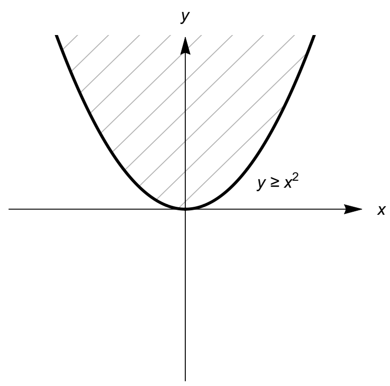
Řešení

Pod sudou odmocninou musí být výraz nezáporný, tedy $x-y^2\geq 0$ a zároveň $y-x^2\geq 0$.
Po úpravě obdržíme $x\geq y^2$ a $y\geq x^2$.
$x=y^2$ je rovnice paraboly s vrcholem v počátku a osou v kladné části osy x
$y=x^2$ je rovnice paraboly s vrcholem v počátku a osou v kladné části osy y

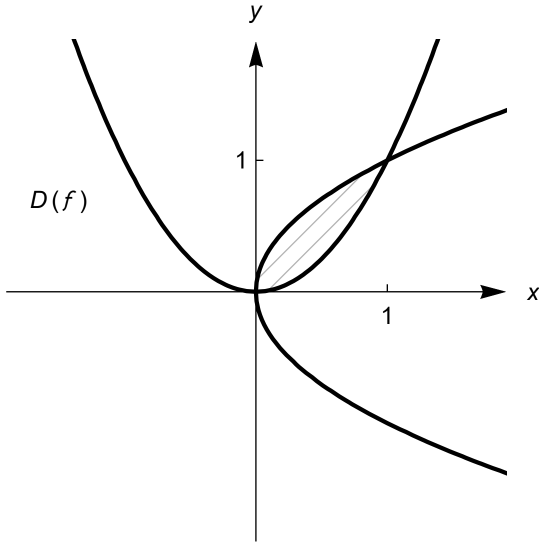
(a)



(b)



Množiny bodů vyhovující nerovnostem $x \geq y^2$ a $y \geq x^2$ jsou vnitřní body parabol včetně jejich hranice.



Obr. 2.6 $D\left(f\right) = \left\{[x, y] \in R^2;\ x \geq y^2 \wedge y \geq x^2\right\}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Definiční obor je průnik množin (a) a (b).

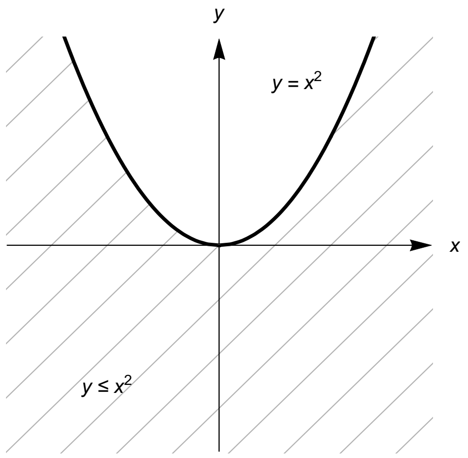
∎

Příklad 2.7 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce $f\left(x, y\right) =$* arccos $\frac{y}{x^2}$

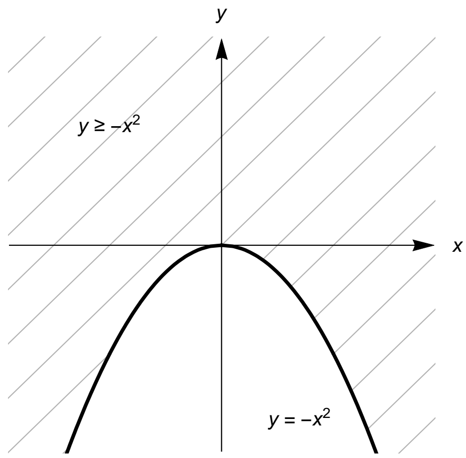
Řešení

Argument funkce arkuskosinus musí patřit do intervalu $\langle -1, 1\rangle$, tj.
$-1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 1$ a jmenovatel zlomku musí být nenulový, tj. $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$.
Upravíme nerovnost $-1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 1$, pak obdržíme $-x^2 \leq y$ a $y \leq x^2$.
Ohraničující křivky množin vyhovujících nerovnostem jsou paraboly s vrcholy v počátku, přičemž parabola $y = x^2$ je otevřená směrem dolů a parabola $y = x^2$ směrem nahoru.

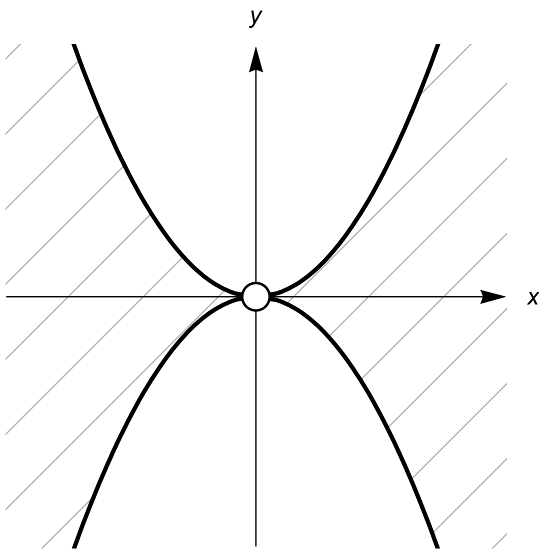
(a)



(b)



Odpovídající množiny jsou vnější a hraniční body parabol.



Obr. 2.7 $D\left(f\right)=\left\{\left[x,y\right]\in R^2;\ -x^2\leq y\leq x^2\wedge x\neq 0\right\}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Definiční obor je průnikem množin (a) a (b), ale bez počátku, protože $x\neq 0$.

■

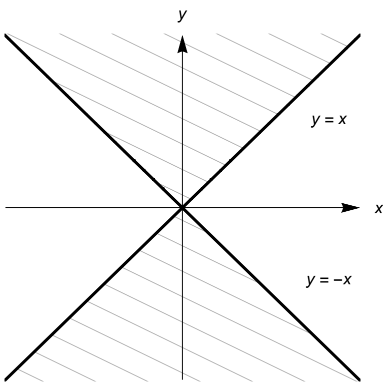
Příklad 2.8 *Určeme a načrtněme definiční obor* $D(f)$ *funkce* $f\left(x,y\right)=\sqrt{\text{arctg}\,\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2-9}}$.

Řešení

Vzhledem k sudé odmocnině píšeme podmínku arctg $\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2-9}\geq 0$ a vzhledem ke zlomku $x^2+y^2-9\neq 0$.
Argument funkce arkustangens musí být větší nebo roven nule, aby hodnota funkce byla nezáporná.

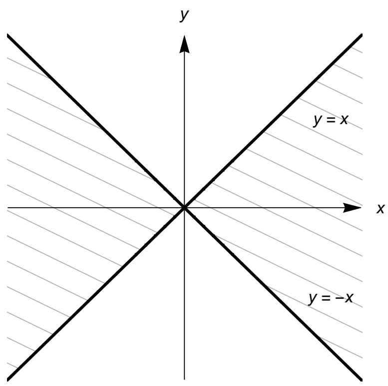
$$\begin{array}{rcr}
\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2-9}\geq 0 & \wedge & x^2+y^2-9\neq 0\Rightarrow x^2+y^2\neq 3^2\\
\left[y^2-x^2\geq 0\wedge x^2+y^2-9>0\right] & \vee & \left[y^2-x^2\leq 0\wedge x^2+y^2-9<0\right]\\
\left[\left(y-x\right)\left(y+x\right)\geq 0\wedge x^2+y^2>3^2\right] & \vee & \left[\left(y-x\right)\left(y+x\right)\leq 0\wedge x^2+y^2<3^2\right]\\
\left[\begin{array}{l} y\geq x\wedge y\geq -x\\ \quad\text{nebo}\qquad\wedge\, x^2+y^2>3^2\\ y\leq x\wedge y\leq -x\end{array}\right] & \vee & \left[\begin{array}{l} y\geq x\wedge y\leq -x\\ \quad\text{nebo}\qquad\wedge\, x^2+y^2<3^2\\ y\leq x\wedge y\geq -x\end{array}\right]
\end{array}$$

(a)



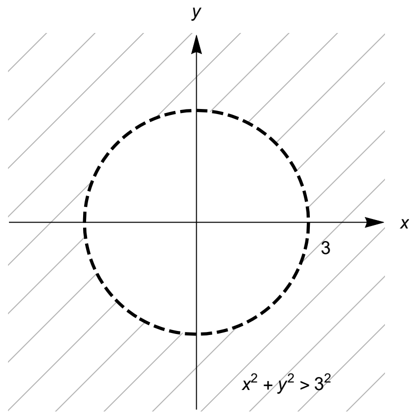
$(y\geq x\wedge y\geq -x)\vee(y\leq x\wedge y\leq -x)$

(b)

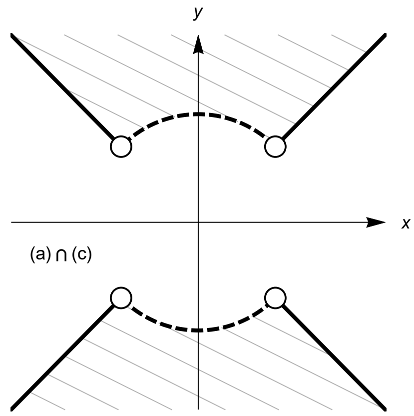


$(y\geq x\wedge y\leq -x)\vee(y\leq x\wedge y\geq -x)$

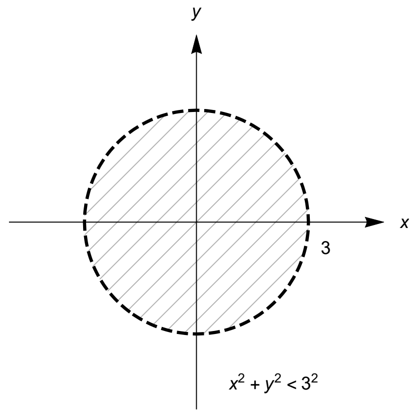
(c)



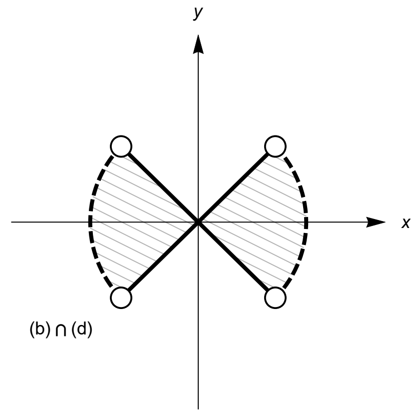
(e)

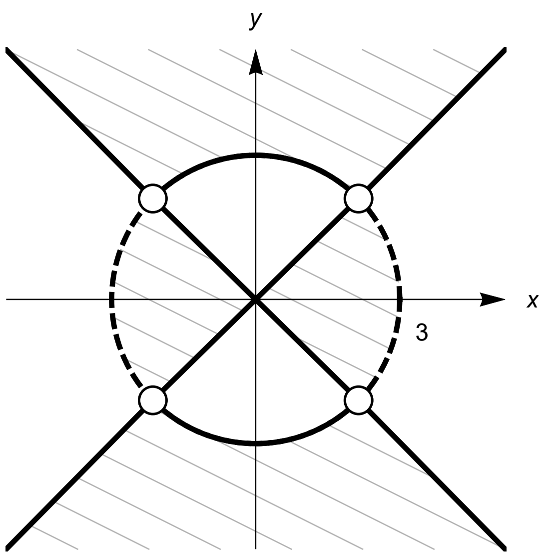


(d)



(f)





Obr. 2.8 Definiční obor funkce $f\left(x,y\right)=\sqrt{\text{arctg}\,\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2-9}}$

Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 2.9 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce*
$f\left(x,y\right)=\ln\frac{-5}{x^2-y^2}+\sqrt{4y-y^2-x^2}$.

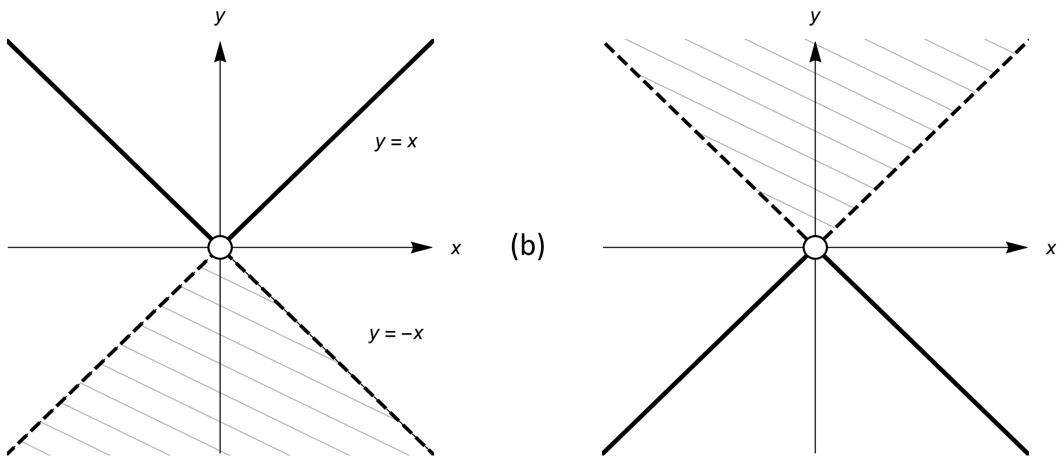
Řešení

Argument logaritmu musí být kladný, což nastane pro $x^2-y^2<0$ a pod sudou odmocninou musí být číslo nezáporné, tj. $4y-y^2-x^2\geq 0$.
Postupně obě nerovnosti upravíme.

$$x^2-y^2<0\Leftrightarrow(x+y)(x-y)<0\Leftrightarrow\{[x-y>0\wedge x+y<0]\vee[x-y<0\wedge x+y>0]\}$$
$$(y<x\wedge y<-x)\vee(y>x\wedge y>-x)$$

Znázorníme odpovídající množiny.

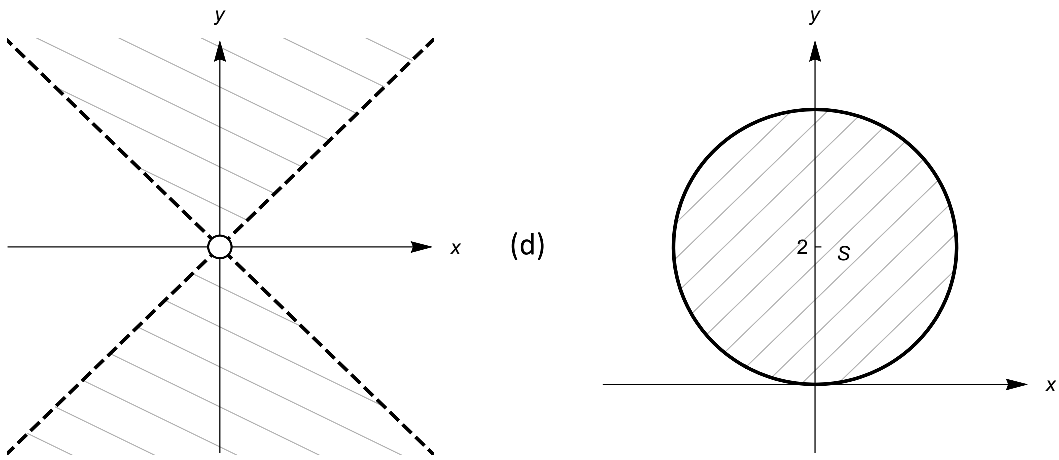
(a) (b)



$y<x\wedge y<-x$ $y>x\wedge y>-x$

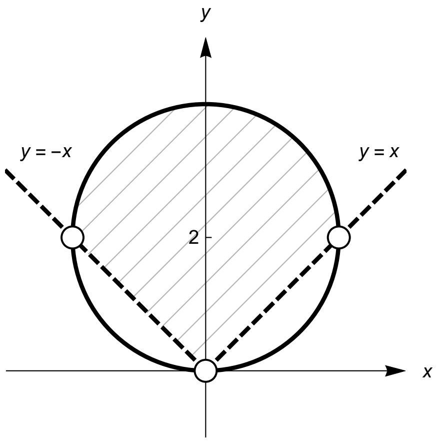
Nerovnost $x^2-y^2\leq 0$ je splněna pro body sjednocení množin (a) a (b).

(c) (d)



$x^2-y^2<0$ $4y-y^2-x^2\geq 0$

Upravíme nerovnost $4y-y^2-x^2\geq 0$.
Nejdříve budeme pracovat s rovnicí $4y-y^2-x^2=0$.
Upravíme ji na tvar $x^2+y^2-4y=0$.
Zřejmě se jedná o kružnici, proto provedeme další úpravy.
$x^2+(y-2)^2=4$, což je rovnice kružnice se středem $S=[0;2]$ a poloměrem $r=2$.
Body vyhovující nerovnosti $4y-y^2-x^2\geq 0$ jsou vnitřní a hraniční body výše uvedené kružnice.



Obr. 2.9 Definiční obor funkce $f(x, y) = \ln \frac{-5}{x^2 - y^2} + \sqrt{4y - y^2 - x^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Definiční obor je průnikem množin (c) a (d).

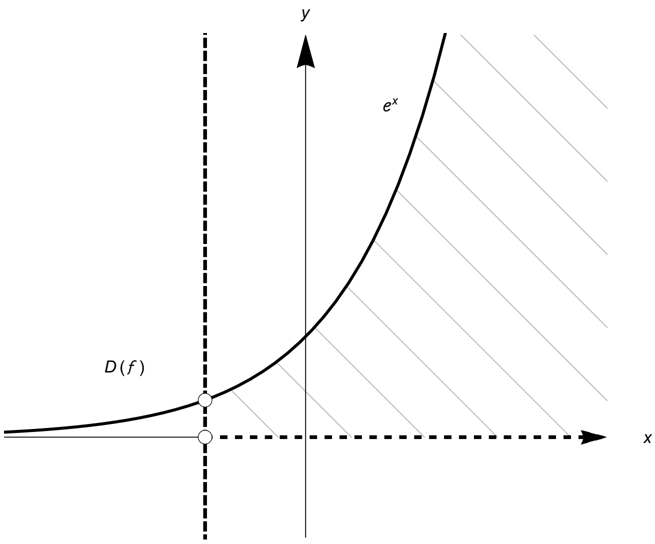
■

Příklad 2.10 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce* $f(x, y) = \sqrt{x - \ln y} + \ln(x + 1)$.

Řešení

Podmínky:

$$
\begin{aligned}
x - \ln y &\geq 0 \qquad \wedge \qquad y > 0 \qquad \wedge \qquad x + 1 > 0 \\
x &\geq \ln y \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x > -1 \\
\ln e^x &\geq \ln y \\
y &\leq e^x
\end{aligned}
$$



Obr. 2.10 Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{x - \ln y} + \ln(x + 1)$
Zdroj: Vlastní zpracování

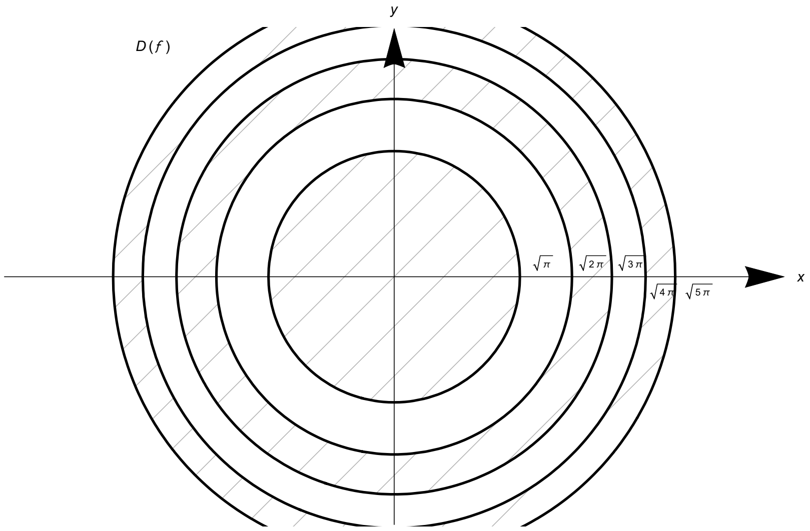
Definiční obor je průnikem všech tří množin a je to část roviny ohraničená exponenciálou $y = e^x$, přímkou $x = -1$ a osou x.

■

Příklad 2.11 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce $f\left(x,y\right)=\sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}$.*

Řešení

Definiční obor určíme z podmínky $\sin\left(x^2+y^2\right)\geq 0$.
Odtud obdržíme
$0+2k\pi\leq x^2+y^2\leq\pi+2k\pi$, kde $k\in\mathbb{N}_0$ (k je přirozené číslo a nula)
$2k\pi\leq x^2+y^2\leq\left(2k+1\right)\pi$
Je-li $k=0$, pak $0\leq x^2+y^2\leq\pi$.
Tuto nerovnost splňují body kruhu ohraničeného kružnicí $x^2+y^2=\pi$, která má střed v počátku a poloměr $\sqrt{\pi}$.
Je-li $k=1$, pak $2\pi\leq x^2+y^2\leq 3\pi$.
Nerovnost splňují body mezikruží ohraničeného kružnicemi $x^2+y^2=2\pi$ a $x^2+y^2=3\pi$.
Pro $k=2$ obdržíme $4\pi\leq x^2+y^2\leq 5\pi$ atd.



Obr. 2.11 $D(f)=\left\{[x,y]\in R^2;\ 2k\pi\leq x^2+y^2\leq\left(2k+1\right)\pi, k\in\mathbb{N}_0\right\}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Definičním oborem je kruh a nekonečná množina mezikruží.

■

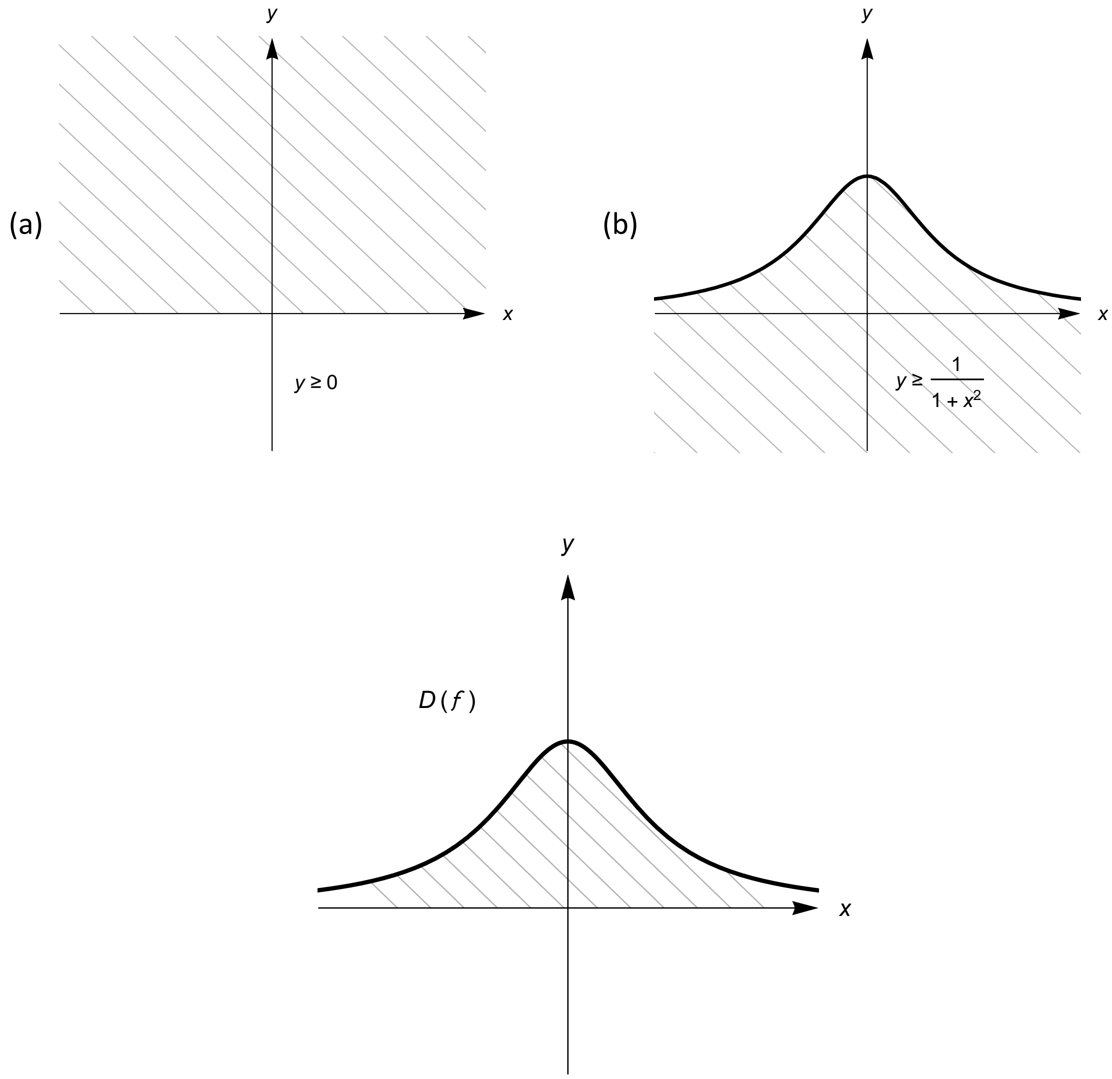
Příklad 2.12 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce*
$f\left(x,y\right)=\arccos\left[2y\left(1+x^2\right)-1\right]$.

Řešení

Z podmínky pro argument funkce arkuskosinus dostaneme, že $2y\left(1+x^2\right)-1$ musí patřit do intervalu $\langle -1;1\rangle$.

$$\text{Tedy}\qquad -1\leq 2y\left(1+x^2\right)-1\leq 1,$$
$$\text{odtud}\qquad 0\leq 2y\left(1+x^2\right)\wedge 2y\left(1+x^2\right)\leq 2.$$

Nerovnost $0\leq 2y\left(1+x^2\right)$ je splněna pro $y\geq 0$, poněvadž výraz $1+x^2>0$ pro všechny body $[x,y]\in R^2$.
Podmínku $y\geq 0$ splňují body horní poloroviny včetně hraniční přímky $y=0$.
Úpravou nerovnosti $2y\left(1+x^2\right)\leq 2$ obdržíme $y\leq\frac{1}{1+x^2}$.
Vyšetřením průběhu funkce $y=\frac{1}{1+x^2}$ zjistíme, jak vypadá její graf.
Podmínku $y\leq\frac{1}{1+x^2}$ splňují body části roviny nacházející se na křivce a pod křivkou $y=\frac{1}{1+x^2}$.



Obr. 2.12 $D(f) = \left\{[x, y] \in R^2;\ 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\right\}$

Zdroj: Vlastní zpracování

Definiční obor je průnikem množin (a) a (b).

■

Příklad 2.13 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce*
$f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 1) + \frac{1}{x} \ln(x^2 - y)$.

Řešení

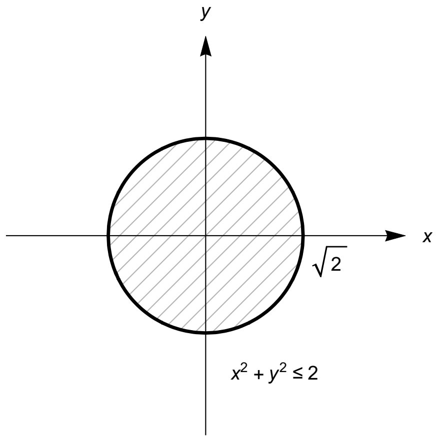
Argument funkce arkussinus musí patřit do intervalu $\langle -1; 1\rangle$.
Definičním oborem prvního sčítance je proto množina bodů, které splňují nerovnosti

$$-1 \leq x^2 + y^2 - 1 \leq 1$$

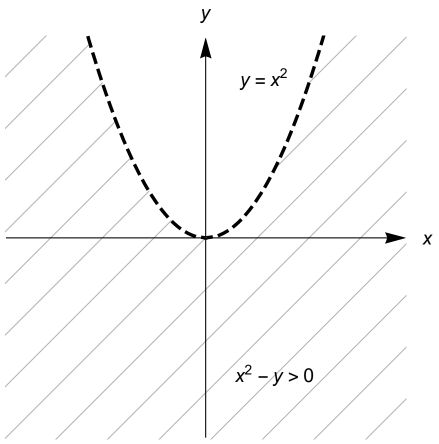
Odtud

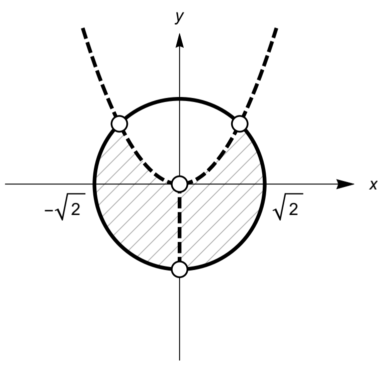
$$\begin{array}{lcl} -1 \leq x^2 + y^2 - 1 & \wedge & x^2 + y^2 - 1 \leq 1 \\ 0 \leq x^2 + y^2 & \wedge & x^2 + y^2 \leq 2 \end{array}$$

Podmínku $0 \leq x^2 + y^2$ splňují všechny body $[x, y] \in R^2$.
Podmínku $x^2 + y^2 \leq 2$ splňují všechny body kruhu s hraniční kružnicí $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$.



Další podmínku $x \neq 0$ splňují všechny body roviny R^2 s výjimkou osy y.
Poslední podmínku $x^2 - y > 0$ upravíme na tvar $y < x^2$. Rovnice $y = x^2$ je rovnicí paraboly s vrcholem v počátku a osou v kladné části osy y.
Body vyhovující podmínce $x^2 - y > 0$ jsou vnější body paraboly o rovnici $y = x^2$.





Obr. 2.13 Definiční obor funkce $f(x, y) = \text{arcsin}\left(x^2 + y^2 - 1\right) + \frac{1}{x}\ \text{ln}\left(x^2 - y\right)$
Zdroj: Vlastní zpracování

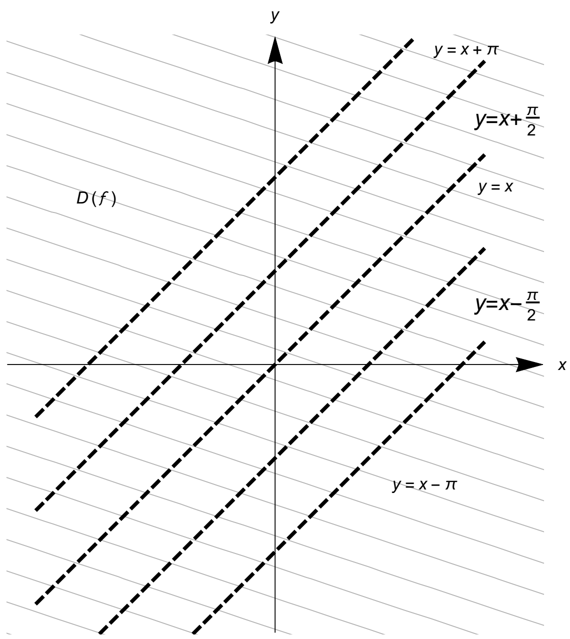
Definiční obor je průnikem všech tří množin.

■

Příklad 2.14 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce*
$f\left(x,y\right)=\frac{2xy^2}{\text{cotg}\left(y-x\right)}$.

Řešení

Argument funkce kotangens musí být různý od celých násobků čísla π, tedy
$y-x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
Upravíme na tvar $y\neq x+k\pi$.
Jmenovatel zlomku musí být nenulový, tedy cotg $(y-x)\neq 0\Rightarrow y-x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
Upravíme na tvar $y\neq x+\frac{\pi}{2}+k\pi$
$y\neq x+\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}$



Obr. 2.14 $D(f)=\left\{[x,y]\in R^2;\ y\neq x+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Definičním oborem je množina bodů roviny R^2 s výjimkou všech bodů přímek o rovnici $y=x+k\frac{\pi}{2}$, kde $k\in\mathbb{Z}$.

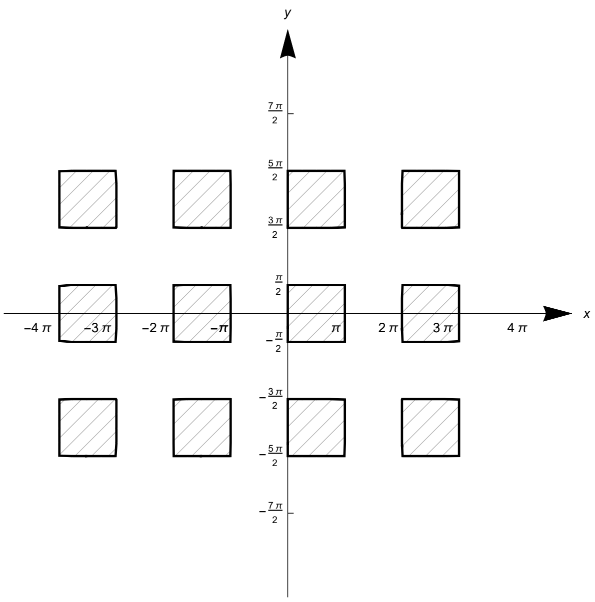
■

Příklad 2.15 *Určeme a načrtněme definiční obor $D(f)$ funkce* $f(x,y)=\sqrt{\sin x\cos y}$.

Řešení

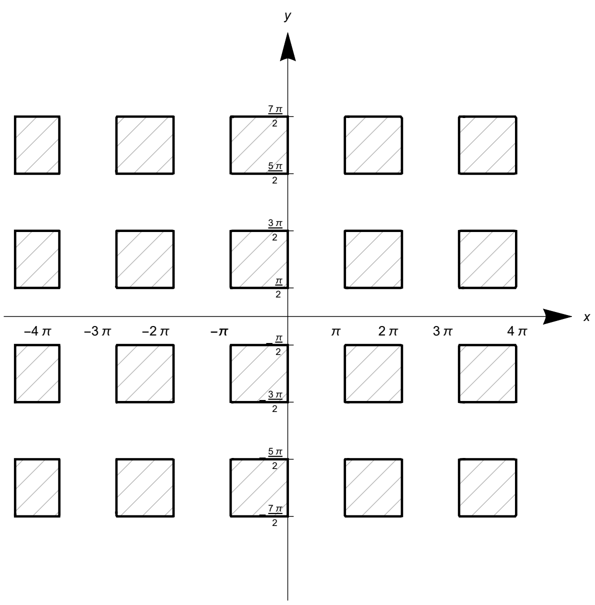
Vyjdeme z podmínky $\sin x\cos y\geq 0$, což je splněno pokud $\sin x\geq 0$ a $\cos y\geq 0$ nebo $\sin x\leq 0$ a $\cos y\leq 0$.

(a) $\sin x\geq 0$ je-li $x\in\langle 0+2k\pi;\pi+2k\pi\rangle, k\in\mathbb{Z}$
$\cos y\geq 0$ je-li $y\in\left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle, k\in\mathbb{Z}$



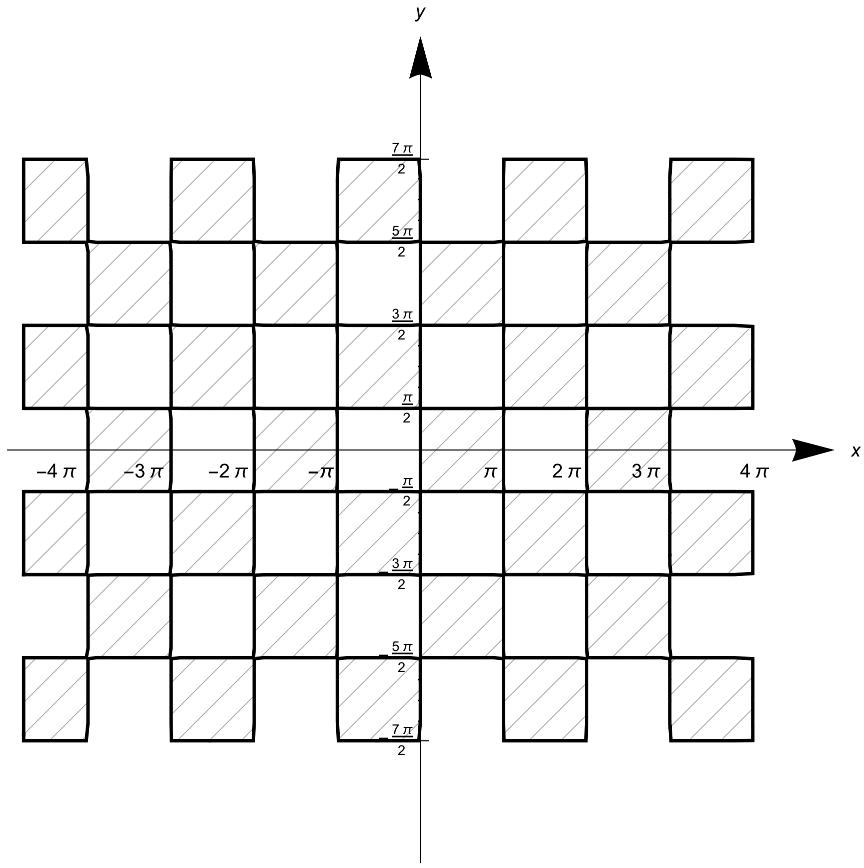
$\sin x\geq 0\wedge\cos y\geq 0$

(b) $\sin x\leq 0$ je-li $x\in\langle\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi\rangle, k\in\mathbb{Z}$
$\cos y\leq 0$ je-li $y\in\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right\rangle, k\in\mathbb{Z}$



$\sin x\leq 0\wedge\cos y\leq 0$

Definiční obor je sjednocením množin (a) a (b).



Obr. 2.15 Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{\sin x \cos y}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Definiční obor je neohraničená šachovnice souměrná podle osy x.

■

Σ

Definiční obory určujeme ze známých podmínek, které stanovíme z předpisu funkce. Podmínky jsou vyjádřeny zpravidla ve tvaru nerovnic. Vyřešením nerovnice, případně soustavy nerovnic, obdržíme definiční obor.

?

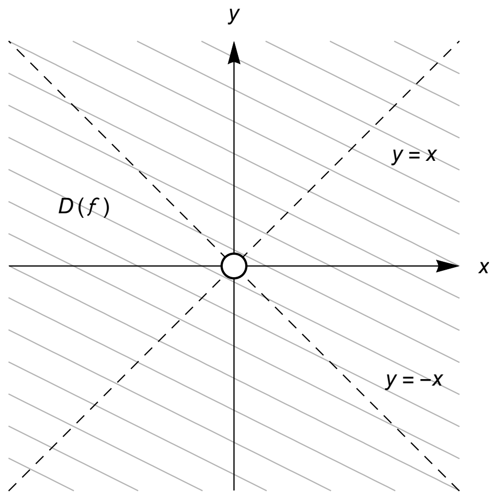
1. *Určete a načrtněte definiční obor $D(f)$ funkce f.*

- $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 - y^3}$

  $[D(f) = R^2]$

- $f(x,y) = \frac{1}{y^2 - x^2}$

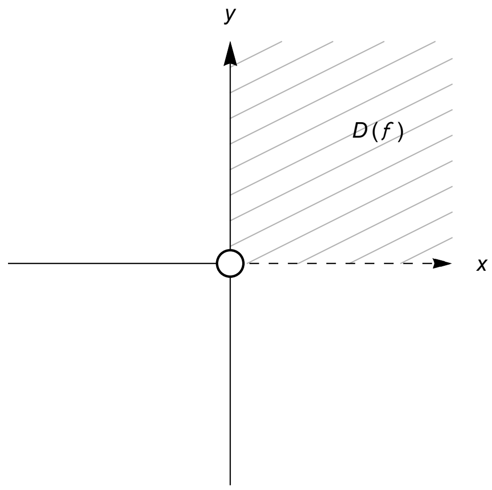
  [



rovina R^2 s výjimkou všech bodů přímek $y = x$ a $y = -x$]

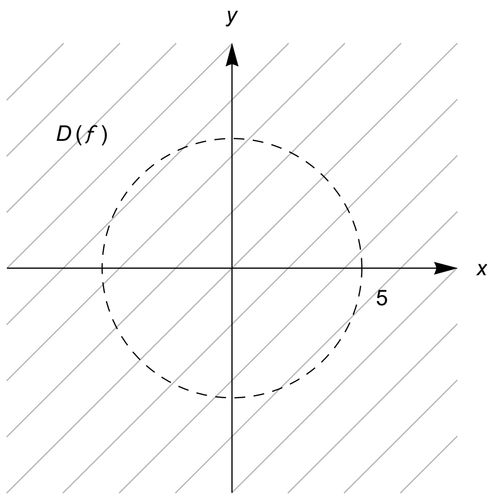
- $f(x,y) = \sqrt{4x} - \frac{3x}{\sqrt{y}}$

  [



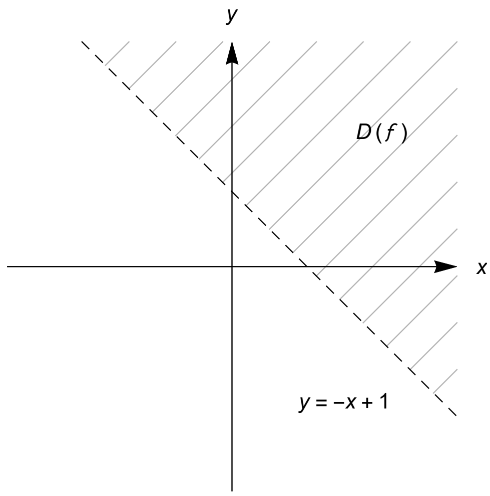
body I kvadrantu včetně kladné části osy y s výjimkou kladné části osy x]

- $f(x,y) = \text{arctg}\,\frac{2y}{x^2+y^2-25}$



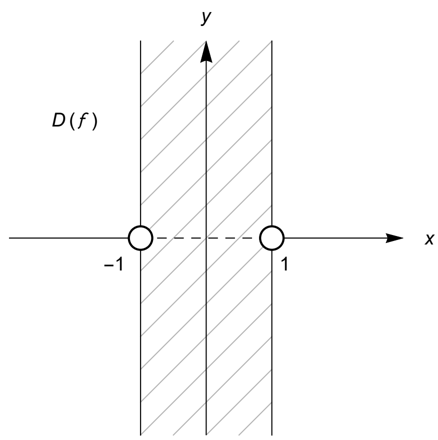
rovina R^2 s výjimkou bodů
kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = 25$

- $f(x,y) = \sqrt{\ln(x+y)}$



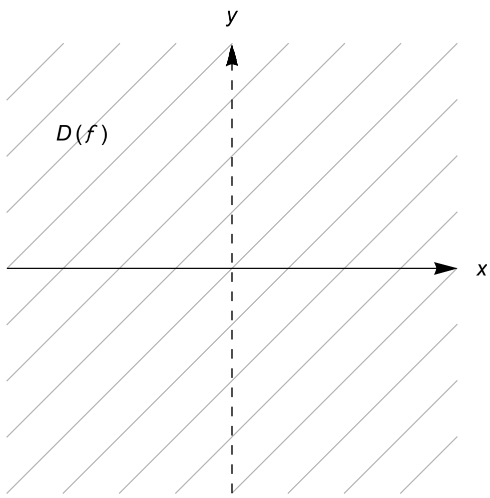
polorovina s výjimkou bodů
hraniční přímky $y = -x + 1$
neobsahující počátek

- $f(x,y) = \frac{1}{y} + \arccos x$



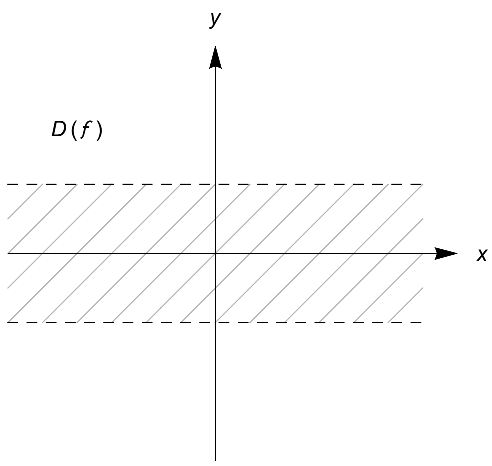
svislý pás mezi přímkami $x = -1$
a $x = 1$ s výjimkou bodů osy x

- $f(x, y) = \text{arccotg}\, \frac{y^2}{x}$



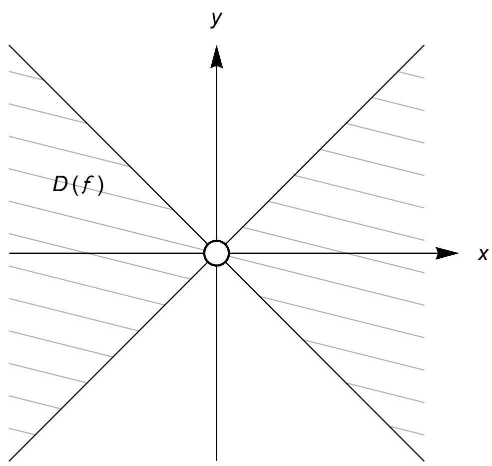
rovina R^2 kromě osy y

- $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{1-y^2}}$



vodorovný pás mezi přímkami $y = 1$ a $y = -1$

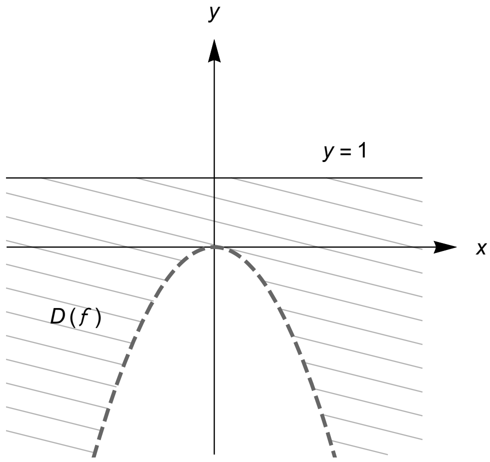
- $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$



část roviny R^2 vymezená přímkami o rovnicích $y = x$ a $y = -x$ obsahující osu x mimo počátek

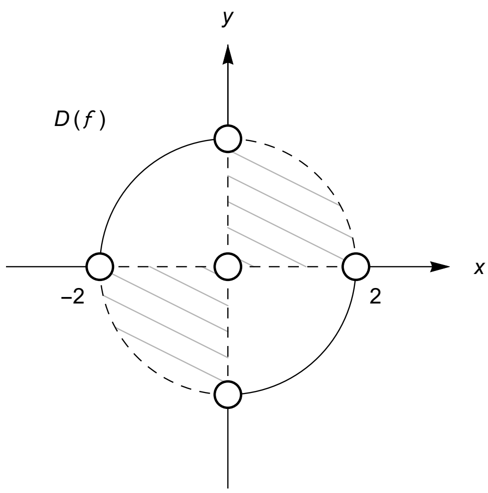
?

- $f\left(x,y\right)=\ln\left(x^2+y\right)+\sqrt{1-y}$



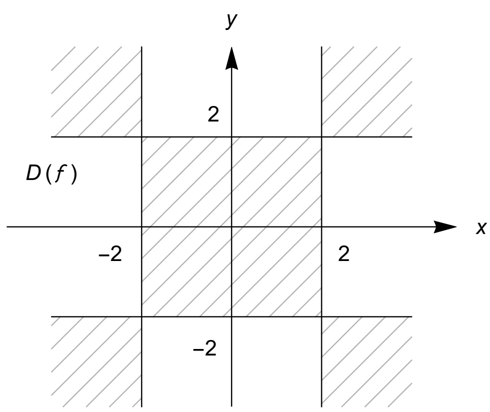
část roviny R^2 omezená přímkou $y=1$ a parabolou $y=-x^2$

- $f\left(x,y\right)=\frac{\ln\left(xy\right)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$



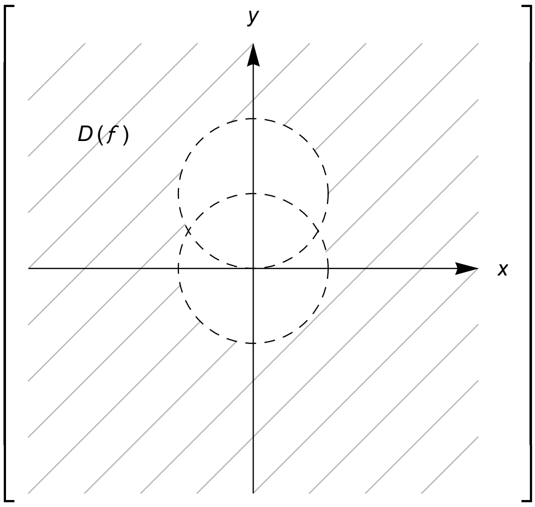
část kruhu v I. a III. kvadrantu
s výjimkou bodů souřadnicových os
a bodů kružnice $x^2+y^2=4$

- $f\left(x,y\right)=\sqrt{\left(4-x^2\right)\left(4-y^2\right)}$

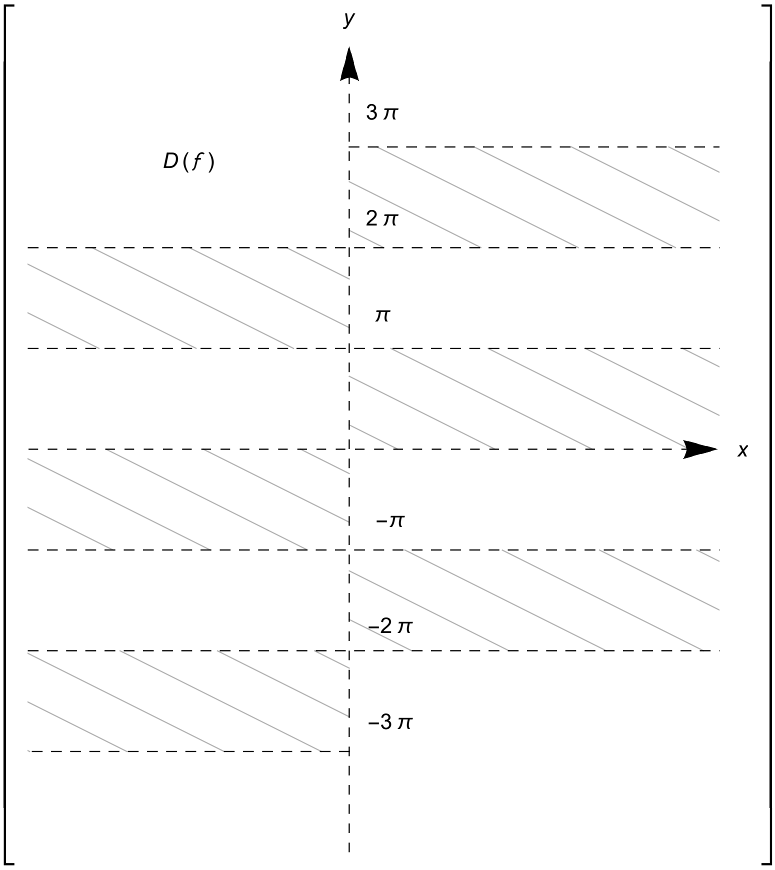


?

- $f(x,y) = \dfrac{\ln\left(x^2-2y+y^2\right)}{\sqrt{\ln\left(x^2+y^2\right)}}$

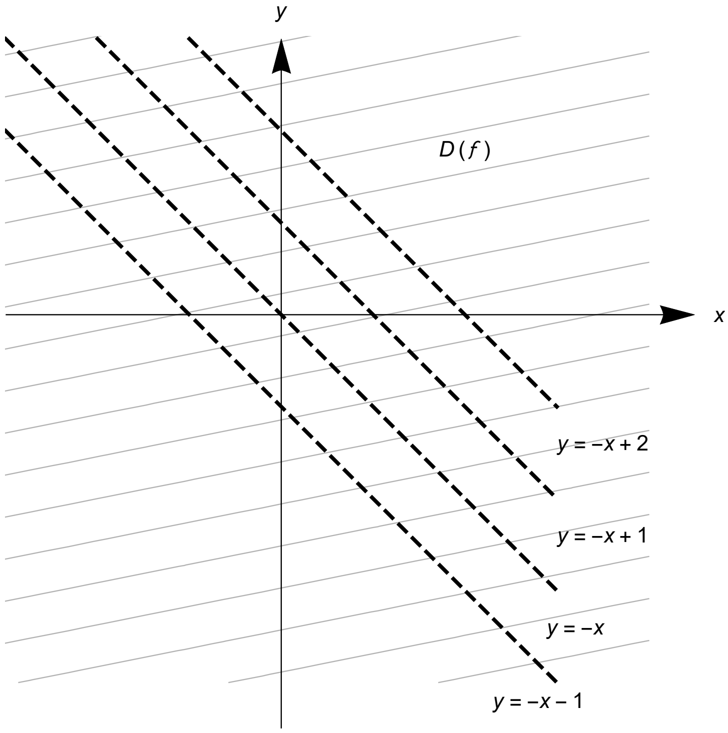


- $f(x,y) = \ln(x \sin y)$



?

- $f(x, y) = \frac{1}{\sin[\pi(x+y)]}$



rovina R^2 výjimkou bodů přímek o rovnicich $y = -x + k, k \in \mathbb{Z}$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 3

Graf funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- stanovit a načrtnout graf funkce;
- určit D(f) a H(f).

Klíčová slova:

Graf funkce, řez grafu rovinou, rotační plocha.

Připomínáme: $D(f) \subset R^2$, $H(f) \subset R$, $G(f) \subset R^3$

Příklad 3.1 *Určeme definiční obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$ a graf $G(f)$ funkce* $f(x,y) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$.

Řešení

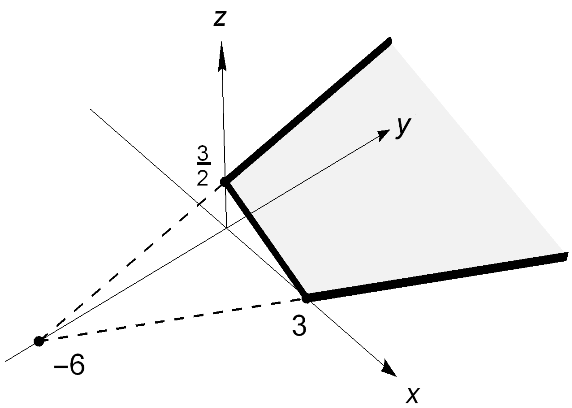
$D(f) = R^2$
Protože $z = f(x,y)$, můžeme psát

$$z = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$$

Rovnici upravíme na tvar

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} + z = \frac{3}{2} \quad / \cdot \frac{2}{3}$$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{\frac{3}{2}} = 1,$ což je úsekový tvar rovnice roviny.



Obr. 3.1 Graf funkce $f(x,y) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Grafem funkce je rovina, která na osách x, y a z vytíná úseky 3,-6 a $\frac{3}{2}$. Obor hodnot $H(f) = R$.
■

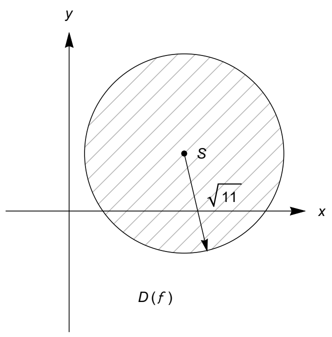
Příklad 3.2 *Určeme definiční obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$ a graf $G(f)$ funkce $f(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2 + 4x + 2y}$.*

Řešení

$D(f)$ určíme z podmínky: $6 - x^2 - y^2 + 4x + 2y \geq 0$
Upravíme na tvar

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y \leq 6$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \leq 6 + 4 + 1$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 11$$

Rovnice $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 11$ je rovnicí kružnice se středem v bodě $S = [2;1]$ a poloměrem $r = \sqrt{11}$.

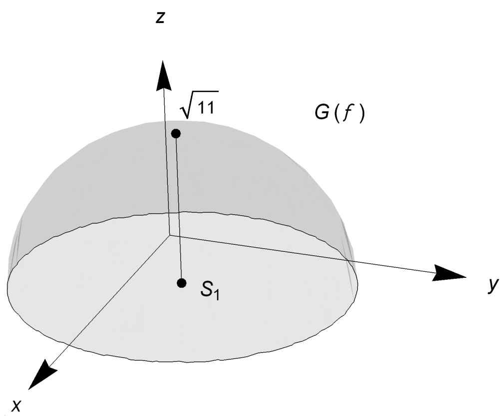


Definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2 + 4x + 2y}$

Rovnici $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2 + 4x + 2y}$ umocníme.

$$z^2 = 6 - x^2 - y^2 + 4x + 2y$$
$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 = 6$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11$$

Rovnice $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11$ je rovnice kulové sféry se středem v bodě $S_1 = [2;1;0]$ a poloměrem $r = \sqrt{11}$.



Obr. 3.2 Graf funkce $f(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2 + 4x + 2y}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Graf funkce je horní polovina této kulové sféry. $H(f) : z \in \left\langle 0; \sqrt{11} \right\rangle$.

■

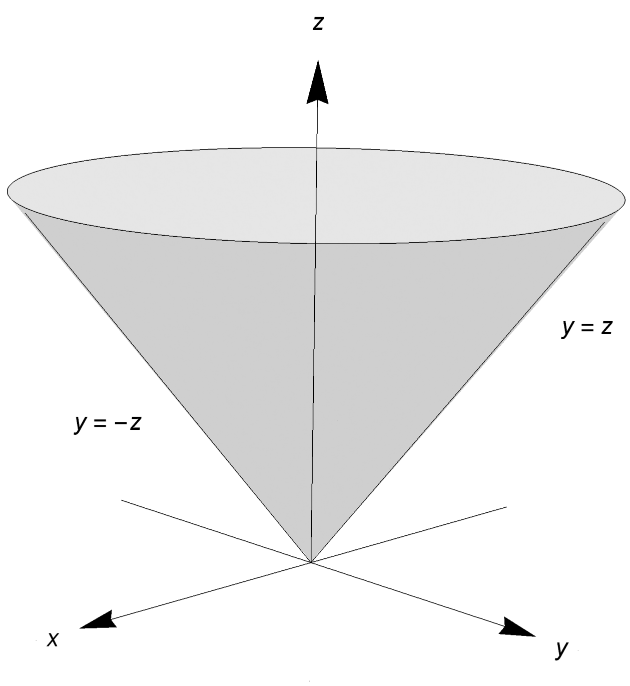
Příklad 3.3 *Určeme definiční obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$ a graf $G(f)$ funkce* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení

$D(f) = R^2$, poněvadž $x^2 + y^2 \geq 0$ pro všechny body $[x, y] \in R^2$
$H(f) = R_0^+; z \in \langle 0, \infty)$
Graf funkce sestrojíme pomocí řezů rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou (x, y).
Předpis funkce upravíme.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$$

Je-li $z = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$.
Řezem je bod $[0, 0, 0]$ - počátek soustavy souřadnic.
Je-li $z = 1 \Rightarrow 1 = x^2 + y^2$, pak řezem je kružnice se středem $S_1 = [0, 0, 1]$ a poloměrem $r_1 = 1$.
Je-li $z = 2 \Rightarrow 4 = x^2 + y^2$, pak řezem je kružnice se středem $S_2 = [0, 0, 2]$ a poloměrem $r_2 = 2$.
Sestrojíme řez grafu souřadnicovou rovinou (y, z); ta má rovnici $x = 0$.
Je-li $x = 0$, pak $z = \sqrt{y^2} \Rightarrow z = |y| \Rightarrow z_1 = y$ a $z_2 = -y$.
Řezem jsou tedy přímky.



Obr. 3.3 Graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Grafem funkce je rotační kuželová plocha s vrcholem $V = [0, 0, 0]$ v poloprostoru $z \geq 0$.
Plocha vznikne rotací přímky $y = z$ kolem osy z.

■

Příklad 3.4 *Určeme definiční obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$ a graf $G(f)$ funkce $f(x,y) = \frac{4}{x^2+y^2}$.*

Řešení

Určíme $D(f): x^2 + y^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$.
$D(f)$ je souřadnicová rovina (x,y) s výjimkou počátku soustavy souřadnic.
$D(f) = R^2 \setminus \{[0,0]\}$; $H(f) = (0,\infty)$
Při sestrojování grafu si pomůžeme řezy grafu souřadnicovými rovinami.
Řez grafu souřadnicovou rovinou (y,z), tj. rovinou o rovnici $x = 0$, je $z = \frac{4}{y^2}$ a řez grafu souřadnicovou rovinou (x,z), tj. rovinou o rovnici $y = 0$, je $z = \frac{4}{x^2}$.
Řez grafu rovinou (x,y) neexistuje, neboť souřadnice žádného bodu $[x,y,z]$ nesplňují rovnice

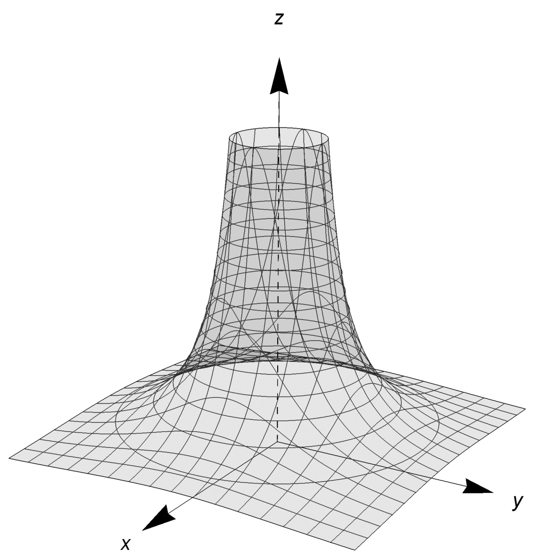
$$z = \frac{4}{x^2+y^2}, z = 0.$$

Sestrojíme-li řezy grafu rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou (x,y), tj. rovinami o rovnici $z = k$, $k \in R^+$, pak řezy jsou kružnice, jejichž rovnici získáme dosazením za z a úpravou.

$$k = \frac{4}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{4}{k},$$

což je rovnice kružnice se středem na ose z a poloměrem $r = \sqrt{\frac{4}{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}}$. Pokud k roste, pak se poloměr kružnic zmenšuje.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4}{x^2+y^2} = \left[\frac{4}{0}\right] = +\infty$$
$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{4}{x^2+y^2} = \left[\frac{4}{\infty}\right] = 0$$



Obr. 3.4 Graf funkce $f(x,y) = \frac{4}{x^2+y^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

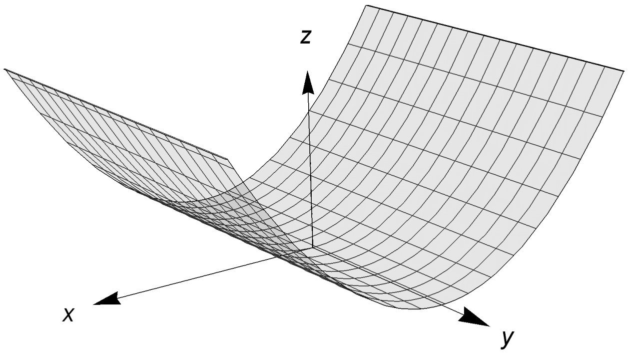
Grafem funkce je plášť rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $z = \frac{4}{x^2}$ kolem osy z.

■

Příklad 3.5 *Určeme definiční obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$ a graf $G(f)$ funkce $f(x, y) = x^2$.*

Řešení

$D(f) = R^2$
$H(f) = R_0^+$
Řezem grafu souřadnicovou rovinou (x, z) je parabola $z = x^2$.
Řezy grafu rovinami $y = k$ jsou paraboly $z = x^2$.



Obr. 3.5 Graf funkce $f(x, y) = x^2$
Zdroj: Vlastní zpracování

Grafem funkce je parabolická válcová plocha.

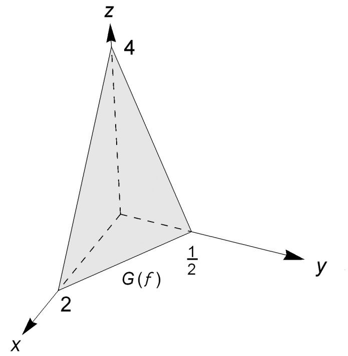
■

Graf funkce určíme úpravou jejího předpisu.
Položíme $z = f\left(x, y\right)$ a upravíme předpis funkce na takový tvar rovnice, z něhož dokážeme určit geometrický model grafu.
V některých případech je účelné využít řezů grafu funkce rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami.
Graf $G\left(f\right) \subset R^2$ a rovnoběžka s osou z může geometrický model grafu protnout nejvýše jedenkrát.

1. *Určete definiční obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$ a graf $G(f)$ funkce f. Graf $G(f)$ načrtněte.*

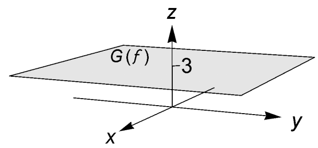
- $z = 4 - 2x - 8y$

  $D(f) = R^2, H(f) = R, G(f)$ je rovina $\frac{x}{2} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{4} = 1$

- $f\left(x, y\right) = 3$

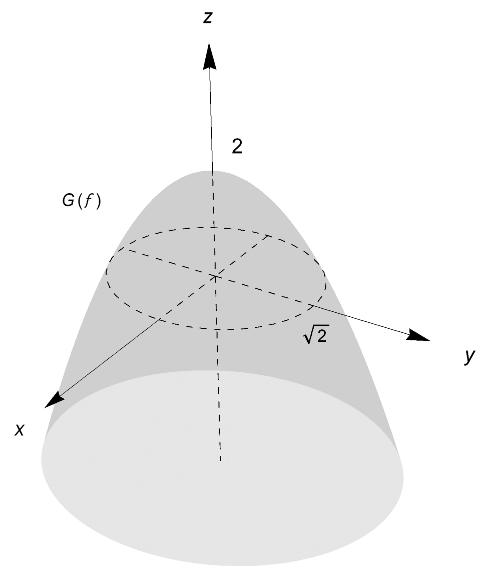
  $D(f) = R^2, H(f) = \{3\}$,
  $G(f)$ je rovina $z - 3 = 0$, která je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou (x, y) ve výšce 3

?

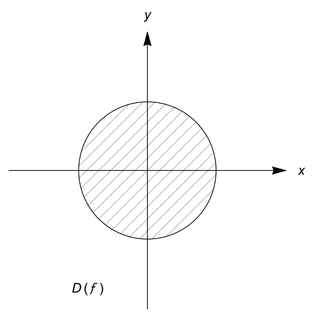
- $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$

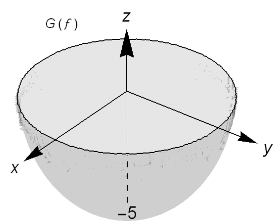
  $D(f) = R^2, H(f) : z \in (-\infty; 2\rangle$, $G(f)$je plášť rotačního paraboloidu s vrcholem v bodě $[0,0,2]$ otočený směrem dolů



- $z = -\sqrt{25 - x^2 - y^2}$

  $D(f)$ je kruh $x^2 + y^2 \le 25$, $H(f) : z \in \langle -5; 0\rangle$, $G(f)$ je polovina kulové sféry se středem v počátku a poloměrem 5, nacházející se v poloprostoru $\{[x,y,z] \in R^3; z \le 0\}$





Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 4

Limita funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- vyšetřit existenci dvojné limity užitím dvojnásobných limit nebo užitím různých limitních cest;
- počítat limity.

Klíčová slova:

Dvojná limita, dvojnásobná limita, polární souřadnice.

Existence limity

Výpočet dvojné limity nebývá vždy snadný.
Marné snaze počítat ji, když eventuálně neexistuje, můžeme předejít tím, že se nejprve pokusíme zjistit, zda vůbec limita může existovat.
Existenci limity můžeme vyloučit buď pomocí výpočtu dvojnásobných limit nebo tak, že se budeme k limitnímu bodu z bodu z jeho redukovaného okolí blížit po různých cestách.

Připomínáme:
Nechť existuje limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.
Existují-li dvojnásobné limity $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_1$ a $\lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right] = L_2$, pak platí $L = L_1 = L_2$.

Rovnost dvojnásobných limit $L_1 = L_2$ je nutnou, ne však postačující podmínkou pro existenci dvojné limity L.
Jsou-li dvojnásobné limity různé, pak dvojná limita neexistuje; stručně - je-li $L_1 \neq L_2$, pak L neexistuje.
Dvojnásobnou limitu počítáme postupným limitním přechodem vždy funkce jedné proměnné, přičemž druhou proměnnou považujeme za konstantu.
Při výpočtu dvojnásobných limit užíváme postupy, které už známe z výpočtů limit funkce jedné proměnné.
V případě dvojnásobných limit se k limitnímu bodu blížíme po pravoúhlých cestách rovnoběžných se souřadnicovými osami.

Příklad 4.1 *Užitím výpočtu dvojnásobných limit se přesvědčíme, že dvojná limita* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+4y}$ *neexistuje.*

Řešení

Vypočteme dvojnásobné limity L_1 a L_2.

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{3x+4y}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{3x+0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = L_1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{3x+4y}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{0-2y}{0+4y} = \lim_{y\to 0}\frac{-2y}{4y} = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = L_2$$

Dvojnásobné limity se nerovnají, dvojná limita neexistuje.

Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-2y}{3x+4y}$ neexistuje.

■

Příklad 4.2 *Užitím výpočtu dvojnásobných limit se přesvědčíme, že dvojná limita* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$ *neexistuje.*

Řešení

Vypočteme dvojnásobné limity L_1 a L_2.

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 2}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-4}{x^4-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4}{x^2+1}=\frac{4}{2}=2=L_1$$

$$\lim_{y\to 2}\left[\lim_{x\to 1}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right]=\lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{y^4-16}=\lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{\left(y^2-4\right)\left(y^2+4\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{1}{y^2+4}=\frac{1}{8}=L_2$$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow L$ neexistuje.

Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$ neexistuje.

■

Příklad 4.3 *Užitím výpočtu dvojnásobných limit se přesvědčíme, že dvojná limita* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cos y-y^3\cos x}{y\sin x-2x^2-3y^3}$ *neexistuje.*

Řešení

Vypočteme dvojnásobné limity L_1 a L_2.

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2\cos y-y^3\cos x}{y\sin x-2x^2-3y^3}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{0-2x^2-0}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}=L_1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos y-y^3\cos x}{y\sin x-2x^2-3y^3}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{0-y^3}{0-0-3y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=L_2$$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow L$ neexistuje.

Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2\cos y-y^3\cos x}{y\sin x-2x^2-3y^3}$ neexistuje.

■

Příklad 4.4 *Užitím výpočtu dvojnásobných limit se přesvědčíme, že dvojná limita* $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \sin \frac{\pi x}{2x+y}$ *neexistuje.*

Řešení

Vypočteme dvojnásobné limity L_1 a L_2

$$\lim_{x\to\infty}\left[\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right] = \lim_{x\to\infty}\sin 0 = \lim_{x\to\infty} 0 = 0 = L_1$$

$$\lim_{y\to\infty}\left[\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right] = \lim_{y\to\infty}\left[\sin\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x}{2x+y}\right)\right] = \lim_{y\to\infty}\left[\sin\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x}{2+\frac{y}{x}}\right)\right] =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left[\sin\frac{\pi}{2}\right] = \lim_{y\to\infty} 1 = 1 = L_2$$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow L$ neexistuje.

Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$ neexistuje.

■

Příklad 4.5 *Užitím výpočtu dvojnásobných limit se přesvědčíme, že dvojná limita* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2+y^2}{2x^2}$ *neexistuje.*

Řešení

Vypočteme dvojnásobné limity L_1 a L_2.

$$\lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0}\frac{4x^2+y^2}{2x^2}\right] = \lim_{x\to0}\frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to0}\frac{4}{2} = \lim_{x\to0} 2 = 2 = L_1$$

$$\lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0}\frac{4x^2+y^2}{2x^2}\right] = \lim_{y\to0}\left[\frac{y^2}{\to 0^+}\right] = \left[\lim_{y\to0}\infty\right] = \infty = L_2$$

Poznámka.
Vnitřní limita je nevlastní, proto celková dvojnásobná limita je nevlastní.

Dvojnásobné limity jsou různé, limita neexistuje.

Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2+y^2}{2x^2}$ neexistuje.

■

Pro důkaz, že daná limita neexistuje je možné použít také substituce, při níž se z bodu z redukovaného okolí blížíme k limitnímu bodu po jiné než pravoúhlé cestě. Můžeme si zvolit přímky procházející limitním bodem, případně paraboly s vrcholem v limitním bodě a osou rovnoběžnou s osou y.
Pro případ $[x_0, y_0] = [0, 0]$ je

rovnice přímek $y = kx$
a rovnice parabol $y = ax^2$.

Jestliže vypočtená hodnota závisí na směrnici přímek (tj. na k), nebo rozevření parabol (tj. na a), pak to znamená, že závisí na cestě po které se k limitnímu bodu blížíme. V tom případě daná limita neexistuje.

Příklad 4.6 *Užitím výběru různých limitních cest ukážeme, že limita funkce* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x-y}$ *neexistuje.*

Řešení

Budeme se k limitnímu bodu $[0,0]$ blížit po přímkách.

Rovnice přímek procházejících bodem $[0,0]$ je $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{y}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{(1-k)} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1-k} = \frac{k}{1-k}, k \neq 1$$

Vypočtená hodnota závisí na směrnici k, pro různá k (tedy pro různé směrnice přímek) je vypočtená hodnota různá, což znamená, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x-y}$ neexistuje.

■

Příklad 4.7 *Užitím výběru různých limitních cest ukážeme, že limita funkce* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *neexistuje.*

Řešení

Vybereme si opět přímky procházející počátkem, tj. přímky o rovnicích $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{xkx}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

Vypočtená hodnota závisí na směrnici k, proto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ neexistuje.

■

Příklad 4.8 *Užitím výběru různých limitních cest ukážeme, že limita funkce* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$ *neexistuje.*

Řešení

Budeme se k limitnímu bodu blížit po přímkách, které prochází bodem $[0,0]$ a mají tedy rovnici $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{y^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{x} = \lim_{x\to 0} k^2x = 0$$

Vypočtená hodnota nezávisí na konstantě k, existenci limity nelze vyloučit.

Zkusíme zvolit jinou cestu - paraboly s vrcholem v počátku a osou v ose x; jejich rovnice je $x = ay^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=ay^2}} \frac{y^2}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{ay^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{a} = \frac{1}{a}, a \neq 0$$

■

Příklad 4.9 *Přesvědčme se, že limita funkce $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ v bodě $[0,0]$ neexistuje.*

ŘešeníJiž výpočet dvojnásobných limit, které jsou různé (1 a -1) nás ubezpečí, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$ neexistuje.
Můžeme však postupovat i jinak - užitím různých limitních cest, po nichž se budeme blížit k limitnímu bodu $[0,0]$.
Zkusíme se blížit po parabolách o rovnici $y=ax^2, a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=ax^2}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to0}\frac{x+ax^2}{x-ax^2}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+ax)}{x(1-ax)}=\lim_{x\to0}\frac{1+ax}{1-ax}=1$$

Vypočtená hodnota nezávisí na koeficientu a. Nabízí se domněnka, že limita existuje a je rovna jedné.
Zkusíme zvolit jinou cestu - přímky o rovnicích $y=kx, k\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx}}\frac{x+kx}{x-kx}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+k)}{x(1-k)}=\lim_{x\to0}\frac{1+k}{1-k}=\frac{1+k}{1-k}, k\neq1$$

Vypočtená hodnota závisí na směrnici k, pro různá k (tedy pro různé směrnice přímek) je vypočtená hodnota různá, a proto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$ neexistuje.

■

Příklad 4.10 *Vyšetřeme existenci limity* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2}{4x^2y^2+5(y-x)^2}$.

Řešení

Vypočteme dvojnásobné limity.

$$\lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0}\frac{3x^2y^2}{4x^2y^2+5(y-x)^2}\right]=\lim_{x\to0}\frac{0}{5x^2}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$\lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0}\frac{3x^2y^2}{4x^2y^2+5(y-x)^2}\right]=\lim_{y\to0}\frac{0}{5y^2}=\lim_{y\to0}0=0$$

Dvojnásobné limity existují a jsou si rovny, existenci dvojné limity nelze vyloučit.
Zkusíme se blížit k limitnímu bodu po přímkách, které mají rovnici $y=kx$, $k\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{3x^2y^2}{4x^2y^2+5(y-x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2k^2x^2}{4x^2k^2x^2+5(kx-x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{3k^2x^4}{4k^2x^4+5x^2(k-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3k^2x^4}{x^2\left[4k^2x^2+5(k-1)^2\right]}=\lim_{x\to0}\frac{3k^2x^2}{4k^2x^2+5(k-1)^2}=\frac{0}{5(k-1)^2}=0;\ k\neq1$$

Zatím ještě stále nelze existenci dvojné limity vyloučit, poněvadž vypočtená hodnota 0 je rovna hodnotám vypočtených dvojnásobných limit.

Podívejme se, co se stane, pokud bude $k=1$. Rovnice odpovídající přímky je $y=x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{3x^2y^2}{4x^2y^2+5(y-x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x^4}{4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

Teprve po tomto výpočtu, kdy jsme zjistili, že vypočtená hodnota, tj. $\frac{3}{4}$, se liší od předchozích vypočtených hodnot, ty byly rovny nule, můžeme konstatovat, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2}{4x^2y^2+5(y-x)^2}$ neexistuje.
Příklad také dokládá, že existence a rovnost dvojnásobných limit nezaručuje existenci dvojné limity. ■

Výpočet limit

Připomínáme: Je-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá, pak $\lim f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

a) Funkce spojitá v limitním bodě

Po dosazení souřadnic limitního bodu nenastanou žádné problémy.

Příklad 4.11 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2-2xy+5}{x^3y-3xy+y}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2-2xy+5}{x^3y-3xy+y} = \frac{0-2\cdot0\cdot3+5}{0\cdot3-3\cdot0\cdot3+3} = \frac{5}{3}$$

■

Příklad 4.12 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\cos(x+y)}{x^2+y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\cos(x+y)}{x^2+y^2} = \frac{\cos\pi}{0+\pi^2} = \frac{-1}{\pi^2}$$

■

Příklad 4.13 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,4)} \frac{3y}{(x-1)^2+(y-3)^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} \frac{3y}{(x-1)^2+(y-3)^2} = \frac{3\cdot4}{0^2+1^2} = 12$$

■

Příklad 4.14 *Vypočtěme* $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}} \left[\left(\frac{x-y}{xy}+\frac{1}{2}\right)\cdot\cos xy\right]$.

Řešení

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to2}} \left[\left(\frac{x-y}{xy}+\frac{1}{2}\right)\cdot\cos xy\right] = \left(\frac{1-2}{1\cdot2}+\frac{1}{2}\right)\cos 2 = 0\cdot\cos 2 = 0$$

■

Příklad 4.15 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^3y-xy^3+1}{(x-2y)^3}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^3y-xy^3+1}{(x-2y)^3} = \frac{(-1)^3\cdot1-(-1)\cdot1^3+1}{(-1-2\cdot1)^3} = \frac{-1+1+1}{(-3)^3} = \frac{-1}{27}$$

■

b) Výpočet limity užitím úpravy předpisu funkce

Vytýkáme, rozkládáme, krátíme.

Příklad 4.16 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x-y) = 2$$

■

Příklad 4.17 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-xy+3x-3y}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-xy+3x-3y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x(x-y)+3(x-y)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+3)} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y}{x+3} = \frac{2+2}{2+3} = \frac{4}{5}$$

■

Příklad 4.18 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{4+4+4}{(4+4)(2+2)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

■

Příklad 4.19 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{xy-2y+3x-6}{xy+3x}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{xy-2y+3x-6}{xy+3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{y(x-2)+3(x-2)}{x(y+3)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{(x-2)(y+3)}{x(y+3)} = \lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{x-2}{x} = \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

■

Příklad 4.20 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{6x^2-8xy+2y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{6x^2-8xy+2y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{6x^2-8xy+2y^2} =$$

Potřebujeme rozložit jmenovatele - zkusíme vydělit

$$\begin{array}{l}
\quad\left(6x^2-8xy+2y^2\right) : (x-y) = 6x-2y \\
-\underline{\left(6x^2-6xy\right)} \\
\qquad\quad -2xy+2y^2 \\
\qquad -\underline{\left(-2xy+2y^2\right)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{(x-y)(6x-2y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy+y^2}{6x-2y} = \frac{3}{4}$$

■

Příklad 4.21 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-2x^2y^2+xy^3}{x^2y-xy^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-2x^2y^2+xy^3}{x^2y-xy^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\left(x^2-2xy+y^2\right)}{xy\,(x-y)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0$$

■

c) Výpočet limity užitím rozšíření předpisu funkce vhodným výrazem

U lomených funkcí, které obsahují rozdíl (součet) s odmocninami, rozšiřujeme vhodným výrazem.

Příklad 4.22 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{x^2+y^2+4-4} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{x^2+y^2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right) = 3\cdot 4 = 12$$

■

Příklad 4.23 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(2-\sqrt{xy+4}\right)\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-xy-4}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = \frac{-1}{2+\sqrt{0+4}} = -\frac{1}{4}$$

■

Příklad 4.24 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1\right)}{\left(x^2+(y-1)^2\right)\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+(y-1)^2+1-1}{\left(x^2+(y-1)^2\right)\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+(y-1)^2}{\left(x^2+(y-1)^2\right)\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

■

Příklad 4.25 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy}{5-\sqrt{25-xy}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy}{5-\sqrt{25-xy}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy\left(5+\sqrt{25-xy}\right)}{\left(5-\sqrt{25-xy}\right)\left(5+\sqrt{25-xy}\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy\left(5+\sqrt{25-xy}\right)}{25-25+xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy\left(5+\sqrt{25-xy}\right)}{xy} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 6\left(5+\sqrt{25-xy}\right) = 6\,(5+5) = 60$$

■

Příklad 4.26 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(2-\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\left(2+\sqrt{4-x^2-y^2}\right)}{(x^2+y^2)\left(2+\sqrt{4-x^2-y^2}\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-4+x^2+y^2}{(x^2+y^2)\left(2+\sqrt{4-x^2-y^2}\right)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\left(2+\sqrt{4-x^2-y^2}\right)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

■

Příklad 4.27 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} \frac{x^2-2xy}{5x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2y}\right)}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(4,2)} \frac{x^2-2xy}{5x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2y}\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(4,2)} \frac{x\,(x-2y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)}{5x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(4,2)} \frac{(x-2y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)}{5\,(x-2y)} = \lim_{(x,y)\to(4,2)} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2y}}{5} = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5}$$

■

d) Výpočet limit užitím polárních souřadnic

Při výpočtu limit někdy pomůže přechod k polárním souřadnicím, kde pól volíme v bodě, v němž počítáme limitu. Při použití polárních souřadnic se k limitnímu bodu blížíme po polopřímkách, které mají počáteční bod v limitním bodě.
Připomínáme: Je-li limitní bod $[x_0, y_0] = [0, 0]$, pak $x = \varrho \cos\varphi,\ y = \varrho \sin\varphi$.
Je-li $[x_0, y_0] \neq [0, 0]$, pak $x = x_0 + \varrho\cos\varphi,\ y = y_0 + \varrho\sin\varphi$. $\varrho > 0,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi)$
Jestliže vypočtená hodnota závisí na úhlu polopřímek (tj. na φ), pak limita neexistuje.

Příklad 4.28 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,(x+y)}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\cos\varphi\,\varrho\sin\varphi\,(\varrho\cos\varphi+\varrho\sin\varphi)}{(\varrho\cos\varphi)^2+(\varrho\sin\varphi)^2} =$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos\varphi\sin\varphi\,(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\varrho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\cos\varphi\sin\varphi\,(\cos\varphi+\sin\varphi) = 0$$

■

Příklad 4.29 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\cos^2\varphi\varrho^2\sin^2\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\varrho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \varrho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0$$

■

Příklad 4.30 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\cos^2\varphi-\varrho^2\sin^2\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)}{\varrho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\cos 2\varphi}{1} = \cos 2\varphi$$

Mění-li se úhel φ, pak se mění i vypočtená hodnota $\cos 2\varphi$, proto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ neexistuje.

■

Příklad 4.31 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos^3\varphi+\varrho^3\sin^3\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)}{\varrho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \varrho\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right) = 0$$

■

Příklad 4.32 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x+2y)}{x^2-y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\left(x+2y\right)}{x^2-y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\cos^2\varphi\left(\varrho\cos\varphi+2\varrho\sin\varphi\right)}{\varrho^2\cos^2\varphi-\varrho^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos^2\varphi\left(\cos\varphi+2\sin\varphi\right)}{\varrho^2\cos 2\varphi} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\cos^2\varphi\left(\cos\varphi+2\sin\varphi\right)}{\cos 2\varphi} = 0$$

■

Příklad 4.33 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x+y-1)^2}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x+y-1)^2}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{(1+\varrho\cos\varphi+\varrho\sin\varphi-1)^2}{\sqrt{(1+\varrho\cos\varphi)^2+(\varrho\sin\varphi)^2-2\,(1+\varrho\cos\varphi)+1}} =$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{[\varrho\,(\cos\varphi+\sin\varphi)]^2}{\sqrt{1+2\varrho\cos\varphi+\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi-2-2\varrho\cos\varphi+1}} =$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\,(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{\sqrt{1+\varrho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)-2+1}} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\,(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{\sqrt{\varrho^2}} =$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\,(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\,(\cos\varphi+\sin\varphi)^2 = 0$$

Poznámka.
Bod $[x_0, y_0] = [1, 0]$, proto $x = 1+\varrho\cos\varphi$ a $y = \varrho\sin\varphi$.

■

Příklad 4.34 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{\varrho\to\infty} \frac{\varrho\cos\varphi+\varrho\sin\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi-\varrho\cos\varphi\varrho\sin\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi} =$$
$$= \lim_{\varrho\to\infty} \frac{\varrho\,(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\varrho^2\left(\cos^2\varphi-\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi\right)} = \lim_{\varrho\to\infty} \frac{1}{\varrho}\cdot\lim_{\varrho\to\infty} \frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi} =$$
$$= 0\cdot\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi} = 0$$

Poznámka.
$\varphi \in \langle\alpha, \beta\rangle \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
Označení

■

Příklad 4.35 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left[(x^2+y^2)\,e^{-2(x+y)}\right]$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left[\left(x^2+y^2\right)e^{-2(x+y)}\right] = (\infty\cdot 0) = \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{e^{2(x+y)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$
$$= \lim_{\varrho\to\infty} \frac{\varrho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}{e^{2\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)}} = \lim_{\varrho\to\infty} \frac{\varrho^2}{e^{2\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$$
$$= \lim_{\varrho\to\infty} \frac{2\varrho}{e^{2\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)}2\,(\cos\varphi+\sin\varphi)} =$$
$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{\varrho\to\infty} \frac{1}{e^{2\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)}2\,(\cos\varphi+\sin\varphi)^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

Poznámka.
$\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cos\varphi + \sin\varphi > 0$
Užili jsme l'Hospitalovo pravidlo - derivovali jsme čitatele i jmenovatele podle ϱ.
Označení $\overset{\text{l'H}}{=}$ znamená, že jsme v tomto kroku výpočtu užili l'Hospitalovo pravidlo.

■

Příklad 4.36 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2}{e^{x^2+y}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2}{e^{x^2+y}} = \lim_{\varrho\to\infty} \frac{\varrho^2\cos^2\varphi}{e^{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho\sin\varphi}} =$$
$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{\varrho\to\infty} \frac{2\varrho\cos^2\varphi}{e^{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho\sin\varphi}\left(2\varrho\cos^2\varphi+\sin\varphi\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$$
$$= \lim_{\varrho\to\infty} \frac{2\cdot\cos^2\varphi}{e^{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho\sin\varphi}\left(2\varrho\cos^2\varphi+\sin\varphi\right)^2 + e^{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho\sin\varphi}2\cos^2\varphi} = \left[\frac{2\cos^2\varphi}{\infty+\infty}\right] = 0$$

Poznámka.
$\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
Užili jsme l'Hospitalovo pravidlo - derivovali jsme čitatele i jmenovatele podle ϱ.

■

e) Výpočet limit užitím základních limit

Připomínáme:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\sin g(x,y)}{g(x,y)} = 1 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\operatorname{tg} g(x,y)}{g(x,y)} = 1 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(1+g(x,y)\right)^{\frac{1}{g(x,y)}} = e$$

pokud

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$$

Příklad 4.37 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,4)} \frac{\sin\left(2x^2-\frac{y}{2}\right)}{4x^2-y}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} \frac{\sin\left(2x^2-\frac{y}{2}\right)}{4x^2-y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(1,4)} \frac{\sin\left(2x^2-\frac{y}{2}\right)}{2\left(2x^2-\frac{y}{2}\right)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,4)} \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y)\to(1,4)} \frac{\sin\left(2x^2-\frac{y}{2}\right)}{2x^2-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

■

Příklad 4.38 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(5,0)} \frac{\operatorname{tg}\left(2x^2y\right)}{y}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(5,0)} \frac{\operatorname{tg}\,(2x^2y)}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(5,0)} \frac{\operatorname{tg}\,(2x^2y)\cdot 2x^2}{2x^2y} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(5,0)} \frac{\operatorname{tg}\,(2x^2y)}{2x^2y} \cdot \lim_{(x,y)\to(5,0)} 2x^2 = 1\cdot 2\cdot 5^2 = 50$$

■

Příklad 4.39 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5\sin\left(x^3+y^3\right)}{x+y}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5\sin\,(x^3+y^3)}{x+y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5\sin\,(x^3+y^3)\cdot(x^2-xy+y^2)}{(x+y)\,(x^2-xy+y^2)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\,(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} 5\left(x^2-xy+y^2\right) = 1\cdot 5\cdot 0 = 0$$

■

Příklad 4.40 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\operatorname{tg}\left(x^4-y^4\right)}{x^2-y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\operatorname{tg}\,(x^4-y^4)}{x^2-y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\operatorname{tg}\,(x^4-y^4)\cdot(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)\,(x^2+y^2)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\operatorname{tg}\,(x^4-y^4)}{x^4-y^4} \cdot \lim_{(x,y)\to(2,2)} \left(x^2+y^2\right) = 1\cdot\left(2^2+2^2\right) = 8$$

■

Příklad 4.41 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2x^2y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\,(x^2+y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2x^2y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{[1-\cos\,(x^2+y^2)]\,[1+\cos\,(x^2+y^2)]}{\left(x^2+y^2\right)^2x^2y^2\,[1+\cos\,(x^2+y^2)]} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2\,(x^2+y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2x^2y^2\,[1+\cos\,(x^2+y^2)]} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2\,(x^2+y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{1+\cos\,(x^2+y^2)} =$$
$$= 1^2\cdot\infty\cdot\frac{1}{2} = +\infty$$

■

Příklad 4.42 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{3(x-2)^2-y^2}}{x^3\sqrt{3(x-2)^2-y^2}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{3\,(x-2)^2-y^2}}{x^3\sqrt{3\,(x-2)^2-y^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{1}{x^3} \cdot \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{3\,(x-2)^2-y^2}}{\sqrt{3\,(x-2)^2-y^2}} =$$
$$= \frac{1}{2^3}\cdot 1 = \frac{1}{8}$$

■

Příklad 4.43 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{[1-\cos\,(x^2+y^2)]\,[1+\cos\,(x^2+y^2)]}{(x^2+y^2)^2\,[1+\cos\,(x^2+y^2)]} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^2\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2\,[1+\cos\,(x^2+y^2)]} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{1+\cos\,(x^2+y^2)} = 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

■

Příklad 4.44 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy}{\operatorname{tg} xy}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy}{\operatorname{tg} xy} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} xy}{6xy}} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{6}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy}} = \frac{1}{\frac{1}{6}\cdot 1} = 6$$

■

Příklad 4.45 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = (1^\infty) = e, \text{ poněvadž } \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$$

■

Příklad 4.46 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} (1+x-y)^{\frac{5}{x-y}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(3,3)} (1+x-y)^{\frac{5}{x-y}} = (1^\infty) = \lim_{(x,y)\to(3,3)} \left[(1+x-y)^{\frac{1}{x-y}}\right]^5 =$$
$$= \left[\lim_{(x,y)\to(3,3)} (1+x-y)^{\frac{1}{x-y}}\right]^5 = e^5$$

■

f) Výpočet limit $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^{g(x,y)}$

K výpočtu limit použijeme definici logaritmu, větu pro počítání s logaritmy a větu o limitě složené funkce.
Definice logaritmu:

$$[f(x,y)]^{g(x,y)} = e^{\ln [f(x,y)]^{g(x,y)}}$$

Věta pro počítání s logaritmy:

$$\ln [f(x,y)]^{g(x,y)} = g(x,y) \ln f(x,y)$$

Věta o limitě složené funkce:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^{h(x,y)} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)}$$

Budeme tedy postupovat podle následujícího schématu:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^{\ln [f(x,y)]^{g(x,y)}} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^{g(x,y)\ln f(x,y)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (g(x,y) \ln f(x,y))}$$

Poznámka.
Symboly (=) a $\boxed{=}$ znamenají přerušení výpočtu a následné navázání výsledku získaného pomocným výpočtem.
Symbol $\overset{\text{l'H}}{=}$ znamená použití l'Hospitalova pravidla.

Příklad 4.47 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} = \left(0^0\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\ln \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2y^2 \ln \left(x^2+y^2\right)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[x^2y^2 \ln \left(x^2+y^2\right)\right]} (=)\, e^0 = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x^2y^2 \ln \left(x^2+y^2\right)\right] = (0\cdot\infty) =$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \varrho^2 \cos^2\varphi\, \varrho^2 \sin^2\varphi \ln\left(\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi\right) =$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \varrho^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \ln \varrho^2 = \lim_{\varrho\to 0} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \cdot \lim_{\varrho\to 0} \varrho^4 \ln \varrho^2 \boxed{=} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{\varrho\to 0} \varrho^4 \ln \varrho^2 = (0\cdot\infty) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\ln \varrho^2}{\frac{1}{\varrho^4}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{\varrho\to 0} \frac{\frac{1}{\varrho^2}2\varrho}{-\frac{4}{\varrho^5}} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^4}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

■

Příklad 4.48 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = (1^\infty) = e^{\left[\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} \ln\left(1+x^2y^2\right)\right]} = e^0 = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{1}{x^2+y^2} \ln\left(1+x^2y^2\right)\right] = (\infty\cdot 0) =$$

$$\lim_{\varrho\to 0} \left[\frac{1}{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \ln\left(1+\varrho^2\cos^2\varphi\varrho^2\sin^2\varphi\right)\right] =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{1}{\varrho^2} \ln\left(1+\varrho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\ln\left(1+\varrho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)}{\varrho^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\frac{4\varrho^3}{1+\varrho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}}{2\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{2\varrho^2}{1+\varrho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi} = 0$$

■

Příklad 4.49 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(4,4)} (1+x-y)^{\frac{x}{2(xy-y^2)}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(4,4)} (1+x-y)^{\frac{x}{2(xy-y^2)}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(4,4)} \ln(1+x-y)^{\frac{x}{2y(x-y)}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(4,4)} \left[\frac{x}{2y} \ln(1+x-y)^{\frac{1}{(x-y)}}\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(4,4)} \frac{x}{2y} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(4,4)} \ln(1+x-y)^{\frac{1}{x-y}}} = e^{\frac{4}{2\cdot 4}\cdot\ln \lim\limits_{(x,y)\to(4,4)} (1+x-y)^{\frac{1}{x-y}}} = e^{\frac{1}{2}\ln e} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\cdot 1} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

■

Příklad 4.50 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,5)} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,5)} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,5)} \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,5)} \left[\frac{x}{2(x+y)} \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,5)} \frac{x}{2(x+y)}\cdot\ln \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,5)} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}} = e^{\frac{1}{2}\cdot\ln e} = e^{\frac{1}{2}\cdot 1} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

■

Příklad 4.51 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+3x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+3x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(1+3x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{3x^2y^2}{x^2+y^2}\ln\left(1+3x^2y^2\right)^{\frac{1}{3x^2y^2}}\right]} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2}{x^2+y^2}\cdot\ln\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(1+3x^2y^2\right)^{\frac{1}{3x^2y^2}}} =$$

$$= e^{0\cdot\ln e} = e^{0\cdot 1} = e^0 = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\varrho\to 0}\frac{3\varrho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\varrho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} = \lim_{\varrho\to 0} 3\varrho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0$$

■

Příklad 4.52 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\sqrt{x^2y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2+1-1}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ (viz vložený výpočet v příkladě 4.50)

■

Příklad 4.53 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} e^{\frac{x^2}{x^2+y}}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} e^{\frac{x^2}{x^2+y}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x^2}{x^2+y}} = e^1 = e$$

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2}{x^2+y} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{\varrho\to\infty}\frac{\varrho^2\cos^2\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho\sin\varphi} = \lim_{\varrho\to\infty}\frac{\varrho^2\cos^2\varphi}{\varrho\left(\varrho\cos^2\varphi+\sin\varphi\right)} =$$

$$= \lim_{\varrho\to\infty}\frac{\varrho\cos^2\varphi}{\varrho\cos^2\varphi+\sin\varphi} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{\varrho\to\infty}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \lim_{\varrho\to\infty} 1 = 1$$

■

Příklad 4.54 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)\cdot\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^3+y^3\right)\left(x^2+y^2\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 1\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0 \text{ (viz. příklad 4.31)}$$

■

Příklad 4.55 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+3y^2\right)\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^3+xy^2+x^2y+y^3}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+3y^2\right)\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^3+xy^2+x^2y+y^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+3y^2\right)\sin\left(x^2+y^2\right)}{x\left(x^2+y^2\right)+y\left(x^2+y^2\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+3y^2\right)\sin\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3y^2}{x+y} =$$

$$= 1\cdot \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\cos^2\varphi + 3\varrho^2\sin^2\varphi}{\varrho\cos\varphi+\varrho\sin\varphi} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\left(\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)}{\varrho\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\left(\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)}{\cos\varphi+\sin\varphi} = 0$$

■

Σ

Existenci dvojné limity můžeme vyšetřit buď pomocí dvojnásobných limit nebo užitím různých limitních cest.
Jsou-li dvojnásobné limity různé, pak dvojná limita neexistuje. Existence dvojnásobných limit, které jsou navíc sobě rovné, ještě nezaručuje existenci dvojné limity.
Najdeme-li jen 2 různé limitní cesty, které při výpočtu limity dávají různý výsledek, pak limita neexistuje.
Je-li funkce spojitá v limitním bodě, pak stačí dosadit jeho souřadnice do předpisu funkce, protože limita je rovna funkční hodnotě.
Při výpočtu limit, pokud není funkce spojitá, užíváme různých úprav předpisu funkce: vytýkání, rozklad, rozšiřování apod. Limity počítáme také užitím vzorců nebo zavedením polárních souřadnic.

?

1. *Vypočtěte limity funkcí.*

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

  $[0]$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3}$

  $[-3]$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy+y-2x-2}{x+1}$

  $[0]$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \frac{\sin\left(x^2-xy\right)}{x-y}$

  $[3]$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{10-\sqrt{100-xy}}{xy}$

  $\left[\frac{1}{20}\right]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 5

Spojitost funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozhodnout, zda je funkce spojitá;
- určit obor spojitosti, případně množinu bodů nespojitosti a načrtnout je.

Klíčová slova:

Obor spojitosti, elementární funkce.

Připomínáme: Funkce $f\left(x,y\right)$ je spojitá v bodě $[x_0,y_0]\in D(f)$, platí-li
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)$.

Elementární funkce jsou spojité ve všech bodech, ve kterých jsou definované.
Elementární funkce má pro všechny své body jednotný předpis.

Příklad 5.1 *Zjistěme, zda je funkce $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ spojitá v bodě $[0,0]$.*

Řešení

Daná funkce je složená ze spojitých funkcí, její $D(f)=R^2$.
Bod $[0,0]\in D(f)$ a $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\sqrt{x^2+y^2+1}=1=f\left(0,0\right)$.
Funkce $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ je spojitá v bodě $[0,0]$; je spojitá dokonce v každém bodě $[x,y]\in R^2$, je tedy spojitá na svém $D(f)=R^2$.

■

Příklad 5.2 *Ukažme, že funkce* $f(x,y)=\begin{cases}5-x-y & \text{pro } x\neq 3 \text{ a } y\neq -1\\ 10 & \text{pro } x=3, y=-1\end{cases}$ *není v bodě $A=[3,-1]$ spojitá. Změňme hodnotu funkce f v bodě A tak, aby byla v bodě A spojitá.*

Řešení

Vypočteme $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} f\left(x,y\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)}\left(5-x-y\right)=5-3-(-1)=3$.
Funkční hodnota $f\left(3,-1\right)=10$.
Protože $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)}\left(5-x-y\right)=3\neq 10=f\left(3,-1\right)$, není funkce f v bodě A spojitá.
Pokud v zadání položíme $f\left(A\right)=f\left(3,-1\right)=3$, pak je funkce f spojitá v bodě A.

■

Příklad 5.3 *Ukažme, že funkce* $f\left(x,y\right)=\begin{cases}3\cos\frac{5}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y]\neq[0,0]\\ 20 & \text{pro } [x,y]=[0,0]\end{cases}$ *není v počátku soustavy souřadnic spojitá.*

Řešení

$D\left(f\right)=R^2$, bod $[0,0]\in R^2$.
Limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 3\cos\frac{5}{x^2+y^2}$ neexistuje, poněvadž $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5}{x^2+y^2}=\infty$.
Funkce f nemá v bodě $[0,0]$ limitu, proto není v tomto bodě spojitá.

■

Příklad 5.4 *Najděme obor spojitosti funkce $f\left(x,y\right)=\cos 2xy$.*

Řešení

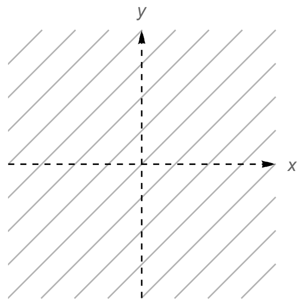
Funkce je složená ze spojitých funkcí, je tedy spojitá.
Určíme její $D\left(f\right)=R^2$.
Funkce je spojitá v každém bodě $[x,y]\in R^2$.

■

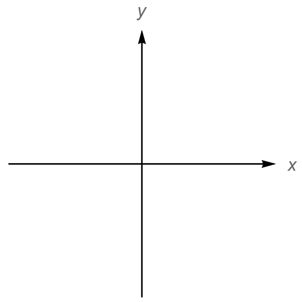
Příklad 5.5 *Najděme a načrtněme obor spojitosti funkce* $f\left(x,y\right)=\frac{e^{xy}}{xy}$.

Řešení

Funkce je podílem spojitých funkcí, je elementární.
Určíme $D\left(f\right): xy\neq 0\Rightarrow x\neq 0$ nebo $y\neq 0$.



Obr. 5.1 Obor spojitosti funkce
$f\left(x,y\right)=\frac{e^{xy}}{xy}$
Zdroj: Vlastní zpracování



Obr. 5.2 Množina bodů nespojitosti funkce
$f\left(x,y\right)=\frac{e^{xy}}{xy}$
Zdroj: Vlastní zpracování

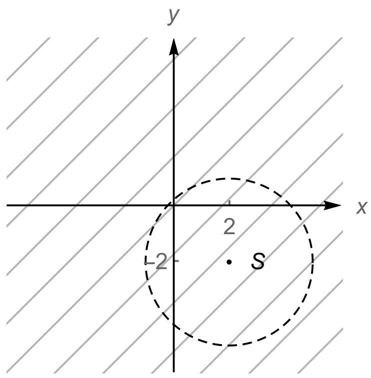
Obor spojitosti je rovina R^2 bez souřadnicových os. Množinu bodů nespojitosti tvoří všechny body souřadnicových os.

■

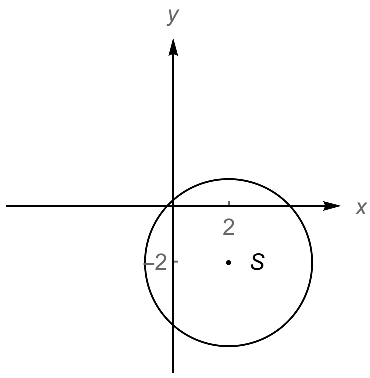
Příklad 5.6 *Najděme a načrtněme obor spojitosti funkce* $f\left(x,y\right)=\frac{x^2-3xy+5}{(x-2)^2+(y+2)^2-25}$.

Řešení

Funkce je podílem spojitých funkcí, je elementární.
Určíme její $D\left(f\right)$, který bude jejím oborem spojitosti.
$D\left(f\right):\left(x-2\right)^2+\left(y+2\right)^2\neq 25$
Rovnice $\left(x-2\right)^2+\left(y+2\right)^2=5^2$ je rovnice kružnice se středem $S=[2,-2]$ a poloměrem $r=5$.



Obr. 5.3 Obor spojitosti funkce
$f\left(x,y\right)=\frac{x^2-3xy+5}{(x-2)^2+(y+2)^2-25}$
Zdroj: Vlastní zpracování



Obr. 5.4 Množina bodů nespojitosti funkce
$f\left(x,y\right)=\frac{x^2-3xy+5}{(x-2)^2+(y+2)^2-25}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Oborem spojitosti je rovina R^2 kromě všech bodů kružnice o rovnici $\left(x-2\right)^2+\left(y+2\right)^2=25$.
Body nespojitosti jsou všechny body kružnice o rovnici $\left(x-2\right)^2+\left(y+2\right)^2=25$.

■

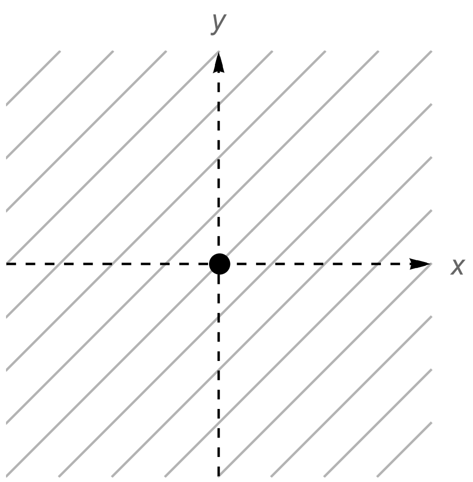
Příklad 5.7 *Najděme a načrtněme obor spojitosti funkce* $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y = 0 \\ x \sin \frac{1}{y} & \text{pro } y \neq 0 \end{cases}$.

Řešení

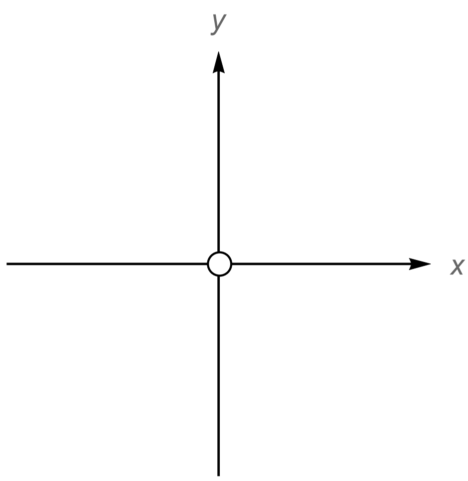
Funkce není elementární, funkční předpis naznačuje, že body nespojitosti by mohly být body osy x $(y = 0)$.
Definiční obor funkce je množina R^2.
Vypočteme limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y}.$$

Tato limita neexistuje, protože neexistuje $\lim\limits_{y\to 0} \sin \frac{1}{y}$.
Existuje pouze pro $x_0 = 0$, potom je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0$, protože $\sin \frac{1}{y}$ je omezená funkce, platí $\left|\sin \frac{1}{y}\right| \leq 1$ pro $y \neq 0$ a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$.
A protože $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0 = f(0,0)$, je funkce v bodě $[0,0]$ spojitá, kdežto ve všech ostatních bodech osy x spojitá není.



Obr. 5.5 Obor spojitosti funkce
$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y = 0 \\ x \sin \frac{1}{y} & \text{pro } y \neq 0 \end{cases}$
Zdroj: Vlastní zpracování



Obr. 5.6 Množina bodů nespojitosti funkce
$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y = 0 \\ x \sin \frac{1}{y} & \text{pro } y \neq 0 \end{cases}$
Zdroj: Vlastní zpracování

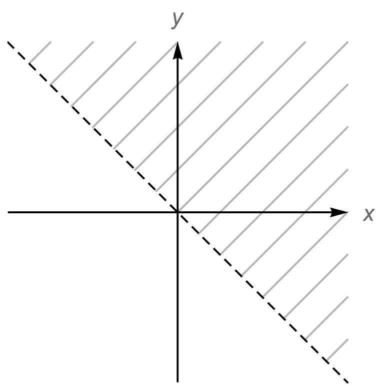
Obor spojitosti je množina R^2 mimo body souřadnicových os kromě počátku. Body nespojitosti jsou všechny body osy x a osy y s výjimkou počátku souřadnic.

■

Příklad 5.8 *Najděme a načrtněme obor spojitosti funkce* $f(x,y) = \ln(x+y)$.

Řešení

Daná funkce je elementární; je složená ze spojitých funkcí, je tedy spojitá.
Obor spojitosti je totožný s jejím definičním oborem.
Určíme $D(f) : x + y > 0 \Rightarrow y > -x$



Obr. 5.7 Obor spojitosti funkce $f(x,y) = \ln(x+y)$
Zdroj: Vlastní zpracování

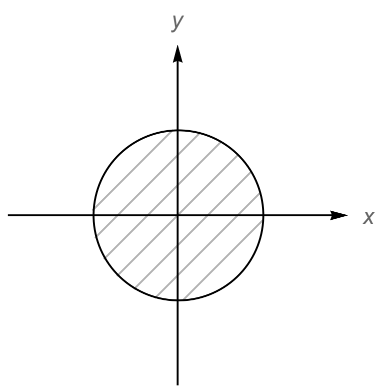
Oborem spojitosti je polorovina vyťatá přímkou $y = -x$, bez bodů hraniční přímky.

■

Příklad 5.9 *Najděme a načrtněme obor spojitosti funkce* $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Řešení

Funkce je elementární; je složená ze spojitých funkcí, je tedy spojitá.
Určíme $D(f)$; obor spojitosti je totožný s $D(f)$.
$D(f) : 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 9.$



Obr. 5.8 Obor spojitosti funkce $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Oborem spojitosti je kruh s hraniční kružnicí o rovnici $x^2 + y^2 = 9$.

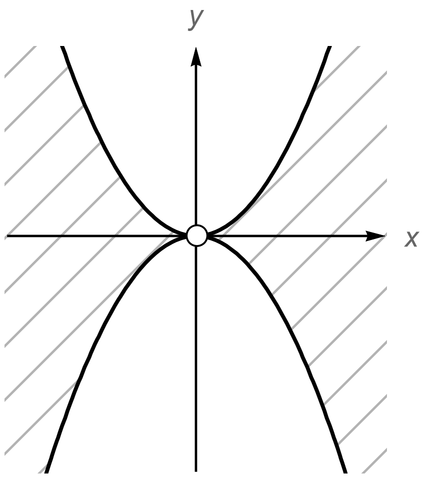
■

Příklad 5.10 *Najděme a načrtněme obor spojitosti funkce* $f(x, y) = \text{arccos}\,\frac{y}{x^2}$.

Řešení

Funkce je elementární; je složená ze spojitých funkcí, je tedy spojitá.
Určíme $D(f)$; obor spojitosti je totožný s $D(f)$.

$$D(f): -1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 1 \wedge x \neq 0$$
$$-x^2 \leq y \leq x^2$$



Obr. 5.9 Obor spojitosti funkce $f(x, y) = \text{arccos}\,\frac{y}{x^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

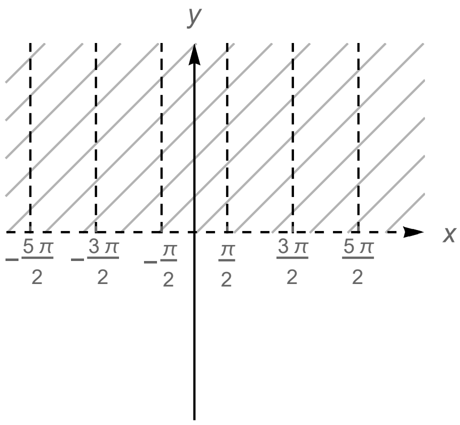
Oborem spojitosti jsou body ležící vně nebo na parabolách $y = -x^2$ a $y = x^2$, kromě bodu $[0, 0]$.

■

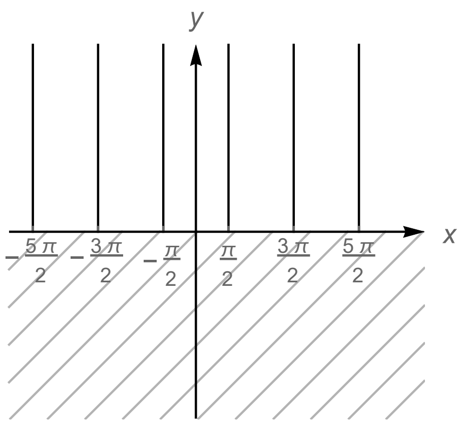
Příklad 5.11 *Najděme a načrtněme obor spojitosti funkce* $f(x, y) = \sin\frac{\ln y}{\cos x}$.

Řešení

Funkce $\ln y$ je spojitá v každém bodě $[x, y] \in R^2$, v němž $y > 0$.
Funkce $\cos x$ je spojitá v každém bodě $[x, y] \in R^2$. Hodnoty nula nabývá tato funkce ve všech bodech $[x, y] \in R^2$, v nichž $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
Funkce $\frac{\ln y}{\cos x}$ je spojitá ve všech bodech $[x, y] \in R^2$, pro něž je $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, y > 0$.
Funkce $\sin u$ je spojitá v každém bodě u.
Podle věty o spojitosti složené funkce je daná funkce f spojitá.
Stanovíme obor spojitosti, který je totožný s definičním oborem.



Obr. 5.10 Obor spojitosti funkce
$f(x,y) = \sin\frac{\ln y}{\cos x}$
Zdroj: Vlastní zpracování



Obr. 5.11 Množina bodů nespojitosti funkce
$f(x,y) = \sin\frac{\ln y}{\cos x}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Obor spojitosti tvoří všechny body horní poloroviny (x,y) s hraniční přímkou $y = 0$, které neleží na žádné z přímek o rovnici $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ a $y = 0$.
Množina bodů nespojitosti je tvořena všemi body dolní poloroviny včetně hraniční přímky $y = 0$ a včetně všech bodů přímek o rovnici $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

■

Příklad 5.12 *Najděme a načrtněme obor spojitosti funkce* $f(x,y) = \frac{1}{\sin x \sin y}$.

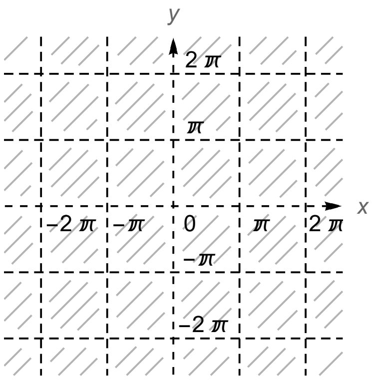
Řešení

Je to elementární a spojitá funkce; určíme definiční obor.

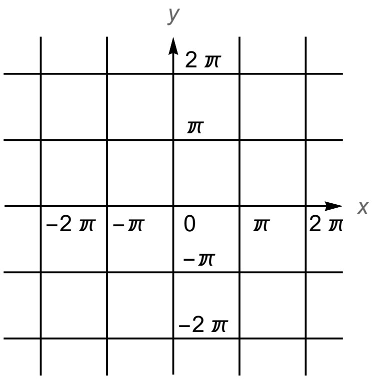
$D(f)$: $\sin x \sin y \neq 0$

$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Obr. 5.12 Obor spojitosti funkce
$f(x,y) = \frac{1}{\sin x \sin y}$
Zdroj: Vlastní zpracování



Obr. 5.13 Množina bodů nespojitosti funkce
$f(x,y) = \frac{1}{\sin x \sin y}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Oborem spojitosti je rovina R^2 s výjimkou všech bodů, které leží na přímkách o rovnicích $x = k\pi$ a $y = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Přímky $x = k\pi$, resp. $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jsou rovnoběžky s osou y, resp. s osou x.
Množinu bodů nespojitosti tvoří přímky o rovnicích $x = k\pi$ a $y = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

■

Příklad 5.13 *Pojednejme o spojitosti funkce $f(x, y) = e^{\frac{\sin x}{y}}$ a rozhodněme, zda ji lze na R^2 spojitě dodefinovat.*

Řešení

Funkce je definována na R^2 kromě bodů, pro něž je $y = 0$, tj. kromě bodů osy x.
Funkce $\sin x$ a y jsou funkce spojité, jejich podíl je také funkce spojitá a také exponenciální funkce je spojitá všude.
Podle věty o spojitosti složené funkce je funkce spojitá na svém $D(f) = \{[x, y] \in R^2; y \neq 0\}$.
Abychom mohli funkci spojitě dodefinovat, musela by mít v každém bodě $[x, 0]$ limitu.
Vypočteme

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\sin x}{y} = +\infty \text{ a } \lim_{y\to 0^-} \frac{\sin x}{y} = -\infty \text{ pro } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Limity jsou nevlastní a různé, tedy funkce f nemá v žádném bodě osy x limitu, proto ji nelze spojitě dodefinovat na R^2.

■

Příklad 5.14 *Rozhodněme, zda je funkce $f(x, y) = \frac{\sin xy}{y}$ spojitá a zda ji lze spojitě dodefinovat na R^2.*

Řešení

Určíme $D(f) = \{[x, y] \in R^2; y \neq 0\}$, což je obor spojitosti funkce f. Body nespojitosti jsou všechny body osy x.
Zjistíme, zda existuje limita pro libovolný bod $[x_0, 0]\,, x_0 \neq 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{x \sin xy}{xy} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} x \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = x_0 \cdot 1 = x_0$$

Pro bod $[0, 0]$ je limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin xy}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = 0 \cdot 1 = 0$$

Funkci lze spojitě dodefinovat na R^2 předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{xy}{y} & \text{pro } y \neq 0 \\ x & \text{pro } y = 0 \end{cases}.$$

■

Příklad 5.15 *Určeme definiční obor funkce $f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy)$ a body, v nichž je spojitá.*

Řešení

Funkce signum je definována v celé množině R^2.
Rozepíšeme podrobně její předpis.

$$f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy) = \begin{cases} 1 & \text{pro } xy > 0\text{, tj. pro vnitřní body I. a III. kvadrantu} \\ 0 & \text{pro } xy = 0\text{, tj. pro body souřadnicových os } x \text{ a } y \\ -1 & \text{pro } xy < 0\text{, tj. pro vnitřní body II. a IV. kvadrantu} \end{cases}$$

V okolí vnitřních bodů I. a III. kvadrantu je funkce f konstantní, nabývá hodnoty 1 a má v nich také limitu 1. Ve všech těchto bodech je funkce f spojitá.
Obdobně v okolí vnitřních bodů II. a IV. kvadrantu je funkce f konstantní, nabývá hodnoty -1 a má v nich limitu -1. Ve všech těchto bodech je funkce f spojitá.
V redukovaném okolí bodů $[x, 0]$ ležících na ose x a bodů $[0, y]$ ležících na ose y, nabývá funkce f rovněž konstantní hodnoty, a to vzhledem k I. a III. kvadrantu hodnoty 1, vzhledem ke II. a IV. kvadrantu hodnoty -1 a vzhledem k osám hodnoty 0. Limita v těchto bodech tedy neexistuje, proto funkce v nich není spojitá.
Funkce $\operatorname{sgn}(xy)$ má definiční obor R^2, ale obor spojitosti je R^2 s výjimkou všech bodů souřadnicových os x a y.
Z podrobného zápisu funkce $\operatorname{sgn}(xy)$ je zřejmé, že funkce není elementární a její obor spojitosti se neshoduje s jejím definičním oborem.

Σ

U elementárních funkcí je obor spojitosti shodný s definičním oborem. Elementární funkce mají pro všechny body svého D(f) jednotný funkční předpis.

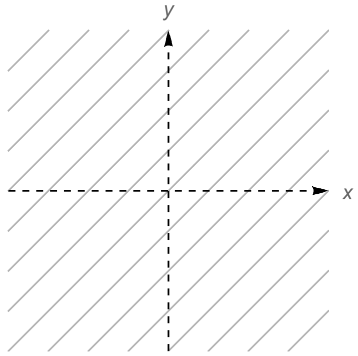
?

1. *Najděte a načrtněte obor spojitosti funkcí.*

- $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2+1}$

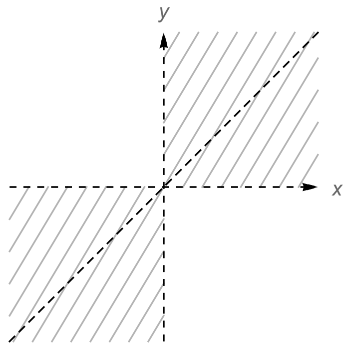
[obor spojitosti: R^2]

- $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}}{x^2y^2}$

[

obor: spojitosti: všechny body roviny R^2, které neleží na souřadnicových osách x a y]

- $f(x,y) = \frac{\ln \frac{x}{y}}{x^2-y^2}$

[

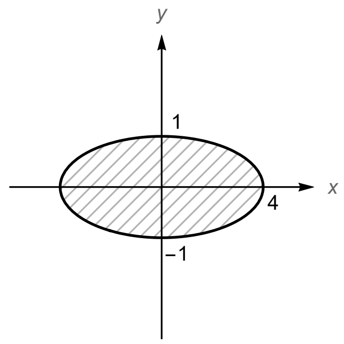
obor spojitosti: vnitřní body I. a III. kvadrantu bez bodů ležících na přímce $y = x$]

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$

[obor spojitosti: $R^2 \setminus \{[0,0]\}$; funkce není spojitá v bodě $[0,0]$]

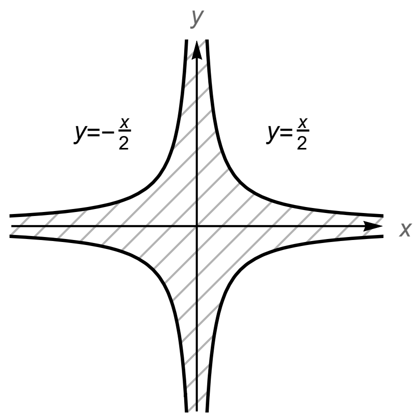
?

- $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-4y^2}}{2}$



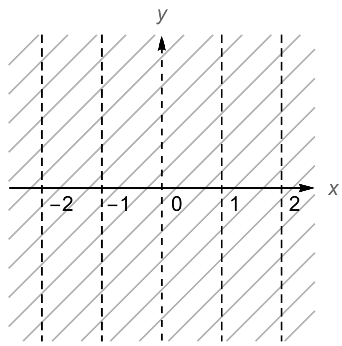
obor spojitosti: vnitřní a hraniční body elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1$

- $f(x,y) = \text{arcsin}\, 2xy$



obor spojitosti: část roviny R^2 ohraničená hyperbolami o rovnicích $y = \frac{1}{2}x$ a $y = -\frac{1}{2}x$

- $f(x,y) = \frac{y}{\sin^2 \pi x}$



obor spojitosti: všechny body roviny R^2, které neleží na přímkách $x = k, k \in \mathbb{Z}$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 6

Parciální derivace

Po prostudování kapitoly budete umět:

- počítat parciální derivace prvního řádu a určovat jejich hodnotu;
- počítat parciální derivace vyšších řádu a určovat jejich hodnotu.

Klíčová slova:

Parciální derivace, parciální derivace prvního a vyšších řádů, smíšené parciální derivace.

Parciální derivace funkce v bodě

Příklad 6.1 *Vypočtěme obě první parciální derivace funkce* $f(x,y) = x^3 - 4x^2y + 8xy^2 - 5y$ *a určeme jejich hodnotu v bodech* $A = [0,1]$, $B = [-1,1]$, $C = [2,0]$ *a* $D = [-x, 2x]$.

Řešení

Podle známých vzorců a pravidel pro derivování vypočteme nejprve parciální derivace v libovolném bodě $[x,y]$; dosazením za x a y pak vypočteme hodnotu parciálních derivací v uvedených bodech.

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 8xy + 8y^2; \quad f'_y(x,y) = -4x^2 + 16xy - 5$$
$$f'_x(A) = f'_x(0,1) = 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 \cdot 1 + 8 \cdot 1^2 = 8$$
$$f'_y(A) = f'_y(0,1) = -4 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0 \cdot 1 - 5 = -5$$
$$f'_x(B) = f'_x(-1,1) = 3 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) \cdot 1 + 8 \cdot 1^2 = 3 + 8 + 8 = 19$$
$$f'_y(B) = f'_y(-1,1) = -4 \cdot (-1)^2 + 16 \cdot (-1) \cdot 1 - 5 = -4 - 16 - 5 = -25$$
$$f'_x(C) = f'_x(2,0) = 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0^2 = 12$$
$$f'_y(C) = f'_y(2,0) = -4 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 \cdot 0 - 5 = -16 - 5 = -21$$
$$f'_x(D) = f'_x(-x,2x) = 3 \cdot (-x)^2 - 8 \cdot (-x) \cdot 2x + 8 \cdot (2x)^2 = 3x^2 + 16x^2 + 32x^2 = 51x^2$$
$$f'_y(D) = f'_y(-x,2x) = -4 \cdot (-x)^2 + 16 \cdot (-x) \cdot 2x - 5 = -4x^2 - 32x^2 - 5 = -36x^2 - 5$$

■

Příklad 6.2 *Určeme obě první parciální derivace funkce* $f(x,y) = 2x^{y^2}, x > 0$, *v bodě* $A = [1,e]$, $B = [e,e]$, $C = [1,2]$.

Řešení

Vypočteme $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ a pak postupně dosadíme souřadnice daných bodů.

$$f'_x(x,y) = 2y^2x^{y^2-1}; \quad f'_y(x,y) = 2x^{y^2} \ln x \cdot 2y = 4yx^{y^2} \ln x$$
$$f'_x(A) = f'_x(1,e) = 2e^2 1^{e^2-1} = 2e^2$$
$$f'_y(A) = f'_y(1,e) = 4e1^{e^2} \ln 1 = 0$$
$$f'_x(B) = f'_x(e,e) = 2e^2 e^{e^2-1} = 2e^{e^2+1}$$
$$f'_y(B) = f'_y(e,e) = 4e \cdot e^{e^2} \ln e = 4e^{e^2+1} \cdot 1 = 4e^{e^2+1}$$
$$f'_x(C) = f'_x(1,2) = 2 \cdot 2^2 1^{2^2-1} = 8$$
$$f'_y(C) = f'_y(1,2) = 4 \cdot 2 \cdot 1^{2^2} \ln 1 = 0$$

■

Příklad 6.3 *Určeme hodnoty obou prvních parciálních derivací funkce* $f(x,y) = e^x \sin y$ *v bodě* $A = [1, \pi]$.

Řešení

Vypočteme $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ a dosadíme pak za x a y.

$$f'_x(x,y) = e^x \sin y; \quad f'_y(x,y) = e^x \cos y$$
$$f'_x(A) = f'_x(1,\pi) = e^1 \sin \pi = e \cdot 0 = 0$$
$$f'_y(A) = f'_y(1,\pi) = e^1 \cos \pi = e \cdot (-1) = -e$$

■

Příklad 6.4 *Určeme* $f'_x(A)$ *a* $f'_y(A)$ *pro funkci* $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$*,* $y \neq 0$*, je-li* $A = [0,1]$.

Řešení

Vypočteme

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2};\ x \neq 0,\ y \neq 0$$
$$f'_y(x,y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2};\ x \neq 0,\ y \neq 0$$
$$f'_x(A) = f'_x(0,1) = \frac{1}{0^2 + 1^2} = 1$$
$$= f'_y(0,1) = \frac{0}{0^2 + 1^2} = 0$$

■

Výpočet parciálních derivací prvního řádu

V následujících příkladech nebudeme vždy důsledně konkrétně určovat $D(f)$, případně $D(f'_x)$ a $D(f'_y)$, poněvadž to již umíme.
Parciální derivace funkcí budou tedy počítány pro $[x,y] \in D(f)$ a derivace f'_x a f'_y budou určeny pro hodnoty $[x,y] \in D(f'_x)$ a $[x,y] \in D(f'_y)$.

Příklad 6.5 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $f(x,y) = \frac{5x^3y}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.

Řešení

Pokud derivujeme podle x, je y konstantní součinitel, který se derivováním zachovává (nemění).

$$f'_x(x,y) = \frac{15x^2(x^2-1) - 5x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \cdot y = \frac{15x^4 - 15x^2 - 10x^4}{(x^2-1)^2} \cdot y = \frac{5x^4 - 15x^2}{(x^2-1)^2} \cdot y =$$

$$f'_x(x,y) = \frac{5x^2(x^2-3)\,y}{(x^2-1)^2}$$

Pokud derivujeme podle y, pak je konstantním součinitelem výraz $\frac{5x^3}{x^2-1}$.

$$f'_y(x,y) = \frac{5x^3}{x^2-1} \cdot 1 = \frac{5x^3}{x^2-1}$$

■

Příklad 6.6 *Vypočtěme obě první parciální derivace funkce* $f(x,y) = x \sin(x+2y)$.

Řešení

Užitím vzorců a pravidla pro derivaci součinu dostáváme:

$$f'_x(x,y) = \sin(x+2y) + x\cos(x+2y)$$
$$f'_y(x,y) = 2x\cos(x+2y)$$

■

Příklad 6.7 *Vypočtěme obě první parciální derivace funkce* $f(x,y) = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Řešení

Opět podle vzorců a pravidel pro derivování součinu a složené funkce obdržíme:

$$f'_x(x,y) = \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} \cdot \cos\frac{y}{x} + \sin\frac{x}{y} \cdot \left(-\sin\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$$

$$f'_y(x,y) = \cos\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) \cdot \cos\frac{y}{x} + \sin\frac{x}{y} \cdot \left(-\sin\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$$

■

Příklad 6.8 *Vypočtěme obě první parciální derivace funkce* $f(x,y) = \ln\left(x + \frac{4}{y^2}\right)$, $y \neq 0$.

Řešení

Podle vzorců a pravidel pro derivování obdržíme:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{x + \frac{4}{y^2}} \cdot 1 = \frac{y^2}{xy^2 + 4}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{1}{x + \frac{4}{y^2}} \cdot \left(-\frac{8}{y^3}\right) = \frac{y^2}{xy^2 + 4} \cdot \frac{-8}{y^3} = \frac{-8}{xy^3 + 4y}$$

■

Příklad 6.9 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $f(x,y) = x \sin x^2$.

Řešení

Podle vzorců a pravidel pro derivování je

$$f'_x(x,y) = 1 \cdot \sin x^2 + x \cdot \cos x^2 \cdot 2x = \sin x^2 + 2x^2 \cos x^2$$
$$f'_y(x,y) = 0$$

■

Příklad 6.10 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $f(x,y) = y^x$, $y > 0$.

Řešení

Podle vzorců a pravidel pro derivování je

$$f'_x(x,y) = y^x \ln x$$
$$f'_y(x,y) = xy^{x-1}$$

■

Příklad 6.11 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $f(x,y) = \operatorname{tg}(x^2 + 2xy)$.

Řešení

Podle vzorců a pravidel pro derivování je

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x^2 + 2xy)} \cdot (2x + 2y) = \frac{2(x+y)}{\cos^2(x^2 + 2xy)}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x^2 + 2xy)} \cdot 2x = \frac{2x}{\cos^2(x^2 + 2xy)}$$

■

Příklad 6.12 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $f(x,y) = \arcsin \frac{x^2}{y}$, $y \neq 0$.

Řešení

Podle vzorců a pravidel pro derivování je

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \frac{2x}{y} = \frac{y}{\sqrt{y^2-x^4}} \cdot \frac{2x}{y} = \frac{2x}{\sqrt{y^2-x^4}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-x^2}{y^2}\right) = \frac{y}{\sqrt{y^2-x^4}} \cdot \frac{-x^2}{y^2} = \frac{-x^2}{y\sqrt{y^2-x^4}}$$

■

Příklad 6.13 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $f(x,y) = \frac{e^{x^2y}}{x^2}$, $x \neq 0$.

Řešení

Upravíme funkci $f(x,y) = e^{x^2y} \cdot x^{-2}$ a derivujeme ji jako součin.

$$f'_x(x,y) = e^{x^2y} \cdot 2xy \cdot x^{-2} + e^{x^2y} \cdot (-2)\,x^{-3} = 2e^{x^2y}\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$f'_y(x,y) = e^{x^2y} \cdot x^2 \cdot x^{-2} = e^{x^2y}$$

■

Příklad 6.14 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $z = \frac{xy}{x+y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq -x$.

Řešení

Derivujeme jako podíl.

$$z'_x = \frac{y\,(x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$z'_y = \frac{x\,(x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

■

Příklad 6.15 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $z = \frac{1}{x(x-y)^2}$, $x \neq 0$, $y \neq x$.

Řešení

Derivujeme jako podíl s konstantou v čitateli.

$$z'_x = \frac{-1 \cdot \left[1 \cdot (x-y)^2 + x \cdot 2 \cdot (x-y)\right]}{\left[x\,(x-y)^2\right]^2} = \frac{-(x-y)\,[x-y+2x]}{x^2\,(x-y)^4} = \frac{y-3x}{x^2\,(x-y)^3}$$

$$z'_y = \frac{-x \cdot 2 \cdot (x-y) \cdot (-1)}{\left[x\,(x-y)^2\right]^2} = \frac{2x\,(x-y)}{x^2\,(x-y)^4} = \frac{2x}{x^2\,(x-y)^3}$$

■

Příklad 6.16 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $z = \ln \sin\left(xy^2\right)$.

Řešení

Derivujeme složenou funkci.

$$z'_x = \frac{1}{\sin\left(xy^2\right)} \cdot \cos\left(xy^2\right) \cdot y^2 = y^2 \operatorname{cotg}\left(xy^2\right)$$
$$z'_y = \frac{1}{\sin\left(xy^2\right)} \cdot \cos\left(xy^2\right) \cdot 2xy = 2xy \operatorname{cotg}\left(xy^2\right)$$

■

Příklad 6.17 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $z = e^{y^x}$.

Řešení

Derivujeme složenou funkci.

$$z'_x = e^{y^x} \cdot y^x \cdot \ln y = y^x e^{y^x} \ln y$$
$$z'_y = e^{y^x} \cdot x \cdot y^{x-1} = xy^{x-1} e^{y^x}$$

■

Příklad 6.18 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $z = \left(3x^2y + 5xy^2\right)^3$.

Řešení

Derivujeme složenou funkci.

$$z'_x = 3\left(3x^2y + 5xy^2\right)^2 \left(6xy + 5y^2\right)$$
$$z'_y = 3\left(3x^2y + 5xy^2\right)^2 \left(3x^2 + 10xy\right)$$

■

Příklad 6.19 *Vypočtěme parciální derivace funkce* $z = 6\sqrt[3]{\sin^2(xy)}$.

Řešení

Nejprve funkci upravíme a pak derivujeme složenou funkci.

$$z = 6\left[\sin(xy)\right]^{\frac{2}{3}}$$
$$z'_x = 6 \cdot \frac{2}{3}\left[\sin(xy)\right]^{-\frac{1}{3}} \cos(xy) \cdot y = \frac{4y\cos(xy)}{\sqrt[3]{\sin(xy)}}$$
$$z'_y = 6 \cdot \frac{2}{3}\left[\sin(xy)\right]^{-\frac{1}{3}} \cos(xy) \cdot x = \frac{4x\cos(xy)}{\sqrt[3]{\sin(xy)}}$$

■

Příklad 6.20 *Vypočtěme parciální derivace funkce $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$, $x \neq 0$, $k\pi < \frac{x}{y} < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Řešení

Derivujeme složenou funkci.

$$z'_x = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y \frac{\sin \frac{x}{y}}{\cos \frac{x}{y}} \cos^2 \frac{x}{y}} = \frac{1}{y \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}$$

$$z'_y = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot x \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-x}{y^2 \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{-2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}$$

■

Příklad 6.21 *Dokažme, že pro funkci $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$, $x > 0$, platí $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$.*

Řešení

Vypočteme parciální derivace a pak do rovnice dosadíme. Víme, že $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \frac{y}{x} + \sqrt{x} \cos \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2x} \sin \frac{y}{x} - \frac{y\sqrt{x}}{x^2} \cos \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} \cos \frac{y}{x}$$

Dosadíme:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$$

$$x\left(\frac{\sqrt{x}}{2x} \sin \frac{y}{x} - y\frac{\sqrt{x}}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) + y\frac{\sqrt{x}}{x} \cdot \cos \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2} \sin \frac{y}{x}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \sin \frac{y}{x} - y\frac{\sqrt{x}}{x} \cos \frac{y}{x} + \frac{y\sqrt{x}}{x} \cos \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2} \sin \frac{y}{x}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \sin \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2} \sin \frac{y}{x}$$

Tím je důkaz proveden.

■

Příklad 6.22 *Dokažme, že funkce $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

Řešení

Vypočteme parciální derivace.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}$$

Dosadíme do rovnice.

$$\begin{aligned} x\frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2} + y\frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} &= 2 \\ \frac{2x^2 + xy + xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} &= 2 \\ \frac{2\left(x^2 + xy + y^2\right)}{x^2 + xy + y^2} &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

■

Příklad 6.23 *Vypočítejme parciální derivace funkce $f(x, y) = x \sin x e^{\frac{x}{y}}$, $y \neq 0$.*

Řešení

Podle vzorců a derivace součinu a složené funkce je:

$$f'_x(x, y) = (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x)\, e^{\frac{x}{y}} + x \sin x e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = e^{\frac{x}{y}} \left(\sin x + x \cos x + \frac{x}{y} \sin x\right)$$

$$f'_y(x, y) = x \sin x \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) = -\frac{x^2}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \sin x$$

■

Příklad 6.24 *Vypočítejme parciální derivace funkce $f(x, y) = x^{e^y}$, $x > 0$.*

Řešení

Podle vzorců je:

$$f'_x(x, y) = e^y x^{e^y - 1}$$

$$f'_y(x, y) = x^{e^y} \ln x \cdot e^y = e^y x^{e^y} \ln x$$

■

Příklad 6.25 *Vypočítejme parciální derivace funkce $f(x,y) = x^x \sin xy$, $x > 0$.*

Řešení

Připravíme si nejprve derivaci výrazu x^x podle x užitím logaritmické derivace a pak budeme derivovat funkci jako součin a výraz sin xy jako funkci složenou.

$$(x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

$$f'_x(xy) = x^x(\ln x + 1)\sin xy + x^x\cos xy\cdot y = x^x\left[(\ln x + 1)\sin xy + y\cos xy\right]$$

Derivujeme-li podle y, pak x^x je konstantní součinitel a sin xy derivujeme jako funkci složenou.

$$f'_y(x,y) = x^x\cos xy\cdot x = x^{x+1}\cos xy$$

■

Příklad 6.26 *Vypočítejme parciální derivace funkce $f(x,y) = (xy)^x$, $x > 0$, $y > 0$.*

Řešení

Při derivování podle x užijeme logaritmickou derivaci.
Upravíme funkci $f(x,y) = (xy)^x = e^{\ln(xy)^x} = e^{x\ln(xy)}$.

$$f'_x(x,y) = e^{x\ln(xy)}\left[1\cdot\ln(xy) + x\frac{1}{xy}y\right] = (xy)^x\left[1 + \ln(xy)\right]$$

Výpočet derivace podle y je jednodušší; derivujeme funkci bez úpravy užitím vzorce $(x^n)'$.

$$f'_y(x,y) = x(xy)^{x-1}\cdot x = x^2(xy)^{x-1} = x^{x+1}y^{x-1}$$

■

Příklad 6.27 *Vypočítejme parciální derivace funkce $z = x^{xy}$, $x > 0$.*

Řešení

Při derivování podle x užijeme logaritmickou derivaci, proto funkci upravíme.

$$z = x^{xy} = e^{\ln x^{xy}} = e^{xy\ln x}$$

$$z'_x = e^{xy\ln x}\left(y\ln x + xy\frac{1}{x}\right) = yx^{xy}(1 + \ln x)$$

Výpočet derivace podle y je jednodušší; derivujeme funkci bez úpravy jako funkci složenou podle vzorce $(a^x)'$.

$$z'_y = x^{xy}\cdot\ln x\cdot x = x^{xy+1}\ln x$$

■

Příklad 6.28 *Vypočítejme parciální derivace funkce* $f(x,y) = x^{x^y}$, $x > 0$, $y > 0$.

Řešení

Při výpočtu f'_x užijeme logaritmickou derivaci.

$$x^{x^y} = e^{\ln x^{x^y}} = e^{x^y \ln x}$$

$$f'_x(x,y) = e^{x^y \ln x}\left(yx^{y-1}\ln x + x^y \frac{1}{x}\right) = x^{x^y} x^{y-1}(y \ln x + 1)$$

$$f'_y(x,y) = x^{x^y} \ln x \cdot x^y \ln x = x^{x^y + y} \ln^2 x$$

■

Příklad 6.29 *Vypočítejme parciální derivace funkce* $f(x,y) = (4 - xy)^{x+2}$.

Řešení

Při výpočtu podle x užijeme logaritmickou derivaci.

Upravíme $f'_x(x,y) = e^{(x+2)\ln(4-xy)}$

$$f'_x(x,y) = e^{(x+2)\ln(4-xy)}\left[\ln(4-xy) + (x+2)\frac{-y}{4-xy}\right] =$$

$$= (4-xy)^{x+2}\left[\ln(4-xy) - \frac{y(x+2)}{4-xy}\right]$$

Derivaci podle y vypočteme jako derivaci složené funkce a užijeme vzorec $(x^n)'$.

$$f'_y(x,y) = (x+2)(4-xy)^{x+2-1} \cdot (-x) = -x(x+2)(4-xy)^{x+1}$$

■

Parciální derivace vyšších řádů

Příklad 6.30 *Vypočítejme parciální derivace prvního, druhého a třetího řádu funkce* $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2y + e^{x-y}$. *Porovnejme vypočtené smíšené parciální derivace.*

Řešení

Postupně vypočítáme požadované derivace funkce f v libovolném bodě $[x,y]$. Místo např. $f''_{xx}(x,y)$ budeme psát stručně f''_{xx}.

$$
\begin{array}{ll}
f'_x = 3x^2 + 2xy + e^{x-y} & f'_y = -3y^2 + x^2 - e^{x-y} \\
f''_{xx} = 6x + 2y + e^{x-y} & f''_{yx} = 2x - e^{x-y} \\
f''_{xy} = 2x - e^{x-y} & f''_{yy} = -6y + e^{x-y} \\
f'''_{xxx} = 6 + e^{x-y} & f'''_{yxx} = 2 - e^{x-y} \\
f'''_{xxy} = 2 - e^{x-y} & f'''_{yxy} = e^{x-y} \\
f'''_{xyx} = 2 - e^{x-y} & f'''_{yyx} = e^{x-y} \\
f'''_{xyy} = e^{x-y} & f'''_{yyy} = -6 - e^{x-y}
\end{array}
$$

Postupně porovnáváme smíšené parciální derivace.
Zjistíme, že:

$$
\begin{aligned}
&f''_{xy} = f''_{yx} \\
&f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} \\
&f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx}
\end{aligned}
$$

Smíšené parciální derivace se sobě rovnají, protože jsou spojité. Při jejich výpočtu nezáleží na pořadí proměnných, podle kterých derivujeme, ale pouze na tom, kolikrát podle té které proměnné derivujeme.

■

Příklad 6.31 *Vypočtěme smíšenou parciální derivaci 2. řádu funkce* $z = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$.

Řešení

Máme vypočítat z''_{xy} nebo z''_{yx}. Poněvadž jsou tyto parciální derivace spojité, pak platí $z''_{xy} = z''_{yx}$; říkáme také, že jsou tyto derivace záměnné. Nebude tedy záležet na pořadí derivování podle proměnných, co se týká výsledku, ale bude (v tomto případě) záležet na pořadí derivování, co se týká pracnosti výpočtu.
Srovnejme oba postupy výpočtu.

$$
\begin{aligned}
&z = xy + \frac{e^y}{y^2+1} \\
&z'_x = y,\ z''_{xy} = 1
\end{aligned}
$$

Výpočet je snadný.
Pokud ale nejprve vypočteme z'_y, je výpočet pracnější, zdlouhavější.

$$
\begin{aligned}
&z'_y = x + \frac{e^y\left(y^2+1\right) - e^y \cdot 2y}{\left(y^2+1\right)^2} = x + \frac{e^y\left(y^2-2y+1\right)}{\left(y^2+1\right)} \\
&z''_{yx} = 1
\end{aligned}
$$

■

Příklad 6.32 *Vypočtěme parciální derivace 1. - 3. řádu funkce* $z=\frac{x^2}{y^3}$, $y\neq 0$, *a určeme jejich hodnotu v bodě* $A=[1,-1]$.

Řešení

Postupně vypočteme požadované parciální derivace a pak za x a y dosadíme souřadnice bodu A. Smíšené parciální derivace se sobě rovnají, protože na množině $\{[x,y]\in R^2;\ y\neq 0\}$ jsou spojité.

$$
\begin{array}{ll}
z'_x=\dfrac{2x}{y^3} & z'_x\left(1,-1\right)=\dfrac{2\cdot 1}{\left(-1\right)^3}=-2\\
z'_y=\dfrac{-3x^2}{y^4} & z'_y\left(1,-1\right)=\dfrac{-3\cdot 1^2}{\left(-1\right)^4}=-3\\
z''_{xx}=\dfrac{2}{y^3} & z''_{xx}\left(1,-1\right)=\dfrac{2}{\left(-1\right)^3}=-2\\
z''_{xy}=\dfrac{-6x}{y^4} & z''_{xy}\left(1,-1\right)=\dfrac{-6\cdot 1}{\left(-1\right)^4}=-6\\
z''_{yy}=\dfrac{12x^2}{y^5} & z''_{yy}\left(1,-1\right)=\dfrac{12\cdot 1^2}{\left(-1\right)^5}=-12\\
z'''_{xxx}=0 & z'''_{xxx}\left(1,-1\right)=0\\
z'''_{xxy}=\dfrac{-6}{y^4} & z'''_{xxy}\left(1,-1\right)=\dfrac{-6}{\left(-1\right)^4}=-6\\
z'''_{xyy}=\dfrac{24x}{y^5} & z'''_{xyy}\left(1,-1\right)=\dfrac{24\cdot 1}{\left(-1\right)^5}=-24\\
z'''_{yyy}=\dfrac{-60x^2}{y^6} & z'''_{yyy}\left(1,-1\right)=\dfrac{-60\cdot 1^2}{\left(-1\right)^6}=-60
\end{array}
$$

■

Příklad 6.33 *Vypočtěme parciální derivace 1. - 3. řádu funkce* $z = \ln\left(x^2y^2\right)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, *a jejich hodnotu v bodě* $A = [-2, 1]$.

Řešení

Postupně vypočítáme uvedené parciální derivace a pak za x a y dosadíme souřadnice bodu A. Smíšené parciální derivace se sobě rovnají, protože na množině $\{[x,y] \in R^2; x \neq 0,\ y \neq 0\}$ jsou spojité.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2y^2} \cdot 2xy^2 = \frac{2}{x} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(-2,1) = \frac{2}{-2} = -1$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2y^2} \cdot 2x^2y = \frac{2}{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(-2,1) = \frac{2}{1} = 2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,1) = \frac{-2}{(-2)^2} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-2,1) = 0$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,1) = \frac{-2}{1^2} = -2$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{4}{x^3} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(-2,1) = \frac{4}{(-2)^3} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(-2,1) = 0$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}(-2,1) = 0$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{4}{y^3} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(-2,1) = \frac{4}{1^3} = 4$$

■

Příklad 6.34 *Vypočtěme* $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ *funkce* $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y}$, $y \neq 0$, *a její hodnotu v bodě* $T = [-1, 2]$.

Řešení

Vypočteme požadovanou parciální derivaci a za x a y dosadíme souřadnice bodu T.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{y} = \frac{y^2}{y^2 + x^4} \cdot \frac{2x}{y} = \frac{2xy}{y^2 + x^4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2x\left(y^2 + x^4\right) - 2xy \cdot 2y}{\left(y^2 + x^4\right)^2} = \frac{2\left(xy^2 + x^5 - 2xy^2\right)}{\left(y^2 + x^4\right)^2} = \frac{2\left(x^5 - xy^2\right)}{\left(y^2 + x^4\right)^2}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 2\frac{-2xy\left(y^2 + x^4\right)^2 - \left(x^5 - xy^2\right)2\left(y^2 + x^4\right)2y}{\left(y^2 + x^4\right)^4} =$$
$$= 4\frac{\left(y^2 + x^4\right)\left[-xy\left(y^2 + x^4\right) - 2x^5y + 2xy^3\right]}{\left(y^2 + x^4\right)^4} = 4\frac{-xy^3 - x^5y - 2x^5y + 2xy^3}{\left(y^2 + x^4\right)^3} =$$
$$= 4\frac{xy^3 - 3x^5y}{\left(y^2 + x^4\right)^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(-1,2) = 4\frac{-1 \cdot 2^3 - 3 \cdot (-1)^5 \cdot 2}{\left[2^2 + (-1)^4\right]^3} = 4\frac{-2}{5^3} = -\frac{8}{5^3} = \frac{-8}{125}$$

■

Příklad 6.35 *Je daná funkce* $z = \frac{xy}{x-y}$, $y \neq x$. *Dokažme, že funkce* z *vyhovuje parciální diferenciální rovnici*

$$z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = \frac{2}{x-y}.$$

Řešení

Funkce z má spojité parciální derivace; vypočteme je.

$$\begin{aligned}
z'_x &= \frac{y\left(x-y\right) - xy\cdot 1}{\left(x-y\right)^2} = \frac{-y^2}{\left(x-y\right)^2}\\
z'_y &= \frac{x\left(x-y\right) - xy\cdot(-1)}{\left(x-y\right)^2} = \frac{x^2}{\left(x-y\right)^2}\\
z''_{xx} &= \frac{-\left(-y^2\right)\cdot 2\left(x-y\right)\cdot 1}{\left(x-y\right)^4} = \frac{2y^2}{\left(x-y\right)^3}\\
z''_{xy} &= \frac{-2y\left(x-y\right)^2 + y^2 2\left(x-y\right)\cdot(-1)}{\left(x-y\right)^4} = \frac{2\left(x-y\right)\left[-xy + y^2 - y^2\right]}{\left(x-y\right)^4} = -\frac{2xy}{\left(x-y\right)^3}\\
z''_{yy} &= \frac{-x^2\cdot 2\left(x-y\right)\cdot(-1)}{\left(x-y\right)^4} = \frac{2x^2}{\left(x-y\right)^3}
\end{aligned}$$

Dosadíme vypočtené parciální derivace do rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{2y^2}{\left(x-y\right)^3} + 2\frac{-2xy}{\left(x-y\right)^3} + \frac{2x^2}{\left(x-y\right)^3} &= \frac{2}{x-y}\\
\frac{2y^2 - 4xy + 2x^2}{\left(x-y\right)^3} &= \frac{2}{x-y}\\
\frac{2\left(x-y\right)^2}{\left(x-y\right)^3} &= \frac{2}{x-y}\\
\frac{2}{x-y} &= \frac{2}{x-y}
\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

■

Příklad 6.36 *Vypočtěme* $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(A)$*, je-li* $f(x,y) = \frac{1}{x^2}\ln(xy^2)$*,* $x > 0$*, a bod* $A = \left[\frac{1}{a}, -a\right]$*,* $a \neq 0$*.*

Řešení

Vypočteme požadovanou derivaci 4. řádu.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2}{x^3}\ln\left(xy^2\right) + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{xy^2}\cdot y^2 = \frac{1}{x^3}\left[-2\ln\left(xy^2\right)+1\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{3}{x^4}\left[-2\ln\left(xy^2\right)+1\right] + \frac{1}{x^3}\cdot(-2)\frac{1}{xy^2}\cdot y^2 = \frac{1}{x^4}\left[6\ln\left(xy^2\right)-3-2\right] =$$

$$= \frac{1}{x^4}\left[6\ln\left(xy^2\right)-5\right]$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{x^4}\cdot 6\cdot\frac{1}{xy^2}\cdot 2y = \frac{12}{x^5 y}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{12}{x^5}\cdot\frac{-1}{y^2} = \frac{-12}{x^5y^2}$$

Dosadíme souřadnice bodu A.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(A) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\left(\frac{1}{a}, -a\right) = \frac{-12}{\frac{1}{a^5}\cdot(-a)^2} = \frac{-12}{\frac{1}{a^3}} = -12a^3$$

■

Počítáme-li parciální derivace podle jedné z proměnných, pak druhou proměnnou považujeme za konstantu. Při výpočtu užíváme známé vzorce a pravidla pro derivování. Jsou-li smíšené parciální derivace spojité, pak nezáleží na pořadí v jakém derivujeme, ale pouze na tom, kolikrát podle té které proměnné derivujeme.

1. *Vypočítejte 1. parciální derivace funkce f.*

- $f\left(x,y\right)=x^3+2x^2y+3xy^2+4x-5y+100$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x=3x^2+4xy+3y^2+4 \\ f'_y=2x^2+6xy-5 \end{array}\right]$$

- $f\left(x,y\right)=\frac{e^{xy^2}}{y^3}$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x=\frac{1}{y}e^{xy^2} \\ f'_y=\frac{e^{xy^2}\left(2xy^2-3\right)}{y^4} \end{array}\right]$$

- $f\left(x,y\right)=x^2e^{xy}$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x=e^{xy}\left(2x+x^2y\right) \\ f'_y=x^3e^{xy} \end{array}\right]$$

- $f\left(x,y\right)=x^y$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x=yx^{y-1} \\ f'_y=x^y\ln x \end{array}\right]$$

- $f\left(x,y\right)=e^{\frac{x}{y}}$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x=\frac{1}{y}e^{xy^2} \\ f'_y=\frac{e^{xy^2}\left(2xy^2-3\right)}{y^4} \end{array}\right]$$

- $f\left(x,y\right)=y\sin y^2$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x=0 \\ f'_y=\sin y^2+2y^2\cos y^2 \end{array}\right]$$

- $f\left(x,y\right)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x=\frac{y}{x^2+y^2} \\ f'_y=\frac{-x}{x^2+y^2} \end{array}\right]$$

- $f\left(x,y\right)=\left(x+y\right)^y$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x=y\left(x+y\right)^{y-1} \\ f'_y=\left(x+y\right)^y\left[\ln\left(x+y\right)+\frac{y}{x+y}\right] \end{array}\right]$$

- $f\left(x,y\right)=\ln\sin\left(xy^2\right)$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x=y^2\operatorname{cotg}\left(xy^2\right) \\ f'_y=2xy\operatorname{cotg}\left(xy^2\right) \end{array}\right]$$

?

- $f(x,y) = \ln xy$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x = \frac{1}{x} \\ f'_y = \frac{1}{y} \end{array} \right]$$

- $f(x,y) = \ln \frac{1}{xy}$

$$\left[\begin{array}{l} f'_x = -\frac{1}{x} \\ f'_y = -\frac{1}{y} \end{array} \right]$$

2. *Vypočítejte 2. parciální derivace funkce f.*

- $f(x,y) = x^3 - 3x^4y + y^5$

$$\left[\begin{array}{l} f''_{xx} = 6x - 36x^2y \\ f''_{yy} = 20y^3 \\ f''_{xy} = -12x^3 = f''_{yx} \end{array} \right]$$

- $f(x,y) = \frac{1}{3xy},\ x \neq 0, y \neq 0$

$$\left[\begin{array}{l} f''_{xx} = \frac{2}{3x^3y} \\ f''_{yy} = \frac{2}{3xy^3} \\ f''_{xy} = \frac{1}{3x^2y^2} = f''_{yx} \end{array} \right]$$

- $f(x,y) = e^{2x} \sin y$

$$\left[\begin{array}{l} f''_{xx} = 4e^{2x} \sin y \\ f''_{yy} = -e^{2x} \sin y \\ f''_{xy} = 2e^{2x} \cos y = f''_{yx} \end{array} \right]$$

3. *Určete* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ *pro funkci* $f(x,y) = 3^{xy}$.

$$[\ln 3]$$

4. *Přesvědčte se, že funkce* $z = x\sqrt{y^2 - x^2}$ *je řešením parciální diferenciální rovnice*

$xy\frac{\partial z}{\partial x} + x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$

5. *Určete* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *a* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *funkce* $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \right]$$

6. *Vypočtěte* $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}$ *a* $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ *funkce* $f(x,y) = y \ln(x^2y)$, $y > 0$, *a jejich hodnoty v bodě* $A = [-1, 2]$.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = \frac{4}{x^3};\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(-1,2) = -4 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\frac{1}{y^2};\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\frac{1}{4} \end{array} \right]$$

?

7. *Vypočtěte parciální derivace 1. - 3. řádu funkce* $z = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, *a určete jejich hodnotu v bodě* $A = [1, -1]$.

$$\left[\begin{array}{l} z'_x = -\frac{y}{x^2},\ z'_y = \frac{1}{x} \\ z''_{xx} = \frac{2y}{x^3},\ z''_{yy} = 0,\ z''_{xy} = -\frac{1}{x^2} \\ z'''_{xxx} = \frac{-6y}{x^4},\ z'''_{xxy} = \frac{2}{x^3},\ z'''_{xyy} = 0,\ z'''_{yyy} = 0 \\ z'_x(A) = -2,\ z'_y(A) = -1 \\ z''_{xx}(A) = -4,\ z''_{yy}(A) = 0,\ z''_{xy}(A) = -1 \\ z'''_{xxx}(A) = -12,\ z'''_{xxy}(A) = -2,\ z'''_{xyy}(A) = 0,\ z'''_{yyy}(A) = 0 \end{array}\right]$$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 7

Tečná rovina a normála

Po prostudování kapitoly budete umět:

- stanovit rovnici tečné roviny τ;
- stanovit rovnici normály n.

Klíčová slova:

Tečná rovina, dotykový bod, normála.

Připomínáme: Rovnice tečné roviny τ plochy $z = f(x,y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ je dána vzorcem

$$\tau: \ z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

Rovnice normály n plochy $z = f(x,y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$ je dána vzorcem

$$n: \ \frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{-1}$$

Příklad 7.1 *Napišme rovnici tečné roviny τ a normály n plochy dané rovnicí $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ v bodě $T = [1,2,4]$.*

Řešení

Vypočteme parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a jejich hodnotu v bodě T a dosadíme do rovnice tečné roviny a normály. Poněvadž $z = f(x,y)$, můžeme rovnici τ a n psát i takto:

$$\tau: \ z = z_0 + z'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$n: \ \frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

$$z'_x = 2x - 2y - 1 \qquad z'_x(1,2) = 2\cdot 1 - 2\cdot 2 - 1 = -3$$
$$z'_y = -2x + 2y + 2 \quad z'_y(1,2) = -2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2 = 4$$

$$\tau: \ z = 4 - 3(x-1) + 4(y-2)$$
$$\tau: \ z = 4 - 3x + 3 + 4y - 8$$
$$\tau: \ 3x - 4y + z + 1 = 0$$
$$n: \ \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{-1}$$

■

Příklad 7.2 *Napišme rovnici tečné roviny τ a normály n plochy dané rovnicí $z = \frac{1}{xy}; x \neq 0, y \neq 0$, v bodě $T = [1,1,?]$.*

Řešení

Určíme třetí souřadnici bodu T, dosadíme do vzorců.

$$z(T) = \frac{1}{1\cdot 1} = 1; \ T = [1,1,1]$$
$$z'_x = \frac{-1}{x^2y}; \ z'_x(T) = \frac{-1}{1^2\cdot 1} = -1$$
$$z'_y = \frac{-1}{xy^2}; \ z'_x(T) = \frac{-1}{1\cdot 1^2} = -1$$
$$\tau: \ z = 1 - 1(x-1) - 1(y-1)$$
$$\tau: \ z = 1 - x + 1 - y + 1$$
$$\tau: \ x + y + z - 3 = 0$$
$$n: \ \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

Upravíme

$n:\ x = y = z$

■

Příklad 7.3 *Napišme rovnice tečných roviny τ_1 a τ_2 k ploše dané rovnicí $z = x^4 + y^4 - 36xy$ v bodě $T_1 = [3,3,?]$ a $T_2 = [2,2,?]$.*

Řešení

Vypočteme z-ové souřadnice bodů T_1 a T_2, parciální derivace a jejich hodnoty v bodech T_1 a T_2 a dosadíme do vzorce.

$$z(T_1) = 3^4 + 3^4 - 36 \cdot 3 \cdot 3 = 81 + 81 - 324 = -162$$
$$T_1 = [3,3,-162]$$
$$z(T_2) = 2^4 + 2^4 - 36 \cdot 2 \cdot 2 = 32 - 144 = -112$$
$$T_2 = [2,2,-112]$$

$$\begin{array}{ll} z'_x = 4x^3 - 36y & z'_x(T_1) = 4 \cdot 3^3 - 36 \cdot 3 = 108 - 108 = 0 \\ z'_y = 4y^3 - 36x & z'_y(T_1) = 4 \cdot 3^3 - 36 \cdot 3 = 0 \\ & z'_x(T_2) = 4 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2 = 32 - 72 = -40 \\ & z'_y(T_2) = 4 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2 = -40 \end{array}$$

$$\tau_1:\ z = -162 + 0(x-3) + 0(y-3)$$
$$\tau_1:\ z = -162$$

Tečná rovina τ_1 je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou (x,y).

$$\tau_2:\ z = -112 - 40(x-2) - 40(y-2)$$
$$\tau_2:\ z = -112 - 40x + 80 - 40y + 80$$
$$\tau_2:\ 40x + 40y + z - 48 = 0$$

■

Příklad 7.4 *Napišme rovnici tečné roviny τ a normály n plochy dané rovnicí $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ v bodě $T = [3,4,?]$.*

Řešení

Vypočteme $f(x_0,y_0) = z_0$, parciální derivace a jejich hodnotu v bodě T a dosadíme do vzorců.

$$f(x_0,y_0) = f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} - 3 \cdot 4 = 5 - 12 = -7;\ T = [3,4,-7]$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(T) = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} - 4 = \frac{3}{5} - 4 = -\frac{17}{5}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y - x = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(T) = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} - 3 = \frac{4}{5} - 3 = \frac{-11}{5}$$

$$\tau:\ z=-7-\frac{17}{5}\left(x-3\right)-\frac{11}{5}\left(y-4\right)$$
$$\tau:\ 5z=-35-17x+51-11y+44$$
$$\tau:\ 17x+11y+5z-60=0$$
$$n:\ \frac{x-3}{-\frac{17}{5}}=\frac{y-4}{-\frac{11}{5}}=\frac{z+7}{-1}$$
$$n:\ \frac{-5\left(x-3\right)}{17}=\frac{-5\left(y-4\right)}{11}=\frac{z+7}{-1}\quad /:(-5)$$
$$n:\ \frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}$$

■

Příklad 7.5 *Napišme rovnici tečné roviny τ a normály n plochy dané rovnicí $f\left(x,y\right)=\frac{x^2+y^2}{xy}; x\neq 0, y\neq 0$, v bodě $T=[1,2,?]$.*

Řešení

Vypočteme 3. souřadnici bodu T, parciální derivace a jejich hodnoty v bodě T a dosadíme do vzorců.

$$f\left(x_0,y_0\right)=f\left(1,2\right)=\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}=\frac{5}{2};\ T=\left[1,2,\frac{5}{2}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x\cdot xy-\left(x^2+y^2\right)\cdot y}{\left(xy\right)^2}=\frac{2x^2y-x^2y-y^3}{\left(xy\right)^2}=\frac{x^2y-y^3}{x^2y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y\cdot xy-\left(x^2+y^2\right)\cdot x}{\left(xy\right)^2}=\frac{2xy^2-x^3-xy^2}{\left(xy\right)^2}=\frac{xy^2-x^3}{x^2y^2}=\frac{y^2-x^2}{xy^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,2\right)=\frac{1^2-2^2}{1^2\cdot 2}=\frac{-3}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,2\right)=\frac{2^2-1^2}{1\cdot 2^2}=\frac{3}{4}$$

$$\tau:\ z=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(x-1\right)+\frac{3}{4}\left(y-2\right)$$
$$\tau:\ z=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}y-\frac{3}{2}\quad /\cdot 4$$
$$\tau:\ 4z=10-6x+6+3y-6$$
$$\tau:\ 6x-3y+4z-10=0$$
$$n:\ \frac{x-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{y-2}{\frac{3}{4}}=\frac{z-\frac{5}{2}}{-1}$$
$$n:\ \frac{2\left(x-1\right)}{3}=\frac{-4\left(y-2\right)}{3}=\frac{2z-5}{2}$$

■

Příklad 7.6 *Přesvědčme se, že plochy $z_1 = e^{x+2y+4}$ a $z_2 = xy + 8x - x^2 - 5$ mají v bodě $T = [2, -3, 1]$ společnou tečnou rovinu τ; napište rovnici této roviny.*

Řešení

Zjistíme, zda bod T leží na ploše z_1 a z_2 a to tak, že dosadíme souřadnice bodu T do rovnic ploch z_1 a z_2. Plocha $z_1 :\ 1 = e^{2+2(-3)+4} = e^0 = 1;\ T \in z_1$
Plocha $z_2 :\ 1 = 2 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 - 2^2 - 5 = 1;\ T \in z_2$
Vypočteme hodnotu parciálních derivací v bodě T.

Plocha z_1: $\frac{\partial z_1}{\partial x} = e^{x+2y+4};\quad \frac{\partial z_1}{\partial x}(T) = e^{2+2(-3)+4} = e^0 = 1$

$\frac{\partial z_1}{\partial y} = 2e^{x+2y+4};\quad \frac{\partial z_1}{\partial y}(T) = 2 \cdot e^0 = 2$

Plocha z_2: $\frac{\partial z_2}{\partial x} = y + 8 - 2x;\quad \frac{\partial z_2}{\partial x}(T) = -3 + 8 - 2 \cdot 2 = 1$

$\frac{\partial z_2}{\partial y} = x;\quad \frac{\partial z_2}{\partial y}(T) = 2$

Protože $\frac{\partial z_1}{\partial x}(T) = \frac{\partial z_2}{\partial x}(T) = 1$ a $\frac{\partial z_2}{\partial y}(T) = \frac{\partial z_2}{\partial y}(T) = 2$, tedy hodnoty parciálních derivací ploch z_1 a z_2 v bodě T se sobě rovnají, je tečná rovina τ v bodě T společná.

$\tau :\ z = 1 + 1\,(x - 2) + 2\,(y + 3)$

$\tau :\ z = 1 + x - 2 + 2y + 6$

$\tau :\ x + 2y - z + 5 = 0$

Rovnice tečné roviny $\tau :\ x + 2y - z + 5 = 0$.

■

Σ

Ke stanovení rovnic tečné roviny τ a normály n slouží vzorce:

$$\tau : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

$$n : \frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Dotykový bod $T = [x_0, y_0, z_0]$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$.
Při určování rovnic τ a n vypočítáme 1. parciální derivace funkce f a jejich hodnotu v bodě T.
Získané hodnoty pak dosadíme do rovnic pro τ a n.

?

1. *Napište rovnici tečné roviny τ a normály n plochy $z = f(x, y)$ v bodě T.*
   - $z = x^2 + y^2$, $T = [1, 2, ?]$

     $$\left[\begin{array}{l} \tau :\ 2x + 4y - z - 5 = 0 \\ n :\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1} \end{array}\right]$$
   - $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $T = [1, 1, ?]$

     $$\left[\begin{array}{l} \tau :\ x - 2y + z = 0 \\ n :\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1} \end{array}\right]$$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 8

Totální diferenciál

Po prostudování kapitoly budete umět:

1. určovat totální diferenciál;
    - v libovolném bodě,
    - pro libovolné přírůstky,
    - v daném bodě,
    - pro dané přírůstky,
2. určovat pomocí diferenciálu přibližné hodnoty výrazů.

Klíčová slova:

Totální diferenciál, přírůstek funkce, přírůstek argumentu.

Připomínáme:

$$df\left(x,y\right)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{8.1}$$

$$f\left(x_0+dx,y_0+dy\right)\doteq f\left(x_0,y_0\right)+df\left(x_0,y_0\right) \tag{8.2}$$

Příklad 8.1 *Vypočítejme totální diferenciál funkce* $f\left(x,y\right)=x^3+y^3-3xy$

a) v libovolném bodě $[x,y]$ *pro libovolné přírůstky,*

b) v bodě $A=[-1;2]$ *pro libovolné přírůstky,*

c) v libovolném bodě $[x,y]$ *pro* $dx=0{,}1$ *a* $dy=0{,}2$*,*

d) v bodě $B=[1,-2]$ *pro* $dx=-0{,}2$ *a* $dy=0{,}1$.

Řešení

Vypočítáme první parciální derivace a dosadíme do vzorce (8.1).

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$$

a) $df\left(x,y\right)=\left(3x^2-3y\right)dx+\left(3y^2-3x\right)dy$

$df\left(x,y\right)=3\left(x^2-y\right)dx+3\left(y^2-x\right)dy$

b) $df\left(-1,2\right)=3\left[\left(-1\right)^2-2\right]dx+3\left[2^2-\left(-1\right)\right]dy$

$df\left(-1,2\right)=-3dx+15dy$

c) $df\left(x,y\right)=3\left(x^2-y\right)\cdot 0{,}1+3\left(y^2-x\right)\cdot 0{,}2$

$df\left(x,y\right)=0{,}3\left(x^2-y\right)+0{,}6\left(y^2-x\right)$

d) $df\left(1,-2\right)=3\left[1^2-\left(-2\right)\right]\cdot\left(-0{,}2\right)+3\left[\left(-2\right)^2-1\right]\cdot 0{,}1$

$df\left(1,-2\right)=-3\cdot 3\cdot 0{,}2+3\cdot 3\cdot 0{,}1$

$df\left(1,-2\right)=-1{,}8+0{,}9=-0{,}9$

■

Příklad 8.2 *Vypočítejme totální diferenciál funkce* $f(x,y) = e^{xy}$

a) v libovolném bodě $[x,y]$ *pro libovolné* dx *a* dy*,*

b) v bodě $A = [-1;1]$ *pro libovolné* dx *a* dy*,*

c) v libovolném bodě $[x,y]$ *pro* $dx = -0{,}3$ *a* $dy = 0{,}2$*,*

d) v bodě $B = [1,2]$ *pro* $dx = -0{,}01$ *a* $dy = 0{,}03$*.*

Řešení

Určíme první parciální derivace a dosadíme do vzorce (8.1).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$$

a) $df(x,y) = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$

$df(x,y) = e^{xy}(ydx + xdy)$

b) $df(-1,1) = e^{-1\cdot 1}(1dx - 1dy)$

$df(-1,1) = e^{-1}(dx - dy)$

c) $df(x,y) = e^{xy}[y \cdot (-0{,}3) + x \cdot 0{,}2]$

$df(x,y) = e^{xy}(-0{,}3y + 0{,}2x)$

d) $df(1,2) = e^{1\cdot 2}[2 \cdot (-0{,}01) + 1 \cdot 0{,}03]$

$df(1,2) = e^{2}(-0{,}02 + 0{,}03)$

$df(1,2) = 0{,}01e^{2}$

■

Příklad 8.3 *Vypočítejme* $df(1,-4)$ *pro funkci* $f(x,y) = \sqrt{\ln x - y}$ *a výsledek použijme k určení přibližné hodnoty funkce* f *v bodě* $X = [0{,}9;-4{,}2]$.

Řešení

Po výpočtu prvních parciálních derivací stanovíme diferenciál.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x - y}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x - y}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x - y}} \cdot (-1) = \frac{-1}{2\sqrt{\ln x - y}}$$

$$df(x,y) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x - y}}dx - \frac{1}{2\sqrt{\ln x - y}}dy$$

$$df(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x - y}}\left(\frac{dx}{x} - dy\right)$$

$$df(1,-4) = \frac{1}{2\sqrt{\ln 1 - (-4)}}\left(\frac{dx}{1} - dy\right)$$

$$df(1,-4) = \frac{1}{4}(dx - dy)$$

Diferenciál existuje pro hodnoty $x > 0$ a $\ln x > y$.
Přibližnou hodnotu funkce v bodě X vypočítáme podle vzorce (8.2).
Stanovíme $dx = 0{,}9 - 1 = -0{,}1$

$$dy = -4{,}2 - (-4) = -0{,}2$$
$$f(1,-4) = \sqrt{\ln 1 - (-4)} = \sqrt{4} = 2$$
$$df(1,-4) = \tfrac{1}{4}(-0{,}1 + 0{,}2) = \tfrac{1}{4} \cdot 0{,}1 = 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}025$$
$$f(0{,}9;-4{,}2) \doteq f(1,-4) + df(1,-4)$$
$$f(0{,}9;-4{,}2) = 2 + 0{,}025 = 2{,}025$$

Přibližná hodnota funkce f v bodě X je $2{,}025$, tj. $f(0{,}9;-4{,}2) \doteq 2{,}025$.

■

Příklad 8.4 *Vypočítejme diferenciál dz a přírůstek $\triangle z$ funkce $z = 4xy$ v bodě $[3,2]$ a porovnejme výsledky*

a) pro $dx = -0{,}2$, $dy = 0{,}2$,

b) pro $dx = -0{,}02$, $dy = 0{,}02$.

Řešení

Vypočteme hodnotu funkce v bodě $[3,2]$.
$z(3,2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
Totální diferenciál má tvar
$dz = 4ydx + 4xdy = 4(ydx + xdy)$

a) Pro $dx = -0{,}2$ a $dy = 0{,}2$ obdržíme bod $[3 - 0{,}2; 2 + 0{,}2] = [2{,}8; 2{,}2]$.
   Určíme $z(2{,}8; 2{,}2) = 4 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}2 = 24{,}64$.
   Přírůstek $\triangle z = (2{,}8; 2{,}2) - z(3,2) = 24{,}64 - 24 = 0{,}64$
   Diferenciál $dz(3,2) = 4 \cdot [2 \cdot (-0{,}2) + 3 \cdot 0{,}2] = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$

b) Pro $dx = -0{,}02$ a $dy = 0{,}02$ obdržíme bod $[3 - 0{,}02; 2 + 0{,}02] = [2{,}98; 2{,}02]$
   Určíme $z(2{,}98; 2{,}02) = 4 \cdot 2{,}98 \cdot 2{,}02 = 24{,}0784$
   Přírůstek $\triangle z = z(2{,}98; 2{,}02) - z(3,2) = 24{,}0784 - 24 = 0{,}0784$
   Diferenciál $dz(3,2) = 4[2 \cdot (-0{,}02) + 3 \cdot 0{,}02] = 4 \cdot 0{,}02 = 0{,}08$

Porovnáme:

$z(2{,}8; 2{,}2) \doteq z(3,2) + dz(3,2) = 24 + 0{,}8 = 24{,}8$
Přesná hodnota $z(2{,}8; 2{,}2) = 24{,}64;\ dz(3,2) = 0{,}8;\ \triangle z(3,2) = 0{,}64$
$z(2{,}98; 2{,}02) \doteq z(3,2) + dz(3,2) = 24 + 0{,}08 = 24{,}08$
Přesná hodnota $z = 24{,}0784, dz(3,2) = 0{,}08, \triangle z(3,2) = 0{,}0784$

Čím je $|dx|$ a $|dy|$ menší, tedy vzdálenost bodu $[x_0; y_0]$ od bodu $[x,y]$ menší, tím je výpočet funkční hodnoty v bodě $f(x_0 + dx, y_0 + dy)$ pomocí diferenciálu přesnější.

■

Příklad 8.5 *Určeme přibližnou hodnotu výrazu* $\sqrt{3{,}01^2 + 3{,}98^2}$.

Řešení

Sestrojíme vhodnou funkci $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, pro niž je $f(3{,}01; 3{,}98) = \sqrt{3{,}01^2 + 3{,}98^2}$.
Určíme bod $[x_0, y_0] = [3, 4]$, v jehož blízkém okolí se nachází bod

$$[3{,}01; 3{,}98] = [x_0 + dx; y_0 + dy]$$

Stanovíme $dx = 3{,}01 - 3 = 0{,}01$ a $dy = 3{,}98 - 4 = -0{,}02$.
Vypočteme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ x, y \neq 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ x, y \neq 0$$

Diferenciál $df(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xdx + ydy)$
Dle vzorce (8.2):

$$f(3{,}01;\ 3{,}98) \doteq f(3,4) + df(3,4)\,,\ \text{kde } dx = 0{,}01 \text{ a } dy = -0{,}02$$
$$f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$df(3,4) = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}[3 \cdot 0{,}01 + 4 \cdot (-0{,}02)] = \frac{1}{5}(0{,}03 - 0{,}08) = \frac{1}{5} \cdot (-0{,}05) = -0{,}01$$
$$f(3{,}01; 3{,}98) \doteq 5 + (-0{,}01) = 4{,}99$$

Výsledek: $\sqrt{3{,}01^2 + 3{,}98^2} \doteq 4{,}99$

■

Příklad 8.6 *Určeme přibližně hodnotu výrazu* $2{,}48^3 - \frac{3}{1{,}15^2}$.

Řešení

Sestrojíme vhodnou funkci $f(x,y) = x^3 - \frac{3}{y^2}$, pro niž je $f(2{,}48;\ 1{,}15) = 2{,}48^3 - \frac{3}{1{,}15^2}$.
Určíme vhodný bod $[x_0, y_0] = [2{,}5;\ 1]$, v jehož blízkém okolí se nachází bod $[x_0 + dx;\ y_0 + dy]$.
Stanovíme $dx = 2{,}48 - 2{,}5 = -0{,}02$

$dy = 1{,}15 - 1 = 0{,}15$

Vypočteme $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6}{y^3}$.
Diferenciál $df(x,y) = 3x^2dx + \frac{6}{y^3}dy$.
Dle vzorce (8.2):

$$f(2{,}48;\ 1{,}15) \doteq f(2{,}5;\ 1) + df(2{,}5;\ 1)\,,\ \text{kde } dx = -0{,}02 \text{ a } dy = 0{,}15$$
$$f(2{,}5;\ 1) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{3}{1^2} = 15{,}625 - 3 = 12{,}625$$
$$df(2{,}5;\ 1) = 3 \cdot 2{,}5^2 \cdot (-0{,}02) + \frac{6}{1^3} \cdot 0{,}15 = -0{,}3750 + 0{,}90 = 0{,}525$$
$$f(2{,}48;\ 1{,}15) \doteq 12{,}625 + 0{,}525 = 13{,}150$$

Výsledek: $2{,}48^3 - \frac{3}{1{,}15^2} \doteq 13{,}15$

■

Příklad 8.7 *Při deformaci kužele se jeho poloměr r zvětšil z 30 cm na $30{,}1$ cm a výška v se zmenšila z 60 cm na $59{,}5$ cm. Vypočítejme přibližně změnu objemu.*

Řešení

Objem V kužele vypočteme podle vzorce $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$; objem V je funkcí dvou proměnných r a v; tedy $V\left(r, v\right)$.
Diferenciál $dV\left(r, v\right) = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial v}dv$
$dV\left(r, v\right) = \frac{1}{3}\pi\left(2rvdr + r^2dv\right)$
Dle vzorce (8.2):

$$
\begin{aligned}
V\left(30{,}1;\ 59{,}5\right) \doteq& V\left(30, 60\right) + dV\left(30, 60\right), \text{ kde } dr = 0{,}1 \text{ a } dy = -0{,}5\\
V\left(30, 60\right) =& \frac{1}{3}\pi 30^2 \cdot 60 = 900 \cdot 20\pi = 18\,000\pi\\
dV\left(30, 60\right) =& \frac{1}{3}\pi\left(2 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 0{,}1 - 30^2 \cdot 0{,}5\right) = \frac{1}{3}\pi\left(3600 \cdot 0{,}1 - 900 \cdot 0{,}5\right) =\\
=& \frac{1}{3}\pi\left(360 - 450\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(-90\right) = -30\pi
\end{aligned}
$$

Objem kužele se zmenší přibližně o 30π cm^3, tj. z $18\,000\pi$ cm^3 na $17\,970\pi$ cm^3.

■

Totální diferenciál udává přírůstek funkce k tečné rovině, proto jím můžeme přibližně nahradit přírůstek funkce. Toho lze využít při určování přibližných hodnot výrazů.

1. *Vypočítejte totální diferenciál funkce* $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$
   - *v libovolném bodě* $[x,y]$ *pro libovolné* dx *a* dy,
   - *v bodě* $[1,-1]$ *pro libovolné* dx *a* dy,
   - *v libovolném bodě* $[x,y]$ *pro* $dx = 0{,}02$ *a* $dy = -0{,}03$,
   - *v bodě* $[-2,1]$ *pro* $dx = -0{,}01$ *a* $dy = 0{,}02$.

   [
   - $df(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}(ydx + xdy)$
   - $df(1,-1) = \frac{1}{2}(dy - dx)$
   - $df(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}(0{,}02y - 0{,}03x)$
   - $-0{,}01$
   ]
2. *Určete přibližně hodnotu výrazu* $1{,}05^{2{,}01}$. $[1{,}10]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 9

Lokální extrémy funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- určovat stacionární body;
- rozhodovat o existenci a typu lokálního extrému.

Klíčová slova:

Lokální extrém, ostré lokální maximum, ostré lokální minimum, stacionární bod, nutná podmínka pro lokální extrém, postačující podmínka pro lokální extrém.

Připomínáme:
Pro stacionární bod $[x_0, y_0]$ platí $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$

Označíme $D_1 = |f''_{xx}(x_0, y_0)| = f''_{xx}(x_0, y_0)$ determinant 1.-ho řádu

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$ determinant 2.-ho řádu

Je-li $D_2 > 0$ a současně
- $D_1 < 0,$ má funkce v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokálním maximum.
- $D_1 > 0,$ má funkce v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokálním minimum.

Je-li $D_2 < 0$, nemá funkce v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, ale sedlo.
Je-li $D_2 = 0$, nelze o existenci extrému rozhodnout podle výše uvedeného kriteria; rozhodneme podle definice lokálního extrému.

Příklad 9.1 *Určeme lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ a napišme obecné rovnice tečných rovin ke grafu funkce f v těchto bodech.*

Řešení

Určíme definiční obor $D(f) = R^2$.
Vypočteme derivace prvního a druhého řádu, stanovíme jejich definiční obory.

$$f'_x = 2x + y - 6;\ D(f'_x) = R^2$$
$$f'_y = x + 2y - 9;\ D(f'_x) = R^2$$
$$f'_{xx} = 2, f'_{yy} = 2, f'_{xy} = 1;\ D(f''_{xx}) = D\left(f''_{yy}\right) = D\left(f''_{xy}\right) = R^2$$

Smíšené derivace jsou spojité, proto $f''_{xy} = f''_{yx}$.
Vyhledáme body podezřelé z lokálního extrému.

(A) Z nutné podmínky pro lokální extrém, tj. řešíme soustavu rovnic $\begin{matrix} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{matrix}$ a obdržíme stacionární body.

$$\begin{aligned} f'_x = 0 &\Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0 \\ f'_y = 0 &\Leftrightarrow \underline{x + 2y - 9 = 0} \Rightarrow x = 9 - 2y;\ x = 9 - 2 \cdot 4 = 1 \\ &2(9 - 2y) + y - 6 = 0 \\ &18 - 4y + y - 6 = 0 \\ &-3y + 15 = 0 \Rightarrow y = 4 \end{aligned}$$

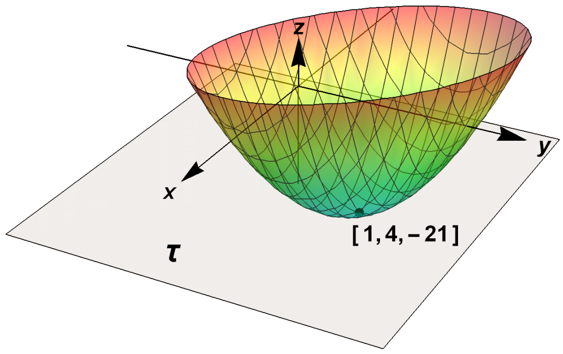
Obdrželi jsme 1 stacionární bod $A = [1, 4]$

(B) Body, v nichž neexistují parciální derivace prvního řádu; určíme je z definičních oborů těchto derivací.
V našem případě první parciální derivace existují všude na R^2, proto odtud žádný další bod podezřelý z lokálního extrému neobdržíme; budeme psát symbol prázdné množiny, tj. $\emptyset$.
Získali jsme jediný bod podezřelý z lokálního extrému, a to bod $A = [1, 4]$.

Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu lokálního extrému v tomto bodě.

$$D_1 = f''_{xx}(1,4) = 2$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(1,4) & f''_{xy}(1,4) \\ f''_{yx}(1,4) & f''_{yy}(1,4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3$$

$D_2 > 0$ a $D_1 > 0 \Rightarrow$ funkce má v bodě A ostré lokální minimum, jehož hodnota je $f(1,4) = 1^2 + 1 \cdot 4 + 4^2 - 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 = 1 + 4 + 16 - 6 - 36 = -21$.



Obr. 9.1 Graf funkce $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
Zdroj: Vlastní zpracování

Tečná rovina τ v bodě A je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou (x,y) a má tedy obecnou rovnici $z + 21 = 0$.
Funkce má ostré lokální minimum -21 v bodě $A = [1,4]$.

■

Příklad 9.2 *Určeme lokální extrémy funkce* $f(x,y) = 2xy - 4x - 2y$.

Řešení

Určíme $D(f) = R^2$.
Vypočteme první a druhé parciální derivace a stanovíme jejich definiční obory.

$$f'_x = 2y - 4 \quad f''_{xx} = 0 \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2$$
$$f'_y = 2x - 2 \quad f''_{yy} = 0$$

Definičním oborem všech parciálních derivací je množina R^2.
Vyhledáme body podezřelé z lokálního extrému.

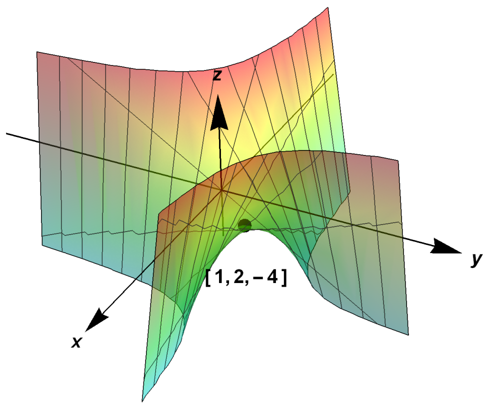
(A) z nutné podmínky

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$$
$$f'_y = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Získali jsme 1 stacionární bod $A = [1,2]$.

(B) z definičních oborů 1. derivací: $\emptyset$
Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu extrému.

$$D_1 = f''_{xx}(1,2) = 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(1,2) & f''_{xy}(1,2) \\ f''_{yx}(1,2) & f''_{yy}(1,2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 < 0$$



Obr. 9.2 Graf funkce $f(x,y) = 2xy - 4x - 2y$
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce nemá v bodě A lokální extrém, protože $D_2 < 0$. V bodě $A = [1,2]$ má funkce sedlo, jehož souřadnice jsou $[1,2,-4]$.

■

Příklad 9.3 *Určeme lokální extrémy funkce* $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Řešení

Určíme $D(f) = \{[x,y] \in R^2;\ x \geq 0\}$.
Vypočteme 1. a 2. parciální derivace.

$$f'_x = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 \quad f''_{xx} = \frac{-y}{4\sqrt{x^3}} \quad f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'_y = \sqrt{x} - 2y + 6 \quad f''_{yy} = -2$$

Definiční obory: $\{[x,y] \in R^2; x > 0\}$.
Vyhledáme body podezřelé z lokálního extrému.

(A) z nutné podmínky

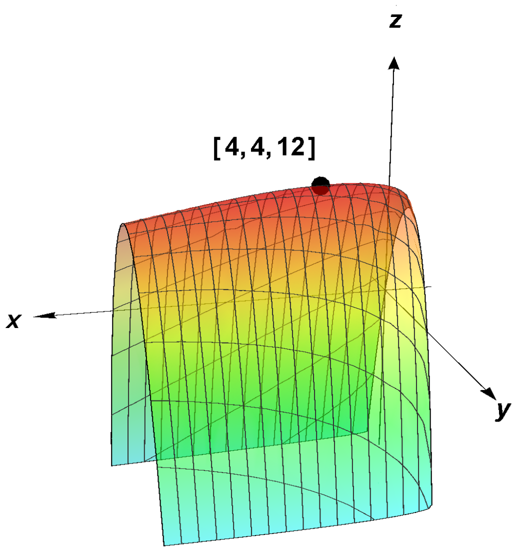
$$f'_x = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0;\ \frac{y}{2(2y-6)} - 1 = 0 \Rightarrow y - 4y + 12 = 0 \Rightarrow y = 4$$
$$f'_y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2y + 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2y - 6;\ \sqrt{x} = 2 \cdot 4 - 6 = 2 \Rightarrow x = 4$$

Funkce má 1 stacionární bod $A = [4,4]$.

(B) z definičních oborů 1. derivací: $\emptyset$
Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu extrému.

$$D_1 = f''_{xx}(4,4) = \frac{-4}{4\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{8} < 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(4,4) & f''_{xy}(4,4) \\ f''_{yx}(4,4) & f''_{yy}(4,4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{vmatrix} = \frac{2}{8} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0$$

$D_1 < 0$ a $D_2 > 0 \Rightarrow$ ostré lokální maximum
$f(4,4) = 4\sqrt{4} - 4^2 - 4 + 6 \cdot 4 = 8 - 16 - 4 + 24 = 12$



Obr. 9.3 Graf funkce $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce má ostré lokální maximum 12 v bodě $A = [4,4]$.

■

Příklad 9.4 *Určeme lokální extrém funkce* $f(x,y) = 4\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení

Určíme $D(f) = R^2$.
Vypočteme 1. parciální derivace funkce.

$$f'_x = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ D(f'_x) = D\left(f'_y\right) = R^2 \setminus \{[0,0]\}$$
$$f'_y = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

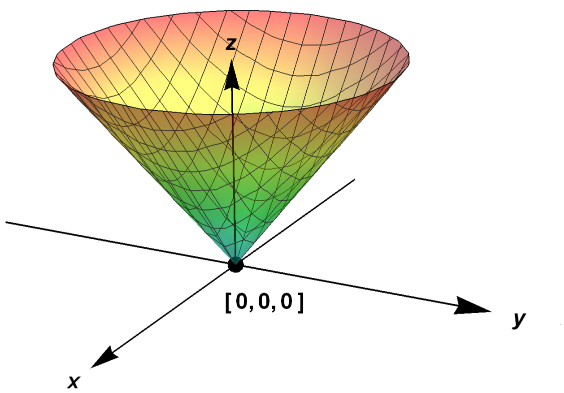
Najdeme body podezřelé z lokálního extrému.

(A) z nutné podmínky

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$
$$f'_y = 0 \Leftrightarrow \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Soustava nemá řešení, funkce nemá stacionární bod.

(B) První parciální derivace neexistují v bodě $A = [0, 0]$, proto funkce může mít lokální extrém pouze v bodě A.
Rozhodnout o existenci extrému podle postačující podmínky, v níž se rozhoduje podle determinantů D_1 a D_2 tady nelze, poněvadž 2. parciální derivace v bodě A neexistují, protože už 1. parciální derivace v bodě A neexistují.
O existenci extrému v bodě A rozhodneme na základě definice extrému. Musíme vyšetřit chování funkce na redukovaném okolí bodu A.
Určíme znaménko rozdílu $f(x, y) - f(0, 0)$ pro všechny body $[x, y]$ z redukovaného okolí bodu $A = [0, 0]$.
$f(x, y) - f(0, 0) = 4\sqrt{x^2+y^2} - 4\sqrt{0^2+0^2} = 4\sqrt{x^2+y^2} - 0 = 4\sqrt{x^2+y^2} > 0$
Znaménko rozdílu se nemění, je vždy kladné, tj. $f(x, y) - f(0, 0) > 0 \Rightarrow f(x, y) > f(0, 0)$. To znamená, že v bodě $A = [0, 0]$ má funkce ostré lokální minimum $f(A) = 0$.



Obr. 9.4 Graf funkce $f(x, y) = 4\sqrt{x^2+y^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Poznámka.
Graf funkce má v bodě $[0, 0, 0]$ ostrý hrot. V bodě lokálního extrému nelze sestrojit tečnou rovinu. Grafem funkce je rotační kuželová plocha s vrcholem v počátku soustavy.
V bodě A nabývá funkce současně svého lokálního i globálního minima, jehož hodnota je $f(A) = 0$.

■

Příklad 9.5 *Stanovme body, v nichž nastávají lokální extrémy nebo sedla funkce* $f(x, y) = -x^3 - 3y^2 + 6xy$. *Pokud extrém existuje, určíme jeho hodnotu.*

Řešení

$D(f) = R^2$
Určíme 1. a 2. parciální derivace.

$$f'_x = -3x^2 + 6y \quad f''_{xx} = -6x \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 6$$
$$f'_y = -6y + 6x \quad f''_{yy} = -6$$

Všechny derivace jsou definovány na R^2.
Určíme body podezřelé z lokálních extrémů.

(A) z nutné podmínky

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2y = 0;\ x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$$
$$f'_y = 0 \Leftrightarrow -6y + 6x = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x;\ y_1 = 0,\ y_2 = 2$$

Funkce má 2 stacionární body: $A = [0,0]\,, B = [2,2]$.

(B) z definičních oborů prvních derivací: $\emptyset$.
O existenci extrému či sedla rozhodneme podle postačující podmínky.

$$A = [0,0] : f''_{xx}(A) = -6 \cdot 0 = 0, f''_{yy}(A) = -6, f''_{xy}(A) = 6$$

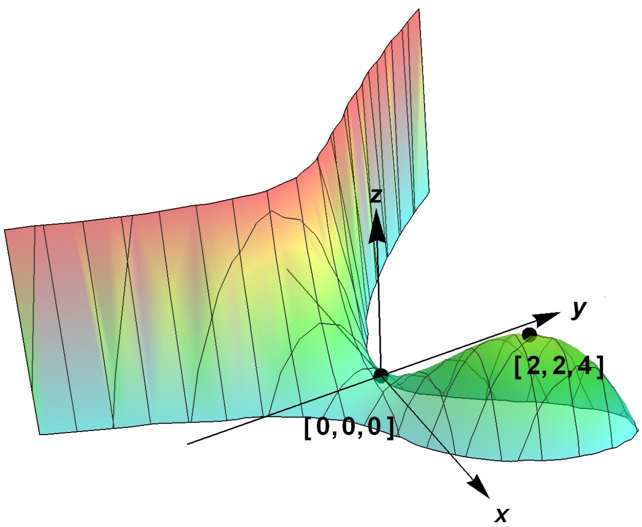
$D_1 = 0, D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 36 = -36 < 0 \Rightarrow$ extrém nenastane

$A = [0,0]$ je sedlový bod

$$B = [2,2] : f''_{xx}(B) = -6 \cdot 2 = -12, f''_{yy}(B) = -6, f''_{xy}(B) = 6$$

$$D_1 = -12 < 0, D_2 = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 72 - 36 = 36 > 0$$

$D_2 = 36 > 0, D_1 = -12 < 0 \Rightarrow$ ostré lokální maximum
$f(A) = 0; f(B) = -2^3 - 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \cdot 2 = -8 - 12 + 24 = 4$



Obr. 9.5 Graf funkce $f(x,y) = -x^3 - 3y^2 + 6xy$
Zdroj: Vlastní zpracování

V bodě $A = [0,0]$ má funkce sedlo $[0,0,0]$.
V bodě $B = [2,2]$ má funkce ostré lokální maximum 4.

■

Příklad 9.6 *Určeme lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 36xy$.

Řešení

Určíme $D(f) = R^2$.
Vypočteme 1. a 2. parciální derivace.

$$f'_x = 4x^3 - 36y \quad f''_{xx} = 12x^2 \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -36$$
$$f'_y = 4y^3 - 36x \quad f''_{yy} = 12y^2$$

Definiční obor všech derivací je R^2.
Body podezřelé z lokálního extrému:

(A) z nutné podmínky

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36y = 0 \Rightarrow x^3 - 9y = 0$$
$$f'_y = 0 \Leftrightarrow 4y^3 - 36x = 0 \Rightarrow y^3 - 9x = 0$$

Vyřešíme soustavu rovnic.

$$x^3 - 9y = 0 \Rightarrow y = \frac{x^3}{9}$$
$$y^3 - 9x = 0 \qquad \left(\frac{x^3}{9}\right)^3 - 9x = 0$$
$$x^9 - 9^4 x = 0$$
$$x\left(x^8 - 3^8\right) = 0$$

$x_1 = 0; \quad y_1 = 0$
$x_{2,3} = \pm 3; \quad y_{2,3} = \pm 3$

Funkce má 3 stacionární body: $A = [0,0]$, $B = [3,3]$, $C = [-3,-3]$.

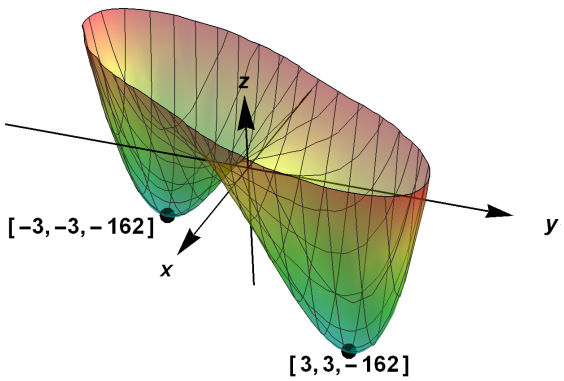
(B) z definičních oborů 1. parciálních derivací: $\emptyset$.

Pro vyhodnocení postačujících podmínek sestavíme pro podezřelé body přehlednou tabulku.

Tabulka 9.1 Vyhodnocení extrémů funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - 36xy$

bod	$D_1 = f''_{xx}$	f''_{yy}	f''_{xy}	$D_2 = f''_{xx} f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2$
$A = [0,0]$	$12 \cdot 0 = 0$	$12 \cdot 0 = 0$	-36	$-1296 < 0$
$B = [3,3]$	$12 \cdot 3^2 = 108 > 0$	$12 \cdot 3^2 = 108$	-36	$10368 > 0$
$C = [-3,-3]$	$12 \cdot (-3)^2 = 108 > 0$	$12 \cdot (-3)^2 = 108$	-36	$10368 > 0$

V bodě A extrém nenastane, protože determinant $D_2 < 0$; bod A je sedlový bod.
V bodech B a C má funkce ostré lokální minimum, protože determinant $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$.
$f(3,3) = 3^4 + 3^4 - 36 \cdot 3 \cdot 3 = 81 + 81 - 324 = -162$
$f(-3,-3) = -162$



Obr. 9.6 Graf funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - 36xy$
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce má ostré lokální minimum -162 v bodech $B = [3,3]$ a $C = [-3,-3]$.

■

Příklad 9.7 *Najděme lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 6xy$.

Řešení

Určíme $D(f) = R^2$.
Vypočteme parciální derivace 1.-ho a 2.-ho řádu.

$$f'_x = 3x^2 + y^2 + 6y \quad f''_{xx} = 6x \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2y + 6$$
$$f'_y = 2xy + 6x \qquad f''_{yy} = 2x$$

Všechny parciální derivace mají definiční obor R^2.
Vyhledáme body podezřelé z lokálního extrému:

(A) z nutné podmínky

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + y^2 + 6y = 0$$
$$f'_y = 0 \Leftrightarrow 2xy + 6x = 0 \Rightarrow 2x(y+3) = 0$$

Z 2. rovnice vypočteme: $x = 0$ nebo $y = -3$ a dosadíme do 1. rovnice.

$$\begin{array}{ll} x = 0 & y = -3 \\ 3 \cdot 0^2 + y^2 + 6y = 0 & 3x^2 + (-3)^2 + 6 \cdot (-3) = 0 \\ y(y+6) = 0 & 3x^2 - 9 = 0 \\ y_1 = 0,\ y_2 = -6 & x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \end{array}$$

Funkce má 4 stacionární body: $A = [0,0]$, $B = [0,-6]$, $C = [\sqrt{3},-3]$, $D = [-\sqrt{3},-3]$.

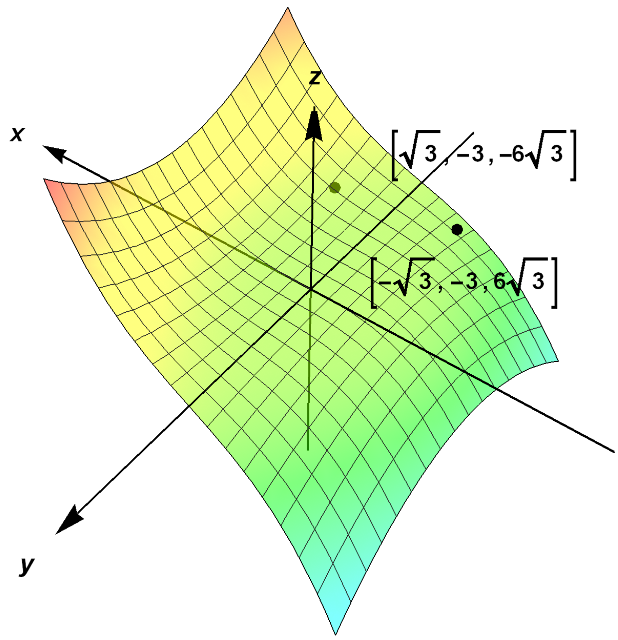
(B) z definičních oborů 1. parciálních derivací: $\emptyset$.

Pro vyhodnocení postačujících podmínek sestavíme pro podezřelé body přehlednou tabulku.

Tabulka 9.2 Vyhodnocení extrémů funkce $f(x,y)=x^4+y^4-36xy$

bod	$D_1=f''_{xx}$	f''_{yy}	f''_{xy}	$D_2=f''_{xx}f''_{yy}-\left[f''_{xy}\right]^2$
$A=[0,0]$	$6\cdot 0 = 0$	$2\cdot 0=0$	$2\cdot 0+6 = 6$	$-36 < 0$
$B=[0,-6]$	$6\cdot 0 = 0$	$2\cdot 0=0$	$2\cdot(-6)+6 = -6$	$-36 < 0$
$C=\left[\sqrt{3},-3\right]$	$6\sqrt{3} > 0$	$2\sqrt{3}$	$2\cdot(-3)+6 = 0$	$36 > 0$
$D=\left[-\sqrt{3},-3\right]$	$-6\sqrt{3} < 0$	$-2\sqrt{3}$	$2\cdot(-3)+6 = 0$	$36 > 0$

V bodech A a B extrém nenastane, protože determinant $D_2<0$.
V bodě C má funkce ostré lokální minimum, protože determinant $D_1>0$ a $D_2>0$.
V bodě D má funkce ostré lokální maximum, protože determinant $D_1<0$ a $D_2>0$.
$f\left(\sqrt{3},-3\right)=\left(\sqrt{3}\right)^3+\sqrt{3}\cdot(-3)^2+6\sqrt{3}\,(-3)=3\sqrt{3}+9\sqrt{3}-18\sqrt{3}=-6\sqrt{3}$
$f\left(-\sqrt{3},-3\right)=\left(-\sqrt{3}\right)^3-\sqrt{3}\cdot(-3)^2+6\left(-\sqrt{3}\right)\cdot(-3)=-3\sqrt{3}-9\sqrt{3}+18\sqrt{3}=6\sqrt{3}$



Obr. 9.7 Graf funkce $f(x,y)=x^3+xy^2+6xy$
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce má ostré lokální maximum $6\sqrt{3}$ v bodě $D=\left[-\sqrt{3},-3\right]$ a ostré lokální minimum $-6\sqrt{3}$ v bodě $C=\left[\sqrt{3},-3\right]$.

■

Příklad 9.8 *Najděme lokální extrémy funkce* $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$.

Řešení

Určíme $D(f) = R^2$.
Vypočteme 1. a 2. parciální derivace.

$$f'_x = -2xe^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}2x = 2xe^{-x^2-y^2}\left(-x^2-2y^2+1\right)$$
$$f'_y = -2ye^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right) + e^{-x^2-y^2}4y = 2ye^{-x^2-y^2}\left(-x^2-2y^2+2\right)$$
$$f''_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(4x^4+8x^2y^2-10x^2-4y^2+2\right)$$
$$f''_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(4x^2y^2+8y^4-20y^2-2x^2+4\right)$$
$$f''_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(4x^3y+8xy^3-12xy\right)$$

Všechny parciální derivace existují na R^2.

Vyhledáme body podezřelé z lokálního extrému.

1. z nutné podmínky

   $$f'_x = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x^2-y^2}\left(-x^2-2y^2+1\right) = 0\ /:2e^{-x^2-y^2} \qquad e^{-x^2-y^2} \neq 0 \text{ vždy}$$
   $$f'_y = 0 \Leftrightarrow 2ye^{-x^2-y^2}\left(-x^2-2y^2+2\right) = 0\ /:2e^{-x^2-y^2}$$

   Upravíme soustavu rovnic:

   $$x\left(-x^2-2y^2+1\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2+2y^2 = 1$$
   $$y\left(-x^2-2y^2+2\right) = 0$$

   Dosadíme do 2. rovnice:

   $$\begin{array}{rr} x=0:\ y\left(-2y^2+2\right)=0 & x^2+2y^2=1:\ y\left(-1+2\right)=0 \\ y_1=0,\ y^2=1 & y=0 \\ y_{2,3}=\pm1 & x^2+2\cdot 0=1 \\ & x^2=1 \\ & x_{1,2}=\pm1 \end{array}$$

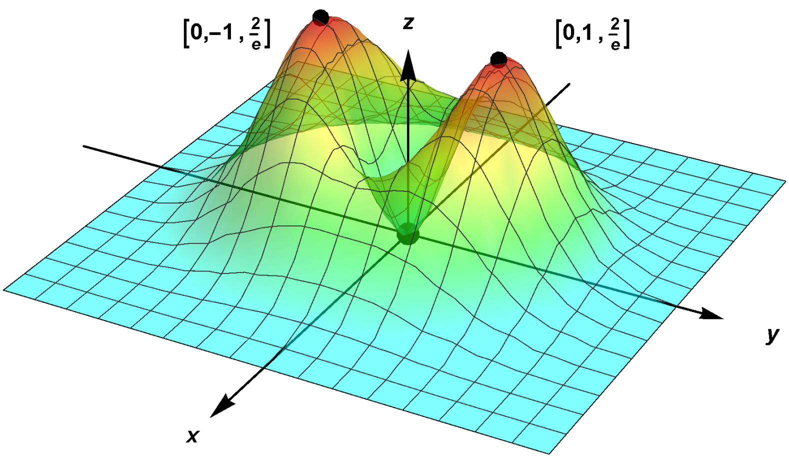
   Obdrželi jsme 5 stacionárních bodů: $A = [0,0]$, $B = [0,1]$, $C = [0,-1]$, $D = [1,0]$, $E = [-1,0]$.

(B) z definičních oborů 1. parciálních derivací: $\emptyset$.
Pro vyhodnocení postačujících podmínek sestavíme pro podezřelé body přehlednou tabulku.

Tabulka 9.3 Vyhodnocení extrémů funkce $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right)$

bod	$D_1 = f''_{xx}$	f''_{yy}	f''_{xy}	$D_2 = f''_{xx}f''_{yy} - \left[f''_{xy}\right]^2$	extrém
$A = [0,0]$	$2 > 0$	4	0	$8 > 0$	ostré lokální minimum
$B = [0,1]$	$-2e^{-1} < 0$	$-8e^{-1}$	0	$16e^{-2} > 0$	ostré lokální maximum
$C = [0,-1]$	$-2e^{-1} < 0$	$-8e^{-1}$	0	$16e^{-2} > 0$	ostré lokální maximum
$D = [1,0]$	$-4e^{-1} < 0$	$2e^{-1}$	0	$-8e^{-2} < 0$	nenastane
$E = [-1,0]$	$-4e^{-1} < 0$	$2e^{-1}$	0	$-8e^{-2} < 0$	nenastane

$$f(A) = e^0(0+0) = 0$$
$$f(B) = e^{0-1}(0+2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$
$$f(C) = e^{0-1}(0+2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$



Obr. 9.8 Graf funkce $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(x^2+2y^2\right)$
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce má ostré lokální maximum $\frac{2}{e}$ v bodech $B = [0,1]$ a $C = [0,-1]$ a ostré lokální minimum 0 v bodě $A = [0,0]$.

■

Příklad 9.9 *Najděme lokální extrémy funkce* $f(x,y) = \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-y)^2}$.

Řešení

Určíme $D(f) = R^2$
Určíme 1. derivace.

$$f'_x = \sqrt[5]{(2-y)^2} \cdot \frac{2}{5}(2+x)^{-\frac{3}{5}} = \frac{2\sqrt[5]{(2-y)^2}}{5\sqrt[5]{(2+x)^3}};\ D(f'_x) : x \neq -2$$

$$f'_y = \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \frac{2}{5}(2-y)^{-\frac{3}{5}} \cdot (-1) = \frac{-2\sqrt[5]{(2+x)^2}}{5\sqrt[5]{(2-y)^3}};\ D\left(f'_y\right) : y \neq 2$$

Vyhledáme body podezřelé z lokálních extrémů.

(A) z nutné podmínky

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt[5]{(2-y)^2}}{5\sqrt[5]{(2+x)^3}} = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$f'_y = 0 \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt[5]{(2+x)^2}}{5\sqrt[5]{(2-y)^3}} = 0 \Rightarrow x = -2$$

Vzhledem k $D(f'_x)$ a $D\left(f'_y\right)$ konstantujeme, že neexistuje bod, v němž by obě 1. parciální derivace byly rovny nule. Funkce nemá žádný stacionární bod, proto také nemá lokální extrémy ze stacionárních bodů.

(B) z definičních oborů 1. parciálních derivací:
Pro všechny body přímky $x = -2$ je $f'_y = 0$, ale f'_x neexistuje.
Pro všechny body přímky $y = 2$ je $f'_x = 0$ ale f'_y neexistuje.
V bodě $[-2, 2]$ neexistují obě první parciální derivace. Všechny body přímek $x = -2$ a $y = 2$ jsou podezřelé z lokálního extrému.

Neexistují-li první parciální derivace funkce, pak neexistují ani druhé. O existenci a typu extrému nelze rozhodnout podle determinantů D_1 a D_2.
Rozhodneme tedy podle definice lokálního extrému a to tak, že vyšetříme chování funkce na okolí podezřelých bodů.
Stanovíme znaménko rozdílu funkčních hodnot v bodech přímek $x = -2$ a $y = 2$ a v bodech z jejich okolí.
Body přímky $x = -2$ mají souřadnice $[-2, y]$.
Znaménko rozdílu:

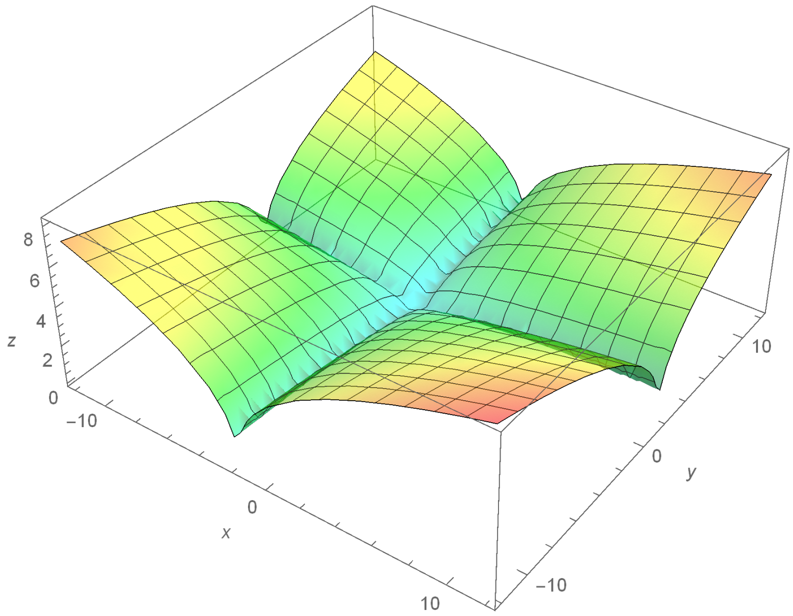
$$f(x,y) - f(-2,y) = \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-y)^2} - \sqrt[5]{(2-2)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-y)^2} =$$
$$= \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-y)^2} - 0 = \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-y)^2} \geq 0$$

Rovnost nastane pro body přímky $x = -2$.
Zjistili jsme, že $f(x,y) - f(-2,y) \geq 0 \Rightarrow f(x,y) \geq f(-2,y)$.

Podle definice má funkce neostré lokální minimum ve všech bodech přímky $x = -2$.
Totéž vyšetření provedeme pro přímku $y = 2$, tj. pro body $[x, 2]$.
Znaménko rozdílu:

$$f(x,y) - f(x,2) = \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-y)^2} - \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-2)^2} =$$
$$= \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-y)^2} - 0 = \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-y)^2} \geq 0$$

Rovnost nastane pro body přímky $y = 2$.
Zjistili jsme, že $f(x,y) - f(x,2) \geq 0 \Rightarrow f(x,y) \geq f(x,2)$.
Podle definice má funkce neostré lokální minimum ve všech bodech přímky $y = 2$.



Obr. 9.9 Graf funkce $f(x,y) = \sqrt[5]{(2+x)^2} \cdot \sqrt[5]{(2-y)^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce má neostré lokální minimum 0 ve všech bodech přímek $x = -2$ a $y = 2$. Toto minimum je současně i globálním minimem funkce.

■

Body podezřelé z lokálního extrému jsou stacionární body (určíme je z nutné podmínky pro extrém) a body, v nichž jedna nebo obě parciální derivace neexistují (určíme je z definičních oborů parciálních derivací). Podle postačující podmínky (podle determinantů D_1 a D_2) rozhodneme o existenci a typu lokálního extrému.

1. *Najděte lokální extrémy funkce*
   - $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy$

     [o. l. max. -3 v bodě $A = [-1,-1]$]
   - $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

     [o. l. min. $-\frac{4}{3}$ v bodě $A = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$]
   - $f(x,y) = x^4 + 8y^2 + 2xy$

     [o. l. min. $\frac{7}{256}$ v bodech $A = \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{32}\right]$ a $B = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{32}\right]$]
   - $f(x,y) = 27x^2y + 14y^3 - 54x - 69y$

     $\left[\begin{array}{l}\text{o. l. max. } 82 \text{ v bodě } A = [-1,-1]\,, \\ \text{o. l. min. } -82 \text{ v bodě } B = [1,1]\end{array}\right]$
2. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = 4(x+y) - x^4 - y^2$.
   Napište obecné rovnice tečné roviny ke grafu funkce f *v těchto bodech.*

   $\left[\begin{array}{l}\text{o. l. max. } 7 \text{ v bodě } A = [1,2] \\ \tau : z - 7 = 0\end{array}\right]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 10

Globální a vázané extrémy

Po prostudování kapitoly budete umět:

- určovat vázané extrémy;
- vyhledávat a určovat globální extrémy funkcí spojitých na kompaktní množině.

Klíčová slova:

Vázaný extrém, globální extrém, kompaktní množina.

Příklad 10.1 *Vyhledejme lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ vázané podmínkou $x + y - 1 = 0$.*

Řešení

Vazba je daná implicitně (je to rovnice přímky). Z vazby vyjádříme jednu proměnnou, např. $y = 1 - x$ a dosadíme do dané funkce. Převedeme tak naši úlohu na úlohu vyhledání lokálních extrémů funkce jedné proměnné, a tu již umíme.

$$f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

Obdrželi jsme funkci jedné proměnné x a označíme ji $u(x)$.
Tedy $u(x) = 2x^2 - 2x + 1$.
Vazba i daná funkce jsou definovány pro všechny x i y a jako polynomické funkce mají derivace všech řádů. Funkce může mít extrém jen ve stacionárním bodě.

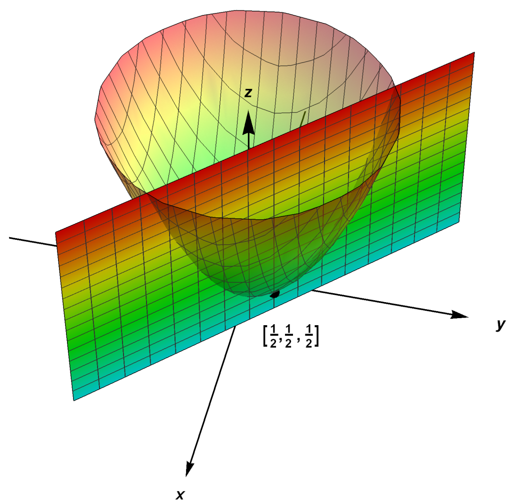
Vypočteme $u'(x) = 4x - 2$; určíme stacionární bod (z nutné podmínky).

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Funkce u má 1 stacionární bod $x = \frac{1}{2}$.
Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu extrému.

$u''(x) = 4;\ u''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow$ ostré lokální minimum

Funkce u má v bodě $x = \frac{1}{2}$ ostré lokální minimum.
Vypočteme $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ a získáme tak bod $A = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, v němž má funkce f vázané lokální minimum.
Určíme $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
Funkce f má vázané ostré lokální minimum $\frac{1}{2}$ v bodě $A = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
Pro názornou představu uvádíme geometrickou interpretaci naší úlohy.



Obr. 10.1 Graf funkce $x^2 + y^2$ a rovina $x + y - 1 = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

Bod A je bodem lokálního minima prostorové křivky, která vznikne jako řez (průnik) dané prostorové plochy $f(x, y) = x^2 + y^2$ rovinou, která je rovnoběžná s osou z a prochází body přímky

$x+y-1=0$. Přímka $x+y-1=0$ je stopou roviny v půdorysně - souřadnicové rovině (x,y).

■

Příklad 10.2 *Vyhledejme vázané lokální extrémy funkce $f(x,y)=\frac{x^4}{4}-\frac{y^2}{2}$, je-li vazba $5x-y=0$.*

Řešení

Vazba je určena v implicitním tvaru $5x-y=0$. Vyjádříme z ní $y=5x$ a dosadíme do funkce f; obdržíme funkci jedné proměnné x a označíme ji u.

$$u(x)=f(x,5x)=\frac{x^4}{4}-\frac{(5x)^2}{2}=\frac{x^4}{4}-\frac{25x^2}{2}$$

Vazba i daná funkce jsou polynomy, jsou definovány a mají derivace všech řádů pro každé x i y.

$$u'(x)=\frac{1}{4}\cdot 4x^3-\frac{25}{2}\cdot 2x=x^3-25x$$

Body podezřelé z lokálního extrému budou jen z nutné podmínky pro extrém; určíme stacionární body.

$$u'(x)=0\Leftrightarrow x^3-25x=0\Rightarrow x\left(x^2-25\right)=0$$

Funkce u má 3 stacionární body: $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=-5$.
Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu extrému.

$$u''(x)=3x^2-25$$
$$u''(0)=3\cdot 0^2-25=-25<0\Rightarrow \text{ostré lokální maximum}$$
$$\left.\begin{array}{l} u''(5)=3\cdot 5^2-25=50>0 \\ u''(-5)=3\cdot(-5)^2-25=50>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{ostré lokální minimum}$$

Vypočteme příslušné $y:\ y_1=5\cdot 0=0$, $y_2=5\cdot 5=25$, $y_3=5\cdot(-5)=-25$.
Získali jsme 3 body $A=[0,0]$, $B=[5,25]$ a $C=[-5,-25]$, v nichž má funkce f vázané lokální extrémy.

$$f(A)=\frac{0^4}{4}-\frac{25\cdot 0^2}{2}=0$$
$$f(B)=\frac{5^4}{4}-\frac{25^2}{2}=\frac{625}{4}-\frac{625}{2}=-\frac{625}{4}$$
$$f(C)=\frac{(-5)^4}{4}-\frac{(-25)^2}{2}=-\frac{625}{4}$$

Funkce f má 3 vázané ostré lokální extrémy: maximum 0 v bodě $A=[0,0]$ a minimum $-\frac{625}{4}$ v bodech $B=[5,25]$ a $C=[-5,-25]$.

■

Příklad 10.3 *Vyhledejme vázané lokální extrémy funkce $f(x,y) = e^{xy}$ při vazbě $x + y = 4$.*

Řešení

Z vazby vyjádříme $x = 4 - y$ a dosadíme do funkce f. Obdržíme funkci jedné proměnné y a označíme ji u.

$u(y) = e^{(4-y)y} = e^{4y-y^2}$

Vazba i funkce f jsou definovány a mají derivace všech řádů pro každé x i y.

$u'(y) = e^{4y-y^2}(4-2y)$

Funkce může mít extrém jen ve stacionárním bodě.

$u'(y) = 0 \Leftrightarrow e^{4y-y^2}(4-2y) = 0 \Rightarrow 4 - 2y = 0 \Rightarrow y = 2$

Funkce u má jeden stacionární bod $y = 2$.
Vypočteme u'' a vyšetříme existenci a typ extrému.

$u''(y) = e^{4y-y^2}(4-2y)^2 + e^{4y-y^2}(-2) = e^{4y-y^2}\left(14 - 16y + 4y^2\right)$
$u''(2) = e^{4\cdot 2-2^2}\left(14 - 16\cdot 2 + 4\cdot 2^2\right) = -2e^4 < 0 \Rightarrow$ ostré lokální maximum

Vypočteme $x:\ x = 4 - 2 = 2$
Získali jsme jediný bod $A = [2,2]$, v němž má funkce f vázaný extrém.

$f(A) = e^{2\cdot 2} = e^4$

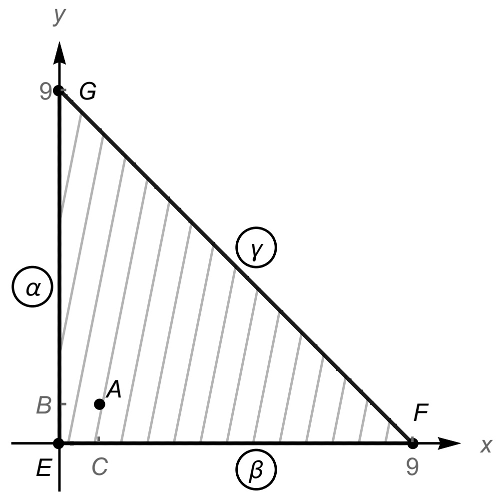
Funkce f má vázané ostré lokální maximum e^4 v bodě $A = [2,2]$.

■

Příklad 10.4 *Vyhledejme globální extrémy funkce $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ na množině $M: x \geq 0$, $y \geq 0$ a $y \leq 9 - x$.*

Řešení

Znázorníme množinu M; je to trojúhelník.



Obr. 10.2 Množina M a body podezřelé z globálního extrému
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce f je množině M spojitá, množina M je kompaktní, proto funkce f má na množině M globální extrémy.

(1) Najdeme a shromáždíme všechny body podezřelé z globálního extrému.

(a) Body podezřelé z lokálního extrému, náležející vnitřku M° množiny M.

$$M^\circ = \left\{[x,y] \in R^2; x > 0 \wedge y > 0 \wedge y < 9 - x\right\}.$$

Spočteme 1. parciální derivace a určíme stacionární body.

$$f'_x = 2 - 2x;\ f'_x = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$f'_y = 2 - 2y;\ f'_y = 0 \Leftrightarrow 2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 1$$

Obdrželi jsme stacionární bod $A = [1,1] \in M^\circ$.

(b) Body podezřelé z vázaného lokálního extrému ležící na hranici $h\left(M\right)$ množiny M. Hranice $h\left(M\right)$ je tvořena body tří úseček, které označíme α, β a γ.

- Vnitřní body úsečky α: $x = 0 \wedge y \in (0,9)$; dosadíme $x = 0$ do funkce f.

  $u\left(y\right) = f\left(0,y\right) = 2 + 2y - y^2$
  Určíme stacionární body funkce u.
  $u'\left(y\right) = 2 - 2y$
  $u'\left(y\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 1 \in (0,9)$

  Obdrželi jsme bod $B = [0,1] \in \alpha$.

- Vnitřní body úsečky β: $y = 0 \wedge x \in (0,9)$; dosadíme $y = 0$ do funkce f.

  $v\left(x\right) = f\left(x,0\right) = 2 + 2x - x^2$
  Určíme stacionární body funkce v.
  $v'\left(x\right) = 2 - 2x$
  $v'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \in (0,9)$

  Získali jsme bod $C = [1,0] \in \beta$.

- Vnitřní body úsečky γ: $y = 9 - x \wedge x \in (0,9)$; dosadíme $y = 9 - x$ do funkce f.

  $w\left(x\right) = f\left(x, 9-x\right) = 2 + 2x + 2\left(9-x\right) - x^2 - \left(9-x\right)^2 =$
  $= -2x^2 + 18x - 61$
  Určíme stacionární body funkce w.
  $w'\left(x\right) = -4x + 18$
  $w'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -4x + 18 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{18}{4} = \dfrac{9}{2} \in (0,9)$
  Spočteme $y = 9 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{9}{2}$.

  Získali jsme bod $D = \left[\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right] \in \gamma$.

(c) Dosud neuvažované body z hranice $h\left(M\right)$, v tomto případě vrcholy trojúhelníku.

$$E = [0,0]\,,\ F = [9,0]\,,\ G = [0,9]\,.$$

(2) Celkem jsme nalezli 7 bodů podezřelých z globálního extrému. Ve všech podezřelých bodech určíme funkční hodnoty.

$$f(A) = f(1,1) = 2+2+2-1-1 = 4 \qquad f(E) = f(0,0) = 2$$
$$f(B) = f(0,1) = 2+2-1 = 3 \qquad f(F) = f(9,0) = -61$$
$$f(C) = f(1,0) = 3 \qquad f(G) = f(0,9) = -61$$
$$f(D) = f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = 2+9+9-\frac{81}{4}-\frac{81}{4} = -\frac{41}{2}$$

Funkce f má globální maximum 4 ve vnitřním bodě $A = [1,1]$ a globální minimum -61 v hraničních bodech $F = [9,0]$ a $G = [0,9]$ množiny M.
Globálního maxima nabývá funkce uvnitř množiny M a globálního minima na hranici množiny M.

Poznámky.

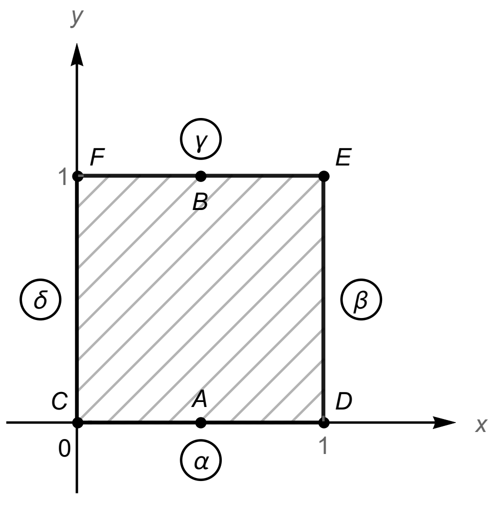
- Při vyhledávání globálních extrémů není potřebné vyšetřovat, zda v podezřelých bodech nastanou lokální extrémy. Rozhodující jsou totiž hodnoty funkce v těchto bodech.
- Vždy se musíme přesvědčit, zda bod podezřelý z globálního extrému náleží dané množině M. Pokud tomu tak není, pak jej z dalších úvah vyloučíme.
- Lokální extrémy hledáme vždy na otevřené množině, proto uvažujeme vnitřní body množiny M a vnitřní body úseček α, β a γ.

■

Příklad 10.5 *Vyhledejme globální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ *na množině* $M = \{[x,y] \in R^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

Řešení

Množina M je čtverec.



Obr. 10.3 Množina M a body podezřelé z globálního extrému
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce f má globální extrémy na kompaktní množině M, protože je na této množině spojitá.

(1) Najdeme body podezřelé z globálního extrému.

(a) Body podezřelé z lokálního extrému z vnitřku M° množiny M.

$M^\circ = \left\{[x,y] \in R^2; 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\right\}$.

Spočteme 1. parciální derivace funkce f a určíme její stacionární body.

$f'_x = 2x - 1;\ f'_x = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$f'_y = 6y + 18;\ f'_y = 0 \Leftrightarrow 6y + 18 = 0 \Rightarrow y = -3 \notin (0,1)$

Obdrželi jsme stacionární bod $\left[\frac{1}{2}, -3\right] \notin M^\circ$.
Bod $\left[\frac{1}{2}, -3\right]$ není bodem množiny M, proto jej z dalších úvah vyloučíme. Uvnitř množiny M stacionární body nejsou.

(b) Body podezřelé z vázaného lokálního extrému, ležící na hranici $h(M)$ množiny M. Hranice se skládá ze čtyř úseček, které označíme α, β, γ, δ.

- Vnitřní body úsečky α : $y = 0 \wedge x \in (0,1)$; dosadíme $y = 0$ do funkce f.

  $u(x) = f(x,0) = x^2 - x - 4$

  Určíme stacionární body funkce u.

  $u'(x) = 2x - 1$

  $u'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \in (0,1)$

  Obdrželi jsme bod $A = \left[\frac{1}{2}, 0\right] \in \alpha$.

- Vnitřní body úsečky β : $x = 1 \wedge y \in (0,1)$; dosadíme $x = 1$ do funkce f.

  $v(y) = f(1,y) = 1 + 3y^2 - 1 + 18y - 4 = 3y^2 + 18y - 4$

  Určíme stacionární bod funkce v.

  $v'(y) = 6y + 18$

  $v'(y) = 0 \Leftrightarrow 6y + 18 = 0 \Rightarrow y = -3 \notin (0,1)$

  Bod $[1, -3] \notin M$, proto jej z dalších úvah vyloučíme.

- Vnitřní body úsečky γ : $y = 1 \wedge x \in (0,1)$; dosadíme $y = 1$ do funkce f.

  $r(x) = f(x,1) = x^2 + 3 - x + 18 - 4 = x^2 - x + 17$

  Určíme stacionární bod funkce r.

  $r'(x) = 2x - 1$

  $r'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \in (0,1)$

  Obdrželi jsme bod $B = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \in \gamma$.

- Vnitřní body úsečky δ : $x = 0 \wedge y \in (0,1)$; dosadíme $x = 0$ do funkce f.

  $s(y) = f(0,y) = 3y^2 + 18y - 4$

  Určíme stacionární bod funkce s.

  $s'(y) = 6y + 18$

  $s'(y) = 0 \Leftrightarrow 6y + 18 = 0 \Rightarrow y = -3 \notin (0,1)$

  Bod $[0, -3] \notin M$, proto jej z dalších úvah vyloučíme.

(c) Dosud neuvažované body hranice $h(M)$ - vrcholy čtverce.

$$C = [0,0]\,,\ D = [1,0]\,,\ E = [1,1]\,,\ F = [0,1]\,.$$

(2) Celkem jsme nalezli 6 bodů, v nichž by mohl nastat globální extrém. Vypočteme funkční hodnoty ve všech bodech $A - F$.

$$f(A) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 4 = -\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4}$$
$$f(B) = f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{4} + 3 - \frac{1}{2} + 18 - 4 = \frac{67}{4} = 16\frac{3}{4}$$
$$f(C) = f(0,0) = -4$$
$$f(D) = f(1,0) = 1 - 1 - 4 = -4$$
$$f(E) = f(1,1) = 1 + 3 - 1 + 18 - 4 = 17$$
$$f(F) = f(0,1) = 3 + 18 - 4 = 17$$

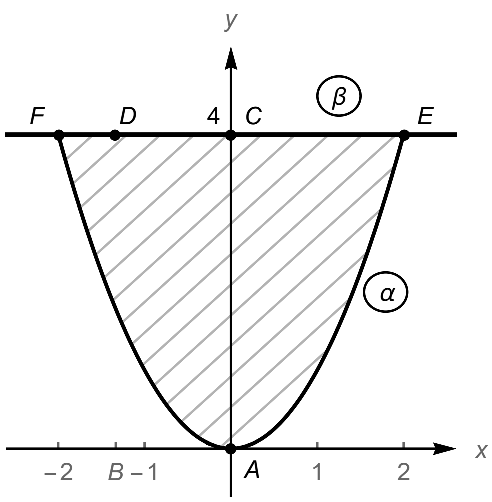
Funkce f má globální extrémy v hraničních bodech množiny M, a to maximum 17 v bodech $E = [1,1]$ a $F = [0,1]$ a minimum $-4\frac{1}{4}$ v bodě $A = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$.

■

Příklad 10.6 *Vyhledejme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + y^2 - 2$ na množině M ohraničené přímkou $y = 4$ a parabolou $y = x^2$.*

Řešení

Znázorníme množinu M.



Obr. 10.4 Množina M a body podezřelé z globálního extrému
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce f je na množině M spojitá, množina M je kompaktní, proto funkce f má na množině M globální extrémy.

(1) Najdeme všechny body podezřelé z globálního extrému.

(a) Body podezřelé z lokálního extrému náležející vnitřku M° množiny M.

$$M^\circ = \left\{[x,y] \in R^2; -2 < x < 2 \wedge x^2 < y < 4\right\}.$$

Vypočteme 1. parciální derivace a určíme stacionární body.

$$f'_x = 3x^2 + 4x;\ f'_x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x\,(3x+4) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \in (-2,2)\,,\ x_2 = -\frac{4}{3} \in (-2,2)$$
$$f'_y = 2y;\ f'_y = 0 \Leftrightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Obdrželi jsme 2 stacionární body:
$A = [0,0] \in h\,(M)$, objeví se znovu při výpočtu vázaného lokálního extrému.
$B = \left[-\frac{4}{3}, 0\right] \notin M^\circ$ a nenáleží ani množině M, proto jej z dalších úvah vyloučíme.

(b) Body podezřelé z vázaného lokálního extrému, ležící na hranici $h\,(M)$ množiny M.
Hranici $h\,(M)$ tvoří část oblouku paraboly α a úsečka β.

- Body části oblouku paraboly α : $y = x^2 \wedge x \in (-2,2)$; dosadíme $y = x^2$ do funkce f.

  $$u\,(x) = f\left(x, x^2\right) = x^3 + 2x^2 + x^4 - 2$$
  Určíme stacionární body funkce u.
  $$u'\,(x) = 3x^2 + 4x + 4x^3$$
  $$u'\,(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\left(4x^2 + 3x + 4\right) = 0 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow x_1 = 0 \in (-2,2)\,;\ y_1 = 0^2 = 0$$

  Vyřešíme rovnici $4x^2 + 3x + 4 = 0$
  $$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-64}}{8}$$

  Poněvadž diskriminant $D < 0$, nemá rovnice řešení v R.
  Získali jsme tedy jediný stacionární bod, a to bod $A = [0,0] \in \alpha$.

- Vnitřní body úsečky β : $y = 4 \wedge x \in (-2,2)$; dosadíme $y = 4$ do funkce f.

  $$v\,(x) = f\,(x,4) = x^3 + 2x^2 + 4^2 - 2 = x^3 + 2x^2 + 14$$
  Určíme stacionární bod funkce v.
  $$v'\,(x) = 3x^2 + 4x$$
  $$v'\,(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\,(3x+4) = 0 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow x_1 = 0 \in (-2,2)\,,\ x_2 = -\frac{4}{3} \in (-2,2)\,,\ y_1 = y_2 = 4$$

  Získali jsme 2 stacionární body:
  $C = [0,4] \in \beta$
  $D = \left[-\frac{4}{3}, 4\right]\ \beta$

(c) Dosud neuvažované body z hranice $h\,(M)$:

$E = [2,4]\,,$ a $F = [-2,4]\,.$

(2) Celkem jsme nalezli 5 bodů, podezřelých z globálního extrému.
Ve všech podezřelých bodech určíme funkční hodnoty.

$$f(A) = f(0,0) = -2$$
$$f(C) = f(0,4) = 4^2 - 2 = 14$$
$$f(D) = f\left(-\frac{4}{3}, 4\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 16 - 2 = 15\frac{2}{32}$$
$$f(E) = f(2,4) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 16 - 2 = 30$$
$$f(F) = f(-2,4) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 16 - 2 = 14$$

Funkce f má globální maximum 30 v hraničním bodě $E = [2,4]$ a globální minimum -2 v hraničním bodě $A = [0,0]$.

■

Určujeme-li vázaný extrém, pak vyjádříme z vazby explicitně jednu proměnnou dosadíme do dané funkce a převedeme zadanou úlohu na hledání extrému funkce jedné proměnné. Hledáme-li globální extrémy funkce spojité na kompaktní množině, pak je jejich existence zaručena Weierstrassovou větou. Vyhledáme body podezřelé z lokálního extrému uvnitř množiny a body podezřelé z vázaného lokálního extrému na hranici množiny. Globální maximum je rovno největší funkční hodnotě a globální minimum je rovno nejmenší funkční hodnotě v podezřelých bodech.

1. *Najděte vázané lokální extrémy funkce*
   - $f(x,y) = y^2 - 4x^3$ při vazbě $2x - y + 1 = 0$.

     [vázané o. l. maximum 5 v bodě $A = [1,3]$, vázané o. l. minimum $\frac{7}{27}$ v bodě $B = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$]
   - $f(x,y) = xy$ při vazbě $x + y + 2 = 0$.

     [vázané o. l. maximum 1 v bodě $A = [-1,-1]$]
2. *Najděte globální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ *na množině* $M : x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3$.

   [globální maximum 6 v bodě $[0,-3]$ a $[-3,0]$, globální minimum -1 v bodě $[-1,-1]$]

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 11

Funkce tří proměnných

Po prostudování kapitoly budete umět:

- určovat definiční obor a obor spojitosti;
- počítat limity,
- počítat parciální derivace,
- počítat totální diferenciál a užívat ho k dalším výpočtům,
- vyhledávat extrémy: lokální, vázané a globální.

Klíčová slova:

Definiční obor, parciální derivace, smíšené parciální derivace, totální diferenciál, lokální extrém, vázaný extrém, globální extrém.

Zadání funkce a její hodnoty

Příklad 11.1 *Vyjádřeme objem V a povrch S kvádru jako funkci délek jeho hran a, b a c.* $(a > 0, b > 0, c > 0)$

Řešení

Objem V má být funkcí tří proměnných a, b, c, tj. $V = f(a, b, c)$.
Užijeme známý vzorec $V = abc$ a úkol je splněn.
Stejně postupujeme v případě povrchu: $S = g(a, b, c)$.
Ze známého vzorce: $S = 2(ab + bc + ac)$; S je funkcí a, b, c.

■

Příklad 11.2 *Obvod trojúhelníka ABC je roven $o > 0$. Vyjádříme obsah P trojúhelníka ABC jako funkci jeho stran a, b, c.*

Řešení

Podle Heronova vzorce pro výpočet obsahu P trojúhelníka je

$$P = \sqrt{\frac{o}{2}\left(\frac{o}{2} - a\right)\left(\frac{o}{2} - b\right)\left(\frac{o}{2} - c\right)} = \sqrt{\frac{o}{2} \cdot \frac{o-2a}{2} \cdot \frac{o-2b}{2} \cdot \frac{o-2c}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{o}{16}(o-2a)(o-2b)(o-2c)}.$$

Přitom musí být splněny podmínky

$$o - 2a > 0 \Rightarrow a < \frac{o}{2},$$
$$o - 2a > 0 \Rightarrow b < \frac{o}{2},$$
$$o - 2c > 0 \Rightarrow c < \frac{o}{2}.$$

Podařilo se nám vyjádřit P jako funkci tří proměnných a, b, c. Obvod o je totiž dán.

■

Příklad 11.3 *Najděme hodnotu funkce* $f(x, y, z) = \left[\arcsin \frac{|x|}{y} - 1\right] \cdot \cos 2x^2 z$ *v bodě* $A = [0, -1, 2]$.

Řešení

Do předpisu dané funkce dosadíme souřadnice bodu A a dostaneme tak

$$f(A) = f(0, -1, 2) = \left[\arcsin \frac{|0|}{-1} - 1\right] \cdot \cos\left(2 \cdot 0^2 \cdot 2\right) =$$
$$= (\arcsin 0 - 1) \cdot \cos 0 = (0 - 1) \cdot 1 = -1$$

■

Příklad 11.4 *Najděme hodnotu funkce* $f(x, y, z) = z^2 \cdot \ln \sin\left[\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)\right]$ *v bodě* $A = [0, 1, 2]$.

Řešení

Do předpisu dané funkce dosadíme souřadnice bodu A a dostaneme tak

$$f(A) = f(0, 1, 2) = 2^2 \cdot \ln \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(0^2 + 1^2\right)\right] = 4 \cdot \ln \sin \frac{\pi}{2} = 4 \cdot \ln 1 = 4 \cdot 0 = 0$$

■

Příklad 11.5 *Najděme hodnotu funkce* $f(x, y, z) = \frac{x-2y+z}{x^2+y^2-z^2}$ *v bodě* $A = [a, -a, a]$.

Řešení

Do předpisu dané funkce dosadíme souřadnice bodu A a dostaneme tak

$$f(A) = f(a, -a, a) = \frac{a - 2(-a) + a}{a^2 + (-a)^2 - a^2} = \frac{4a}{a^2} = \frac{4}{a}, \text{ pokud je } a \neq 0.$$

■

Příklad 11.6 *Najděme hodnotu funkce* $f(x, y, z) = \frac{x^2-y^2+z^2}{xyz}$ *v bodech* $A = [1, 2, 3]$ *a* $B = \left[\frac{x}{y}, \frac{z}{y}, 1\right]$.

Řešení

Do předpisu funkce dosadíme postupně souřadnice bodů A a B.

$$f(A) = f(1, 2, 3) = \frac{1^2 - 2^2 + 3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$$

$$f(B) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}, 1\right) = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 + 1^2}{\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} \cdot 1} = \frac{\frac{x^2}{y^2} - \frac{z^2}{y^2} + 1}{\frac{xz}{y^2}} = \frac{\frac{x^2-z^2+y^2}{y^2}}{\frac{xz}{y^2}} =$$

$$\frac{x^2 - z^2 + y^2}{xz}, \text{ pokud } x, y, z \neq 0.$$

■

Definiční obor funkce

Připomínáme: $D(f) \subset R^3$, $H(f) \subset R$, $G(f) \subset R^4$

Příklad 11.7 *Určeme definiční obor* $D(f)$ *funkce* $f(x, y, z) = \ln x + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{x}{\sqrt{z}}$.

Řešení

Definiční obor určíme z podmínek:

$$x > 0 \qquad \wedge \qquad y > 0 \qquad \wedge \qquad z > 0$$

Definiční obor je vnitřek prvního oktantu.

■

Příklad 11.8 *Určeme definiční obor* $D(f)$ *funkce* $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt[4]{4 - y^2} + 3\sqrt[6]{9 - z^2}$.

Řešení

Definiční obor určíme z podmínek:

$$\begin{array}{rcrcr} 1 - x^2 \geq 0 & \wedge & 4 - y^2 \geq 0 & \wedge & 9 - z^2 \geq 0 \\ |x| \leq 1 & \wedge & |y| \leq 2 & \wedge & |z| \leq 3 \\ -1 \leq x \leq 1 & \wedge & -2 \leq y \leq 2 & \wedge & -3 \leq z \leq 3 \end{array}$$

Definičním oborem jsou všechny body kvádru, který má délky hran 2, 4 a 6.
Kvádr je ohraničen rovinami: $x = \pm 1$, $y = \pm 2$, $z = \pm 3$ a má střed v počátku.

■

Příklad 11.9 *Určeme definiční obor $D(f)$ funkce $f(x, y, z) = e^{3x^2-y+2z^2}$.*

Řešení

$D(f) = R^3$
Definičním oborem jsou všechny body trojrozměrného prostoru R^3.

■

Příklad 11.10 *Určeme definiční obor $D(f)$ funkce $f(x, y, z) = \frac{x^2-4y+z}{|y+z|}$.*

Řešení

Definiční obor určíme z podmínky $y + z \neq 0 \Rightarrow y \neq -z$.
$D(f) = \{[x, y, z] \in R^3;\ y \neq -z\}$
Definičním oborem je prostor R^3 s výjimkou všech bodů roviny $y + z = 0$.

■

Příklad 11.11 *Určeme definiční obor $D(f)$ funkce $f(x, y, z) = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$.*

Řešení

Definiční obor určíme z podmínek:

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad \wedge \qquad -1 \leq y \leq 1 \qquad \wedge \qquad -1 \leq z \leq 1$$

Definičním oborem jsou všechny body krychle o hraně 2; krychle má střed v počátku a je ohraničená rovinami $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ a $z = \pm 1$.

■

Příklad 11.12 *Určeme definiční obor $D(f)$ funkce $f(x, y, z) = 2 \arcsin(1 + x^2 + y^2 + z^2)$.*

Řešení

Definiční obor určíme z podmínky $-1 \leq 1 + x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
Úpravou získáme

$$-2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 0$$

První nerovnost je splněna pro všechny body $[x, y, z] \in R^3$. Druhou nerovnost splňuje jediný bod, a to počátek $[0, 0, 0]$. Průnikem obou množin je počátek $[0, 0, 0]$.
$D(f) = \{[0, 0, 0]\}$.
Funkce je definována jen v jediném bodě.

■

Příklad 11.13 *Určeme definiční obor* $D(f)$ *funkce* $f(x,y,z)=\frac{\ln\left(x^2+y^2+z^2-4\right)}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$.

Řešení

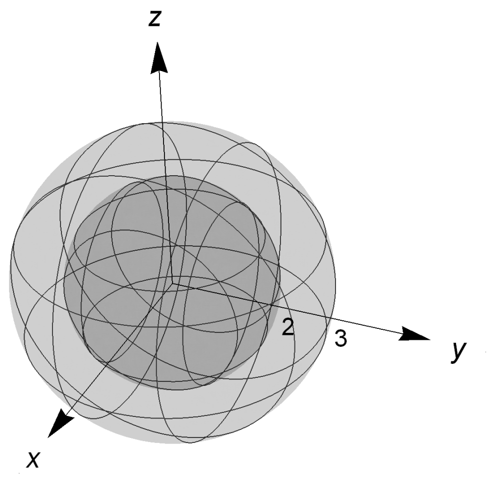
Definiční obor určíme z podmínek:

$$x^2+y^2+z^2-4>0 \qquad \wedge \qquad 9-x^2-y^2-z^2>0$$

Upravíme:

$$x^2+y^2+z^2>4 \qquad \wedge \qquad x^2+y^2+z^2<9$$

$D(f)=\{[x,y,z]\in R^3;\ 4<x^2+y^2+z^2<9\}$



Obr. 11.1 Definiční obor funkce $f(x,y,z)=\frac{\ln\left(x^2+y^2+z^2-4\right)}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$

Zdroj: Vlastní zpracování

Definičním oborem je množina všech vnitřních bodů mezi kulovými sférami o rovnicích $x^2+y^2+z^2=4$ a $x^2+y^2+z^2=9$. Kulové sféry mají střed v počátku a poloměry 2 a 3.

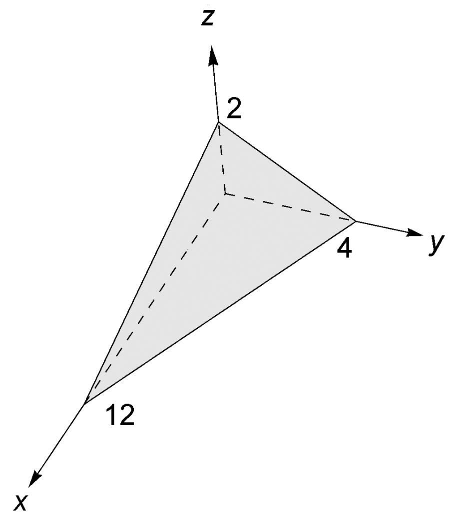
■

Příklad 11.14 *Určeme definiční obor $D\left(f\right)$ funkce $f\left(x,y,z\right) = \operatorname{arctg}\frac{x+3y-5z+3}{x+3y+6z-12}$.*

Řešení

Definiční obor určíme z podmínky

$$x + 3y + 6z - 12 \neq 0 \Rightarrow x + 3y + 6z \neq 12 \ / : 12$$
$$\frac{x}{12} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} \neq 1$$



Obr. 11.2 Část roviny $\frac{x}{12} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$
Zdroj: Vlastní zpracování

Definičním oborem jsou body prostoru R^3 s výjimkou všech bodů roviny $\frac{x}{12} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$.
Rovina vytíná na osách x, y, z úseky 12, 4, 2.

■

Příklad 11.15 *Určeme definiční obor $D\left(f\right)$ funkce $f\left(x,y,z\right) = \sqrt[4]{36 - 9x^2 - 36y^2 - 4x^2}$.*

Řešení

Definiční obor určíme z podmínky

$$36 - 9x^2 - 36y^2 - 4z^2 \geq 0.$$

Upravíme:

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 \leq 36 \ / : 36$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} \leq 1$$

Rovnice $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1$ je rovnicí elipsoidu se středem v počátku a poloosami 2,1 a 3 na osách x, y a z.
$D\left(f\right) = \left\{[x,y,z] \in R^3;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} \leq 1\right\}$
Definičním oborem jsou vnitřní a hraniční body elipsoidu.

■

Spojitost

Připomínáme: Elementární funkce jsou spojité na svém definičním oboru $D\left(f\right)$. Elementární funkce mají pro všechny body svého $D\left(f\right)$ jednotný funkční předpis.

Příklad 11.16 *Určeme množinu, na níž je spojitá funkce* $f\left(x,y,z\right)=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Řešení

Funkce je elementární, je tedy spojitá na svém $D\left(f\right)$.
Určíme $D\left(f\right)$ z podmínky $x^2+y^2+z^2\neq 0\Rightarrow x\neq 0\wedge y\neq 0\wedge z\neq 0$.
Funkce je spojitá na množině $R^3\setminus\{[0,0,0]\}$.

■

Příklad 11.17 *Určeme množinu, na níž je spojitá funkce* $f\left(x,y,z\right)=e^{\frac{1}{x+y+z}}$.

Řešení

Funkce je elementární, je tedy spojitá na svém $D\left(f\right)$.
Určíme $D\left(f\right)$ z podmínky $x+y+z\neq 0$.
Funkce je spojitá na množině R^3 kromě bodů roviny $x+y+z=0$.

■

Příklad 11.18 *Určeme množinu bodů nespojitosti funkce* $f\left(x,y,z\right)=\frac{x-yz}{z-4}$.

Řešení

Vyjdeme z podmínky $z-4\neq 0\Rightarrow z\neq 4$.
Všechny body roviny $z-4=0$ jsou body nespojitosti dané funkce.
Rovina je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou (x,y).

■

Příklad 11.19 *Určeme množinu bodů nespojitosti funkce* $f\left(x,y,z\right)=\frac{1}{\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)}$.

Řešení

Vyjdeme z podmínek pro určení $D\left(f\right)$.

$$\begin{array}{rcl} \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\neq 0 & \text{a} & x^2+y^2+z^2>0 \\ x^2+y^2+z^2\neq 1 & & \text{je splněno pro každý bod } [x,y,z]\in R^3 \text{ kromě bodu } [0,0,0] \end{array}$$

Množinou bodů nespojitosti jsou všechny body kulové sféry o rovnici $x^2+y^2+z^2=1$ a bod $[0,0,0]$.
Sféra má střed v počátku $[0,0,0]$ a poloměr 1.

■

Limita funkce

Příklad 11.20 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y,z)\to\left(-1,\frac{\pi}{10},2\right)} \frac{1+\sin^2(x+5y+1)}{1+\operatorname{tg} 20y-\ln(z+x)}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y,z)\to\left(-1,\frac{\pi}{10},2\right)} \frac{1+\sin^2(x+5y+1)}{1+\operatorname{tg} 20y-\ln(z+x)} = \frac{1+\sin^2\left(-1+5\frac{\pi}{10}+1\right)}{1+\operatorname{tg}\frac{20\pi}{10}-\ln(2-1)} = \frac{1+\sin^2\frac{\pi}{2}}{1+\operatorname{tg} 2\pi-\ln 1} =$$
$$= \frac{1+1^2}{1+0-0} = \frac{2}{1} = 2$$

Limitu jsme vypočítali dosazením souřadnic bodu A do předpisu dané funkce; funkce je v bodě A spojitá.

■

Příklad 11.21 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2z^2+1}-1}{x^2y^2z^2}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2z^2+1}-1}{x^2y^2z^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\left(\sqrt{x^2y^2z^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2y^2z^2+1}+1\right)}{x^2y^2z^2\left(\sqrt{x^2y^2z^2+1}+1\right)} =$$
$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2+1-1}{x^2y^2z^2\left(\sqrt{x^2y^2z^2+1}+1\right)} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2\left(\sqrt{x^2y^2z^2+1}+1\right)} =$$
$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2y^2z^2+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}$$

■

Příklad 11.22 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{\sin(x-y+z-1)}{x-y+z-1}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{\sin(x-y+z-1)}{x-y+z-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Užili jsme substituci: $x-y+z-1=t$
Když $x\to 0$, $y\to 0$ a $z\to 0$, pak $t\to 0$.

■

Příklad 11.23 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,-1)} \frac{\sin xy^2z^2}{xyz}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,-1)} \frac{\sin xy^2z^2}{xyz} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y,z)\to(0,1,-1)} \frac{yz\cdot\sin xy^2z^2}{xy^2z^2} =$$
$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,1,-1)} yz \cdot \lim_{(x,y,z)\to(0,1,-1)} \frac{\sin xy^2z^2}{xy^2z^2} = -1\cdot 1 = -1$$

■

Příklad 11.24 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+yz-xy+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+yz-xy+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1} = \left[\frac{1}{\to 0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1\right) = 1-1=0$$

■

Příklad 11.25 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}$.

Řešení

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} = (\infty)^0$$

Zavedeme substituci: $x+y+z=t$, $t\to 0$.

$$\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{2}{t}\right)^t = \left(\infty^0\right) = \lim_{t\to 0} e^{\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)^t} = \lim_{t\to 0} e^{t\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\left[t\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)\right]} \stackrel{=}{} e^0 = 1$$

$$\lim_{t\to 0}\left[t\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)\right] = (0\cdot\infty) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{t}}\cdot\frac{-2}{t^2}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0}\frac{2}{1+\frac{2}{t}} =$$

$$= \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0$$

Limita $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} = 1$

■

Parciální derivace

Příklad 11.26 *Určeme první parciální derivace funkce* $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-6x^2y+5xz^2-3xyz+y^2z-15$ *a jejich hodnoty v bodě* $A=[1,-1,2]$.

Řešení

Podle známých vzorců a pravidel vypočteme nejprve první parciální derivace v libovolném bodě $[x,y,z]$. Dosazením souřadnic bodu A vypočteme hodnotu parciálních derivací v bodě A.

$f'_x(x,y,z) = 3x^2-12xy+5z^2-3yz$
$f'_y(x,y,z) = 3y^2-6x^2-3xz+2yz$
$f'_z(x,y,z) = 3z^2+10xz-3xy+y^2$
$f'_x(A) = f'_x(1,-1,2) = 3\cdot 1^2-12\cdot 1\cdot(-1)+5\cdot 2^2-3\cdot(-1)\cdot 2 = 41$
$f'_y(A) = f'_x(1,-1,2) = 3\cdot(-1)^2-6\cdot 1^2-3\cdot 1\cdot 2+2\cdot(-1)\cdot 2 = -13$
$f'_z(A) = f'_x(1,-1,2) = 3\cdot 2^2+10\cdot 1\cdot 2-3\cdot 1\cdot(-1)+(-1)^2 = 36$

■

Příklad 11.27 *Vypočítejme první parciální derivace funkce* $f(x,y,z) = x^3\sqrt{y}z - \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

Řešení

$$f'_x(x,y,z) = 3x^2\sqrt{y}z - \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}$$
$$f'_y(x,y,z) = \frac{x^3 z}{2\sqrt{y}} + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$$
$$f'_z(x,y,z) = x^3\sqrt{y} - \frac{y}{z^2} + \frac{1}{x}$$

■

Příklad 11.28 *Vypočítejme první parciální derivace funkce* $f(x,y,z) = \ln \frac{xy}{z^2},\ x > 0,$ $y > 0,\ z > 0.$

Řešení

$$f'_x(x,y,z) = \frac{1}{\frac{xy}{z^2}} \cdot \frac{y}{z^2} = \frac{1}{x}$$
$$f'_y(x,y,z) = \frac{1}{\frac{xy}{z^2}} \cdot \frac{x}{z^2} = \frac{1}{y}$$
$$f'_z(x,y,z) = \frac{1}{\frac{xy}{z^2}} \cdot \frac{-2 \cdot xy}{z^3} = \frac{-2}{z}$$

■

Příklad 11.29 *Vypočítejme první parciální derivace funkce* $f(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Řešení

Pro každý bod $[x,y,z] \neq [0,0,0]$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-x\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

■

Příklad 11.30 *Vypočítejme první parciální derivace funkce* $u = \operatorname{arctg}(x-y)^z$.

Řešení

$$u'_x = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$$
$$u'_y = \frac{z(x-y)^{z-1}\cdot(-1)}{1+(x-y)^{2z}} = \frac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$$
$$u'_z = \frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$$

■

Příklad 11.31 *Vypočítejme první parciální derivace funkce* $u = \ln \frac{x}{y^2-z}, x > 0, y^2 - z > 0.$

Řešení

$$u'_x = \frac{1}{\frac{x}{y^2-z}} \cdot \frac{1}{y^2-z} = \frac{1}{x}$$
$$u'_y = \frac{1}{\frac{x}{y^2-z}} \cdot \frac{-x\cdot 2y}{(y^2-z)^2} = \frac{-2y}{y^2-z}$$
$$u'_z = \frac{1}{\frac{x}{y^2-z}} \cdot \frac{-x\cdot(-1)}{(y^2-z)^2} = \frac{1}{y^2-z}$$

■

Příklad 11.32 *Vypočítejme první parciální derivace funkce* $u = x^{y^z}, x > 0, y > 0.$

Řešení

$$u'_x = y^z u^{y^z-1}$$
$$u'_y = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot z y^{z-1}$$
$$u'_z = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot y^z \cdot \ln y$$

■

Příklad 11.33 *Vypočítejme všechny první a druhé parciální derivace funkce*
$f(x,y,z) = x^4 - 5y^3 + 3z^2 - 6xz^2 + 3xy - 2yz + \frac{1}{2}xyz.$

Řešení

$$f'_x = 4x^3 - 6z^2 + 3y + \frac{1}{2}yz$$
$$f'_y = -15y^2 + 3x - 2z + \frac{1}{2}xz$$
$$f'_z = 6z - 12xz - 2y + \frac{1}{2}xy$$

$$f''_{xx} = 12x^2 \qquad f''_{xy} = 3 + \frac{1}{2}z \qquad f''_{xz} = -12z + \frac{1}{2}y$$
$$f''_{yy} = -30y \qquad f''_{yx} = 3 + \frac{1}{2}z \qquad f''_{yz} = -2 + \frac{1}{2}x$$
$$f''_{zz} = 6 - 12x \quad f''_{zx} = -12z + \frac{1}{2}y \quad f''_{zy} = -2 + \frac{1}{2}x$$

Srovnejme:

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 3 + \frac{1}{2}z$$
$$f''_{xz} = f''_{zx} = -12z + \frac{1}{2}y$$
$$f''_{yz} = f''_{zy} = -2 + \frac{1}{2}x$$

Spojité smíšené parciální derivace se sobě rovnají.

■

Příklad 11.34 *Vypočítejme* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,-1,1)$ *pro funkci* $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2), x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Řešení

Vypočteme $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ v libovolném bodě $[x,y,z]$ a pak dosadíme bod $[1,-1,1]$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{-2y \cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,-1,1) = \frac{-4 \cdot (-1) \cdot 1}{\left(1^2+(-1)^2+1^2\right)^2} = \frac{4}{9}$$

■

Příklad 11.35 *Vypočítejme* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y \partial z}(-1,0,1)$ *pro funkci* $f(x,y,z) = e^{xyz}$.

Řešení

Vypočteme $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ v libovolném bodě $[x,y,z]$ a pak dosadíme bod $[-1,0,1]$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ze^{xyz} + yze^{xyz} \cdot xz = e^{xyz}\left(z + xyz^2\right)$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz} \cdot xy\left(z + xyz^2\right) + e^{xyz}(1 + 2xyz) = e^{xyz}\left(xyz + x^2y^2z^2 + 1 + 2xyz\right) =$$
$$= e^{xyz}\left(3xyz + x^2y^2z^2 + 1\right)$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(-1,0,1) = e^0(0+0+1) = 1 \cdot 1 = 1$$

■

Příklad 11.36 *Dokážeme, že daná funkce* $u\left(x,y,z\right) = x + \frac{x-y}{y-z}$ *vyhovuje uvedené parciální diferenciální rovnici* $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.

Řešení

Vypočteme parciální derivace.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{1}{y-z}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1\left(y-z\right) - \left(x-y\right)\cdot 1}{\left(y-z\right)^2} = \frac{-y+z-x+y}{\left(y-z\right)^2} = \frac{z-x}{\left(y-z\right)^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-1\left(x-y\right)\cdot\left(-1\right)}{\left(y-z\right)^2} = \frac{x-y}{\left(y-z\right)^2}$$

Dosadíme derivace do rovnice a upravíme její levou stranu.

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{y-z} + \frac{z-x}{\left(y-z\right)^2} + \frac{x-y}{\left(y-z\right)^2} &= 1 \\
\frac{\left(y-z\right)^2 + \left(y-z\right) + z - x + x - y}{\left(y-z\right)^2} &= 1 \\
\frac{\left(y-z\right)^2 + \left(y-z\right) + z - y}{\left(y-z\right)^2} &= 1 \\
\frac{\left(y-z\right)^2 + \left(y-z\right) - \left(y-z\right)}{\left(y-z\right)^2} &= 1 \\
\frac{\left(y-z\right)^2}{\left(y-z\right)^2} &= 1 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

■

Totální diferenciál funkce

Připomínáme: $df\left(x,y,z\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y,z,\right)dx+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y,z\right)dy+\frac{\partial f}{\partial z}\left(x,y,z\right)dz$

Příklad 11.37 *Určeme totální diferenciál df funkce $f\left(x,y,z\right)=xyz+\frac{1}{2}xy^2z+\frac{1}{3}xyz^3$*

a) v libovolném bodě $[x,y,z]\in R^3$,

b) v bodě $[-1,2,1]$,

c) v libovolném bodě pro přírůstky: $dx=0{,}1;\ dy=-0{,}1;\ dz=0{,}2$,

d) v bodě $[2,1,-2]$ pro $dx=0{,}02;\ dy=-0{,}01;\ dz=0{,}02$.

Řešení

Vypočteme všechny první parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yz,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}xz\cdot 2y=xyz,\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{3}xy\cdot 3z^2=xyz^2$$

a) Dosadíme parciální derivace do vzorce.

$$df\left(x,y,z\right)=yzdx+xyzdy+xyz^2dz$$

b) Dosadíme souřadnice bodu $[-1,2,1]$.

$$df\left(-1,2,1\right)=2\cdot 1dx+\left(-1\right)\cdot 2\cdot 1\cdot dy+\left(-1\right)\cdot 2\cdot 1^2dz$$
$$df\left(-1,2,1\right)=2dx-2dy-2dz=2\left(dx-dy-dz\right)$$

c) Dosadíme zadané přírůstky.

$$df\left(x,y,z\right)=yz\cdot 0{,}1+xyz\cdot\left(-0{,}1\right)+xyz^2\cdot 0{,}2$$
$$df\left(x,y,z\right)=0{,}1yz-0{,}1xyz+0{,}2xyz^2$$

d) Dosadíme souřadnice bodu i přírůstky.

$$df\left(2,1,-2\right)=1\cdot\left(-2\right)\cdot 0{,}02+2\cdot 1\cdot\left(-2\right)\cdot\left(-0{,}01\right)+2\cdot 1\left(-2\right)^2\cdot 0{,}02$$
$$df\left(2,1,-2\right)=-0{,}04+0{,}04+0{,}16=0{,}16$$

■

Příklad 11.38 *Pomocí totálního diferenciálu určíme přibližnou hodnotu výrazu* $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$.

Řešení

Nejprve sestrojíme vhodnou funkci f tak, aby $f\left(1{,}002; 2{,}003; 3{,}004\right) = 1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$.
Zřejmě je to funkce $f\left(x, y, z\right) = xy^2z^3$.
Víme, že $f\left(1{,}002; 2{,}003; 3{,}004\right) \doteq f\left(1, 2, 3\right) + df\left(1, 2, 3\right)$,
přičemž přírůstky jsou: $dx = 1{,}002 - 1 = 0{,}002$
$dy = 2{,}003 - 2 = 0{,}003$
$dz = 3{,}004 - 3 = 0{,}004$
Vypočteme parciální derivace a určíme totální diferenciál df.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$$
$$df\left(x, y, z\right) = y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $[1, 2, 3]$ jsou:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, 2, 3\right) = 2^2 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, 2, 3\right) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(1, 2, 3\right) = 3 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 27 = 108$$

Dosadíme do diferenciálu:

$$df\left(1, 2, 3\right) = 108 \cdot 0{,}002 + 108 \cdot 0{,}003 + 108 \cdot 0{,}004$$
$$df\left(1, 2, 3\right) = 108\left(0{,}002 + 0{,}003 + 0{,}004\right) = 108 \cdot 0{,}009 = 0{,}972$$

Zbývá určit $f\left(1, 2, 3\right) = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 108$

$$f\left(1{,}002; 2{,}003; 3{,}004\right) \doteq 108 + 0{,}972 = 108{,}972$$

Přibližná hodnota výrazu $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$ je $108{,}972$.

■

Extrémy

Připomínáme: Pro stacionární bod A platí: $f'_x(A) = f'_y(A) = f'_z(A) = 0$.
O existenci a typu lokálního extrému rozhodujeme podle postačující podmínky pro lokální extrémy.
Zavedeme označení determinantů:

$$D_1(A) = |f''_{xx}(A)| = f''_{xx}(A)$$
$$D_2(A) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix}$$
$$D_3(A) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) & f''_{xz}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) & f''_{yz}(A) \\ f''_{zx}(A) & f''_{zy}(A) & f''_{zz}(A) \end{vmatrix}$$

Sylvestrovo kriterium:

(1) Je-li $D_1(A) > 0$, $D_2(A) > 0$, $D_3(A) > 0$, pak má funkce f v bodě A ostré lokální minimum.

(2) Je-li $D_1(A) < 0$, $D_2(A) > 0$, $D_3(A) < 0$, pak má funkce f v bodě A ostré lokální maximum. Jsou-li všechny determinanty nenulové a není-li splněno (1) ani (2), pak funkce nemá v bodě A lokální extrém.

Příklad 11.39 *Najděme lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.*

Řešení

Funkce f je definována a má spojité parciální derivace všech řádů na prostoru R^3. Lokální extrém může tedy nastat jen ve stacionárním bodě.
Vypočteme parciální derivace prvního a druhého řádu.

$$\begin{array}{lll} f'_x = 2x - y + 1 & f''_{xx} = 2 & f''_{xy} = -1 = f''_{yx} \\ f'_y = 2y - x & f''_{yy} = 2 & f''_{yz} = 0 = f''_{xy} \\ f'_z = 2z - 2 & f''_{zz} = 2 & f''_{zx} = 0 = f''_{xz} \end{array}$$

Určíme stacionární body.

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0;\ 4y - y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$
$$f'_y = 0 \Leftrightarrow 2y - x = 0 \Rightarrow x = 2y;\ x = -\frac{2}{3}$$
$$f'_z = 0 \Leftrightarrow 2z - 2 = 0 \Rightarrow z = 1$$

Získali jsme jediný stacionární bod $A = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right]$, který je podezřelý z lokálního extrému. Podle postačující podmínky pro extrém rozhodneme, zda a jaký typ extrému v bodě A nastane.

Vypočteme determinanty:

$D_1(A) = 2 > 0$

$$D_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$D_3(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6 > 0$$

$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ D_3 > 0 \Rightarrow$ ostré lokální minimum

$$f(A) = f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 \cdot 1 = -\frac{4}{3}$$

Funkce má ostré lokální minimum $-\frac{4}{3}$ v bodě $A = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right]$.

■

Příklad 11.40 *Najděme lokální extrémy funkce* $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

Řešení

Funkce f je definována a má spojité parciální derivace všech řádů na prostoru R^3. Lokální extrém může tedy nastat jen ve stacionárním bodě.
Vypočteme parciální derivace prvního a druhého řádu.

$$\begin{array}{lll} f'_x = 4x - y - z & f''_{xx} = 4 & f''_{xy} = -1 = f''_{yx} \\ f'_y = 2y - x & f''_{yy} = 2 & f''_{xz} = -1 = f''_{zx} \\ f'_z = 2 - x & f''_{zz} = 0 & f''_{yz} = 0 = f''_{zy} \end{array}$$

Určíme stacionární body.

$f'_x = 0 \Leftrightarrow 4x - y - z = 0;\ 4 \cdot 2 - 1 - z = 0 \Rightarrow z = 7$

$f'_y = 0 \Leftrightarrow 2y - x = 0;\ 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$

$f'_z = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

Získali jsme jediný stacionární bod $A = [2, 1, 7]$, ve kterém by mohl nastat lokální extrém.
Podle postačující podmínky pro extrém rozhodneme, zda a jaký typ extrému v bodě A nastane.
Vypočteme determinanty:

$D_1(A) = 4 > 0$

$$D_2(A) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0$$

$$D_3(A) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0 \Rightarrow$ extrém nenastane

Funkce nemá žádný lokální extrém.

■

Příklad 11.41 *Určeme lokální extrémy funkce* $f(x,y,z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$.

Řešení

Funkce f je definována a má spojité parciální derivace všech řádů na prostoru R^3. Lokální extrém může tedy nastat jen ve stacionárním bodě.
Vypočteme parciální derivace prvního a druhého řádu.

$$\begin{array}{lll} f'_x = 6x^2yz - 2x & f''_{xx} = 12xyz - 2 & f''_{xy} = 6x^2z = f''_{yx} \\ f'_y = 2x^3z - 2y & f''_{yy} = -2 & f''_{xz} = 6x^2y = f''_{zx} \\ f'_z = 2x^3y - 2z & f''_{zz} = -2 & f''_{yz} = 2x^3 = f''_{zy} \end{array}$$

Určíme stacionární body.

$$\begin{array}{ll} f'_x = 0 \Leftrightarrow 6x^2yz - 2x = 0 \,/ : 2 & 3x^2yz - x = 0 \\ f'_y = 0 \Leftrightarrow 2x^3z - 2y = 0 \,/ : 2 & x^3z - y = 0 \\ f'_z = 0 \Leftrightarrow 2x^3y - 2z = 0 \,/ : 2 & x^3y - z = 0 \end{array}$$

Vytkneme v 1. rovnici x a obdržíme soustavu tří rovnic o neznámých x, y a z.

(1) $x(3xyz - 1) = 0$

(2) $x^3z - y = 0$; $x^3 \cdot x^3y - y = 0 \Leftrightarrow y(x^6 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = \pm 1$

(3) $x^3y - z = 0 \Rightarrow z = x^3y$ dosadíme do (2)

Z $(2): x = 1$ dosadíme do (3)	$(2)\, x = -1$ dosadíme do (3)	$(2)\, y = 0$ dosadíme do (3)
$(3)\, z = 1^3y \Leftrightarrow z = y$	$(3)\, z = (-1)^3\, y \Leftrightarrow z = -y$	$(3)\, z = x^3 \cdot 0 \Rightarrow z = 0$
dosadíme do (1)	dosadíme do (1)	dosadíme do (1)
$1(3 \cdot 1 \cdot y \cdot y - 1) = 0$	$-1[3 \cdot (-1) \cdot y \cdot (-y) - 1] = 0$	$x(3x \cdot 0 \cdot 0 - 1) = 0$
$3y^2 = 1$	$-3y^2 = -1$	$-x = 0$
$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x = 0$
$z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	$z = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$	

Získali jsme 5 stacionárních bodů $A = \left[1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $B = \left[1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $C = \left[-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $D = \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $E = [0, 0, 0]$, které jsou podezřelé z lokálního extrému.
Podle postačující podmínky pro extrém rozhodneme, zda a jaký typ extrému v podezřelých bodech nastane.
Pro přehlednost sestavíme tabulku derivací a determinantů. Výpočet provedeme pro bod A a E; ostatní výpočty ponecháme na čtenáři.

Bod A

$f''_{xx}(A) = 12 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 = 4 - 2 = 2$ $\quad f''_{xy}(A) = 6 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

$f''_{yy}(A) = -2$ $\quad f''_{xz}(A) = 6 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

$f''_{zz}(A) = -2$ $\quad f''_{yz}(A) = 2 \cdot 1^3 = 2$

$$D_1(A) = 2 > 0$$

$$D_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -4 - 4 \cdot 3 = -16 < 0$$

$$D_3(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 24 + 24 - (-24 + 8 - 24) = 96 > 0$$

Bod E

$f''_{xx}(E) = 12 \cdot 0 - 2 = -2$ $\quad f''_{xy}(E) = 6 \cdot 0 = 0$

$f''_{yy}(E) = -2$ $\quad f''_{xz}(E) = 6 \cdot 0 = 0$

$f''_{zz}(E) = -2$ $\quad f''_{yz}(E) = 2 \cdot 0 = 0$

$$D_1(E) = -2 < 0$$

$$D_2(E) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$D_3(E) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

Tabulka 11.1 Vyhodnocení extrémů funkce $f(x, y, z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$

Stacionární bod	$D_1 = f''_{xx}$	f''_{yy}	f''_{zz}	f''_{xy}	f''_{xz}	f''_{yz}	D_2	D_3
$A = \left[1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$	$2 > 0$	-2	-2	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	2	$-16 < 0$	$96 > 0$
$B = \left[1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$	$2 > 0$	-2	-2	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	2	$-16 < 0$	$96 > 0$
$C = \left[-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$	$2 > 0$	-2	-2	$-2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	-2	$-16 < 0$	$96 > 0$
$D = \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$	$2 > 0$	-2	-2	$2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	-2	$-16 < 0$	$96 > 0$
$E = [0, 0, 0]$	$-2 < 0$	-2	-2	0	0	0	$4 > 0$	$-8 < 0$

V bodech A, B, C a D extrém nenastane, protože determinant $D_2 < 0$.
V bodě E má funkce ostré lokální maximum, protože determinant $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ a $D_3 < 0$.

$$f(E) = 0$$

Funkce má ostré lokální minimum 0 v bodě $E = [0, 0, 0]$.

■

Příklad 11.42 *Vypočítejme vázané lokální extrémy funkce* $f(x, y, z) = xyz$ *vázané podmínkami*
$x + y - z = 3$ *a* $x - y - z = 8$.

Řešení

Z podmínek vyjádříme 2 proměnné pomocí třetí proměnné, např. x.

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ \underline{x - y - z = 8} \end{array}\right\} + \qquad \begin{array}{l} y = 3 + z - x \\ y = 3 + \frac{2x-11}{2} - x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x - 2z = 11 \\ -2z = 11 - 2x \\ z = \frac{2x-11}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} y = \frac{6+2x-11-2x}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{array}$$

Dosadíme do funkce f.

$$u(x) = f\left(x, -\frac{5}{2}, \frac{2x-11}{2}\right) = x \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{2x-11}{2} = -\frac{5}{4}\left(2x^2 - 11x\right)$$

Obdrželi jsme funkci u jedné proměnné; známým postupem hledáme její extrém.
Funkce u i její derivace jsou spojité, extrém může nastat jen ve stacionárním bodě.
Vypočteme $u'(x) = -\frac{5}{4}(4x - 11)$; $u''(x) = -\frac{5}{4} \cdot 4 = -5$
Najdeme stacionární bod.
Položíme $u'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}(4x - 11) = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{4}$

$$u''\left(\frac{11}{4}\right) = -5 < 0 \Rightarrow \text{ ostré lokální maximum}$$

Vypočteme $z = \frac{2 \cdot \frac{11}{4} - 11}{2} = -\frac{11}{4}$; $y = -\frac{5}{2}$.

$$f(A) = \frac{11}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{605}{32}$$

Funkce má vázané ostré lokální maximum $\frac{605}{32}$ v bodě $A = \left[\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right]$.

■

Příklad 11.43 *Vypočítejme lokální extrémy funkce* $f(x, y, z) = xyz$ *vázané podmínkou*
$x + y + z = 1$.

Řešení

Z vazby vyjádříme jednu proměnnou, např. z: $z = 1 - x - y$ a dosadíme do funkce f.

$$u(x, y) = f(x, y, 1 - x - y) = xy(1 - x - y) = xy - x^2y - xy^2$$

Obdrželi jsme funkci u dvou proměnných x a y; známým postupem hledáme její extrém. Funkce u i všechny její derivace jsou spojité, extrém může nastat jen ve stacionárním bodě.

Vypočteme první a druhé parciální derivace funkce u.

$$u'_x = y - 2xy - y^2 \quad u''_{xx} = -2y \quad u''_{xy} = 1 - 2x - 2y = u''_{yx}$$
$$u'_y = x - x^2 - 2xy \quad u''_{yy} = -2x$$

Najdeme stacionární body.

$$(1)\ u'_x = 0 \Leftrightarrow y\,(1 - 2x - y) = 0$$
$$(2)\ u'_y = 0 \Leftrightarrow x\,(1 - x - 2y) = 0$$

Z (1) obdržíme $y = 0$ nebo $1 - 2x - y = 0$.
Dosadíme do (2).

$$y = 0: \quad x\,(1 - x - 0) = 0 \qquad y = 1 - 2x: \quad x\,(1 - x - 2 + 4x) = 0$$
$$x = 0, x = 1 \qquad x\,(3x - 1) = 0$$
$$x = 0, x = \tfrac{1}{3}$$

Dopočítáme y a z: $x = 0, y = 0, z = 1 - 0 - 0 = 1$
$x = 1, y = 0, z = 1 - 1 - 0 = 0$
$x = 0, y = 1 - 0 = 1, z = 1 - 0 - 1 = 0$
$x = \frac{1}{3}, y = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, z = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Získali jsme 4 stacionární body:

$$A = [0, 0, 1]\,, B = [1, 0, 0]\,, C = [0, 1, 0]\,, D = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

Podle determinantů D_1 a D_2 rozhodneme o existenci a typu extrémů.
Pro přehlednost sestavíme tabulku.

Tabulka 11.2 Vyhodnocení extrémů funkce $f\,(x, y, z) = xyz$

Stacionární bod	$u''_{xx} = D_1$	u''_{yy}	u''_{xy}	$D_2 = u''_{xx} \cdot u''_{yy} - \left(u''_{xy}\right)^2$	extrém
$A = [0, 0, 1]$	0	0	1	$-1\ <\ 0$	nenastane
$B = [1, 0, 0]$	0	-2	-1	$-1\ <\ 0$	nenastane
$C = [0, 1, 0]$	-2	0	-1	$-1\ <\ 0$	nenastane
$D = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$	$-\frac{2}{3}\ <\ 0$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\ >\ 0$	ostré lokální maximum

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

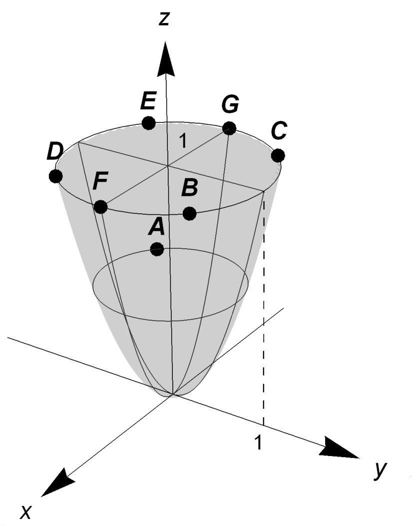
Funkce má vázané ostré lokální maximum $\frac{1}{27}$ v bodě $D = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

■

Příklad 11.44 *Vyhledejme globální extrémy funkce* $f(x,y,z) = x + y + z$ *na množině* $M = \{[x,y] \in R^3; x^2 + y^2 \leq z \wedge z \leq 1\}$.

Řešení

Znázorníme množinu M; je to část rotačního paraboloidu, který má vrchol v počátku, shora omezená rovinou o rovnici $z = 1$.



Obr. 11.3 Množina M a body podezřelé z globálního extrému
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce f je na množině M spojitá, množina M je kompaktní, proto funkce f má na množině M globální extrémy.

(1) Najdeme a shromáždíme všechny body podezřelé z globálního extrému.

(a) Body podezřelé z lokálního extrému, náležející vnitřku M° množiny M.

$$M = \left\{[x,y] \in R^3; x^2 + y^2 < z \wedge z < 1\right\}$$

Spočteme první parciální derivace a určíme stacionární body.

$$f'_x = 1 \neq 0$$
$$f'_y = 1 \neq 0$$
$$f'_z = 1 \neq 0$$

Funkce nemá žádný stacionární bod. Globální extrémy mohou nastat jen na hranici množiny M.

(b) Body podezřelé z vázaného lokálního extrému na hranici $h(M)$ množiny M. Hranice je složena ze tří částí:

- Body pláště paraboloidu do výšky 1 α :

$$z = x^2 + y^2 \wedge z \in \langle 0, 1)$$

Dosadíme vazbu z do funkce f.

$$u(x,y) = f\left(x, y, x^2 + y^2\right) = x + y + x^2 + y^2$$

Obdrželi jsme funkci u dvou proměnných x a y; určíme její stacionární body.

$$u'_x = 1 + 2x;\ u'_x = 0 \Leftrightarrow 1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$
$$u'_y = 1 + 2y;\ u'_y = 0 \Leftrightarrow 1 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$
$$z = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \in \langle 0, 1)$$

Získali jsme stacionární bod $A = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \in \alpha$

- Body vnitřku kruhu ve výšce 1 β:

  $x^2 + y^2 < 1 \wedge z = 1$

  Dosadíme vazbu z do funkce f.

  $v(x, y) = f(x, y, 1) = x + y + 1$

  Obdrželi jsme funkci v dvou proměnných x a y; určíme její stacionární body.

  $v'_x = 1 \neq 0$
  $v'_y = 1 \neq 0$

  Funkce v nemá žádný stacionární bod.

- Body kružnice $x^2 + y^2 = 1 \wedge z = 1$ γ.
  Z vazby vyjádříme např. $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{1 - x^2}$.
  Uvažujeme půlkružnici o rovnici $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$.
  Obě vazby dosadíme do funkce f.

  $$w(x) = f\left(x, \sqrt{1 - x^2}, 1\right) = x + \sqrt{1 - x^2} + 1$$

  Obdrželi jsme funkci w jedné proměnné x; určíme její stacionární bod.

  $$w'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
  $$w'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} = x\ /^2$$
  $$1 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \in (-1, 1)\,;\ y = \sqrt{1 - \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$
  $$= \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  Získali jsme 2 stacionární body:

  $B = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ a $C = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, oba body náleží γ

  Uvažujme půlkružnici $y = -\sqrt{1 - x^2},\ x \in (-1, 1)$.
  Obě vazby dosadíme do funkce f.

  $$r(x) = f\left(x, -\sqrt{1 - x^2}, 1\right) = x - \sqrt{1 - x^2} + 1$$

Obdrželi jsme funkci r jedné proměnné x; určíme její stacionární bod.

$$r'(x) = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$r'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = -x \; /^2$$
$$1 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \in (-1,1)\,;$$
$$y = -\sqrt{1 - \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Získali jsme 2 stacionární body:

$D = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ a $E = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, oba body náleží γ

(c) Dosud neuvažované body jsou body:

$F = [1,0,1]$ a $G = [-1,0,1]$.

(2) Celkem jsme našli 7 bodů, v nichž by mohl nastat globální extrém. Ve všech těchto bodech určíme funkční hodnoty.

$$f(A) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad f(E) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 1 - \sqrt{2}$$
$$f(B) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 1 + \sqrt{2} \qquad f(F) = 1 + 0 + 1 = 2$$
$$f(C) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 1 \qquad f(G) = -1 + 0 + 1 = 0$$
$$f(D) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 1$$

Funkce má globální maximum $1+\sqrt{2}$ v bodě $B = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ a globální minimum $-\frac{1}{2}$ v bodě $A = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Obou globálních extrémů nabývá funkce na hranici množiny M.

■

Příklad 11.45 *Nádrž na vodu tvaru kvádru má mít objem $V = 32\, m^3$. Určeme rozměry nádrže tak, aby se na vybetonování dna a stěn spotřebovalo co nejméně materiálu.*

Řešení

Označíme rozměry dna x a y a hloubku nádrže z. Plochu na vybetonování označíme P.

Potom $P = xy + 2xz + 2yz.$

Objem V nádrže je $V = xyz.$
P je funkcí tří proměnných: $P(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz.$
Rozměry nádrže splňují podmínku (vazbu) $xyz = 32$ a také $x > 0$, $y > 0$ a $z > 0.$

Hledáme tedy vázaný extrém funkce P, a to minimum.
Z vazby vyjádříme $z = \frac{32}{xy}$ a dosadíme do funkce P.

$$u(x,y) = P\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + 2x\frac{32}{xy} + 2y\frac{32}{xy} = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

Extrém může nastat jen ve stacionárním bodě.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2}; \ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow y - \frac{64}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{64}{x^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{64}{y^2} = 0$$

Z 1. rovnice vypočteme $y = \frac{64}{x^2}$ a dosadíme do 2. rovnice:

$$x - \frac{64}{\left(\frac{64}{x^2}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^4}{64} = 0 \Rightarrow x\left(1 - \frac{x^3}{64}\right) = 0$$

$x = 0$ nevyhovuje (x má být kladné)

$$1 - \frac{x^3}{64} = 0 \Leftrightarrow 64 - x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$$
$$y = \frac{64}{4^2} = 4$$

Obdrželi jsme 1 stacionární bod $A_1 = [4,4]$.
O existenci a typu extrému rozhodneme pomocí postačující podmínky, tj. pomocí determinantů D_1 a D_2. Určíme druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{128}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(4,4) = \frac{128}{4^3} = 2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{128}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(4,4) = \frac{128}{4^3} = 2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(4,4) = 1$$

$$D_1(A_1) = 2 > 0$$
$$D_2(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$D_1 > 0 \wedge D_2 > 0 \Rightarrow$ ostré lokální minimum
Vypočteme $z = \frac{32}{4 \cdot 4} = 2$.
V bodě $A = [4,4,2]$ má funkce P ostré lokální minimum, které je zároveň globálním minimem.

$$P(4,4,2) = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 48$$

Na vybetonování dna a stěn nádrže se spotřebuje nejméně materiálu, když rozměry nádrže budou $x = 4\,m$, $y = 4\,m$ a $z = 2\,m$.
Dno nádrže bude tedy čtverec o straně $4\,m$ a její hloubka je $2\,m$. Plocha P tedy bude $48\,m^2$.

■

Σ

Při určování definičního oboru vycházíme ze známých podmínek, např. výraz pod sudou odmocninou musí být nezáporný apod. Limity počítáme pomocí úprav předpisu funkce a užitím vzorců. Při výpočtu parciálních derivací podle jedné z proměnných, považujeme ostatní proměnné za konstanty. Užíváme známé vzorce a pravidla pro derivování. Pomocí totálního diferenciálu určujeme přibližnou hodnotu výrazu. Při vyhledávání lokálních extrémů nejprve vyhledáme body podezřelé z tohoto extrému a pak podle Sylvestrova kritéria rozhodneme o existenci a typu extrému. Při vyhledávání globálních extrémů vyhledáme body podezřelé z tohoto extrému uvnitř a na hranici dané množiny a určíme největší a nejmenší funkční hodnotu v podezřelých bodech.

?

1. *Určete definiční obor funkce f.*
   - $f(x,y,z) = \sqrt[3]{2x^2 - 5y^4 + z}$

     $\left[\ D(f) = R^3\ \right]$
   - $f(x,y,z) = \sqrt[4]{36 - x^2 - y^2 - z^2}$

     [$D(f) = \{[x,y,z] \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 \le 36\}$
     Všechny body koule se středem v počátku
     a poloměrem 6.]
   - $f(x,y,z) = yz\sqrt{x-1}$

     [$D(f) = \{[x,y,z] \in R^3; x \le 1\}$
     Poloprostor včetně hraniční roviny $x = 1$.]
   - $f(x,y,z) = \arcsin\frac{x}{2} + 3\arcsin\frac{y}{3} - \frac{1}{2}\arccos z$

     [$D(f)$ je kvádr se středem v počátku, ohraničený
     rovinami $x = \pm 2,\ y = \pm 3$ a $z = \pm 1$]
2. *Vypočtěte* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,-2,1)} \frac{\sin xy^2z^2}{xyz}$.

   $[-2]$
3. *Vypočtěte všechny první parciální derivace funkce* $f(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}\right)^x$.

   $\left[\ f'_x = \left(\frac{y}{z}\right)^x \ln\frac{y}{z};\ f'_y = \frac{x}{y}\left(\frac{y}{z}\right)^x;\ f'_z = -\frac{x}{z}\left(\frac{y}{z}\right)^x\ \right]$
4. *Vypočtěte hodnotu všech prvních parciálních derivací funkce*
   $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   v bodě $A = [0,1,2]$.

   $\left[\ f'_x(A) = 0,\ f'_y(A) = \frac{1}{\sqrt{5}},\ f'_z(A) = \frac{2}{\sqrt{5}}\ \right]$
5. *Vypočtěte všechny druhé parciální derivace funkce*
   $f(x,y,z) = x^3 - \frac{1}{4}x^4y + \frac{1}{2}z^2 + y^5 - yz + x^2z^2 - 8$.
   Porovnejte smíšené parciální derivace.

   $$\left[\begin{array}{l} f''_{xx} = 6x - 3x^2y + 2z^2;\ f''_{yy} = 20y^3;\ f''_{zz} = 1 + 2x^2 \\ f''_{xy} = -x^3 = f''_{yx};\ f''_{xz} = 4xz = f''_{zx};\ f''_{yz} = -1 = f''_{zy} \end{array}\right]$$

6. *Vypočtěte hodnotu totálního diferenciálu funkce* $f(x,y,z) = 2^x \sin y \operatorname{arctg} z$ *v bodě* $\left[-4, \frac{\pi}{2}, 0\right]$ *pro* $dx = 0{,}05$, $dy = -0{,}06$ *a* $dz = 0{,}08$.

$[0{,}005]$

7. *Najděte lokální extrémy funkce.*
   - $f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1$

     [o. l. minimum 1 v bodě $[0,0,0]$]
   - $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2x + 3y - 4z + 6$

     [o. l. minimum $-\frac{1}{3}$ v bodě $\left[\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 2\right]$]

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 12

Implicitní funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- vyšetřit, zda rovnicí $F(x, y) = 0$ je definována funkce $y = f(x)$;
- počítat derivace implicitní funkce,
- sestavit rovnici tečny a normály v daném bodě,
- zjistit, zda je funkce monotónní, konvexní nebo konkávní na okolí bodu,
- vyhledat lokální extrémy.

Klíčová slova:

Implicitní funkce.

Příklad 12.1 *Zjistíme, zda rovnice $y^2 - x = 0$ definuje na okolí bodu $[0,0]$ y jako funkci proměnné x.*

Řešení

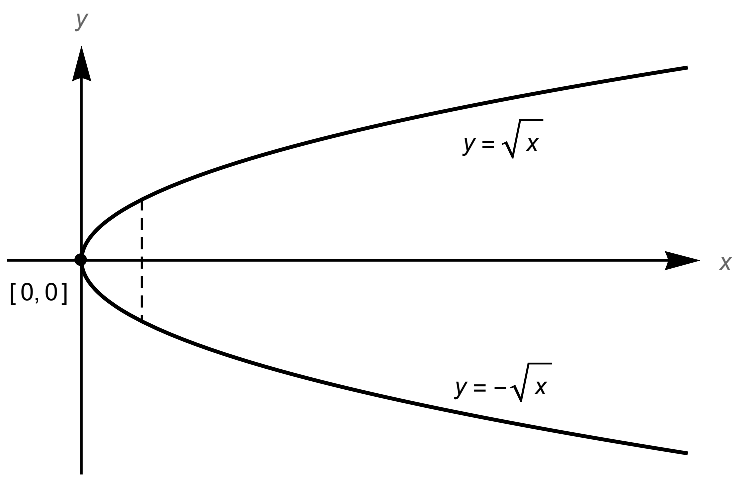
V našem případě je funkce $F[x,y] = y^2 - x$.
Ověříme, zda je splněn předpoklad věty o existenci implicitní funkce.
Musí být splněny 3 podmínky.

1) $F'_x = -1$
   $F'_y = 2y$
   Obě parciální derivace jsou spojité na R^2.

2) $F(0,0) = 0^2 - 0 = 0$

3) $F'_y(0,0) = 2 \cdot 0 = 0$
   Podle věty má být $F'_y(0,0) \neq 0$.
   Třetí předpoklad není splněn.

Závěr: Daná rovnice nedefinuje na žádném okolí bodu $[0,0]$ y jako funkci x.
Skutečně: V tomto případě umíme rovnici elementárně řešit vzhledem k y.
Platí: $y^2 - x = 0 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$ pro $x \geq 0$. Pro $x < 0$ neexistuje žádné řešení.
Z toho je vidět, že rovnice $y^2 - x = 0$ nedefinuje y jednoznačně, ale že definuje dvě funkce:
$f_1 : y = \sqrt{x}, x \geq 0$
$f_2 : y = -\sqrt{x}, x \geq 0.$



Obr. 12.1 Graf křivky $y^2 = x$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 12.2 *Nechť* $y = f(x)$ *je funkce implicitně definovaná rovnicí* $x^2 + y^2 - 4 = 0$ *na okolí bodu* $A = \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. *Najděme hodnoty* $f'\left(\sqrt{2}\right)$ *a* $f''\left(\sqrt{2}\right)$. *Najdeme explicitní vyjádření pro funkci* f *a sestrojíme její graf.*

Řešení

Nejdříve ověříme, že rovnicí $x^2 + y^2 - 4 = 0$ je na okolí bodu $A = \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ implicitně definována funkce y proměnné x. V našem případě je funkce $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.
Ověříme, zda je splněn předpoklad věty o existenci implicitní funkce.
Musí být splněny 3 podmínky.

1) $F'_x = 2x$
$F'_y = 2y$
Obě parciální derivace jsou spojité na R^2.

2) $F\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

3) $F'_y\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} \neq 0$

Všechny 3 podmínky jsou splněny, je tedy na určitém okolí bodu $A = \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ korektně definována funkce y proměnné x.
První derivaci funkce y vypočteme podle vzorce.
Připomínáme: $y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$; stručně $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$; $F'_y \neq 0$
$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y};\ y \neq 0$
Potom $y'(A) = y'\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$
Vzorce pro derivace vyšších řádů funkce určené implicitně jsou složité, proto vyšší derivace zpravidla počítáme postupným derivováním. Nesmíme však zapomenout, že y je funkcí x.
Tedy $y' = -\frac{x}{y}$ derivujeme podle x, ale y není považováno za konstantu jako při výpočtu parciální derivace, nýbrž je funkcí x, kterou explicitně neznáme, proto derivace y bude jen naznačena čárkou, tj. y'.

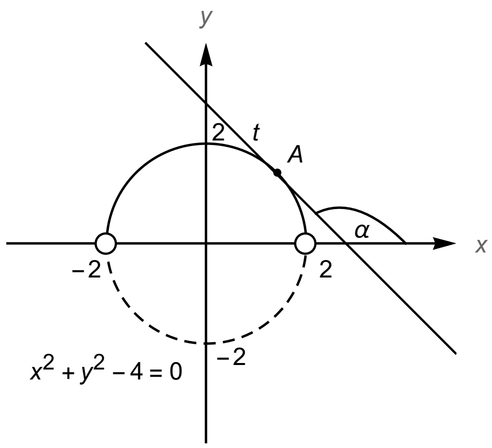
$$y'' = \frac{-1 \cdot y + x \cdot y'}{y^2} = \frac{-y + x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}, y \neq 0$$
$$y''(A) = y''\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Výsledek: $f'\left(\sqrt{2}\right) = y'(A) = -1;\ f''\left(\sqrt{2}\right) = y''(A) = -\sqrt{2}$.

Poznámka.
Z rovnice $x^2 + y^2 - 4 = 0$ lze vypočítat explicitní vyjádření funkce f.

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{4 - x^2}$$

Naše funkce $f : y = \sqrt{4 - x^2}$, protože $A \in G(f)$, $x \in (-2, 2)$
Křivka daná rovnicí $x^2 + y^2 - 4 = 0$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem 2.
Grafem funkce f je horní půlkružnice, poněvadž na ní leží bod $A = \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.



Obr. 12.2 Graf funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

tg $\alpha = y'(A) = -1 \Rightarrow \alpha = 135°$
-1 je směrnice tečny v bodě A
Všimněte si, že na okolích bodů $[-2, 0]$ a $[2, 0]$ neexistují funkce proměnné x implicitně definované rovnicí $x^2 + y^2 - 4 = 0$.
Snadno si můžeme derivováním funkce f ověřit správnost výsledků.

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}};\ f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{4 - \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2} = \frac{-4 + x^2 - x^2}{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^3} = \frac{-4}{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^3}$$

$$f''\left(\sqrt{2}\right) = \frac{-4}{\left(\sqrt{4 - \left(\sqrt{2}\right)^2}\right)^3} = \frac{-4}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = -\sqrt{2}$$

Poznámka.
Takový přímý výpočet derivace však není vždy možný, protože z rovnice $F(x, y) = 0$ nelze vždy explicitně vyjádřit y v závislosti na x, tj. ve tvaru $y = f(x)$.

■

Příklad 12.3 *Vypočtěme y' a y'' funkce y, která je daná implicitně rovnicí $y - \operatorname{arctg} y = x$.*

Řešení

Funkce $F(x, y) = y - \operatorname{arctg} y - x$.
Vypočteme y' :

a) Podle vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

$$F'_x = -1;\ F'_y = 1 - \frac{1}{1+y^2} = \frac{1+y^2-1}{1+y^2} = \frac{y^2}{1+y^2}$$
$$y' = -\frac{-1}{\frac{y^2}{1+y^2}} = \frac{1+y^2}{y^2};\ y \neq 0$$

b) Derivováním rovnice podle x.

$y - \operatorname{arctg} y - x = 0$ / derivujeme podle x, y je funkcí x
$$y' - \frac{y'}{1+y^2} - 1 = 0 \,/ \cdot \left(1+y^2\right)$$
$$y'\left(1+y^2\right) - y' - 1 - y^2 = 0$$
$$y'\left(1+y^2-1\right) = 1+y^2$$
$$y'y^2 = 1+y^2$$
$$y' = \frac{1+y^2}{y^2}; y \neq 0$$

Druhou derivaci y'' vypočteme:

a) Derivováním y' podle x, y je funkcí x.

$$y'' = \frac{2y \cdot y' \cdot y^2 - (1+y^2)\, 2y \cdot y'}{y^4} = \frac{2y'\,(y^2-1-y^2)}{y^3} = -\frac{2y'}{y^3}$$

Dosadíme $y' = \frac{1+y^2}{y^2}$:

$$y'' = \frac{-2 \cdot \frac{1+y^2}{y^2}}{y^3} = \frac{-2\,(1+y^2)}{y^5}; y \neq 0$$

b) Derivováním rovnice.

$y'y^2 = 1+y^2$ / derivujeme podle x, y je funkcí x
$$y'' \cdot y^2 + y' \cdot 2y \cdot y' = 2y \cdot y'$$
$$y'' = \frac{2yy'\,(1-y')}{y^2}$$
$$y'' = \frac{2y'\,(1-y')}{y}$$

Dosadíme $y' = \frac{1+y^2}{y^2}$:

$$y'' = \frac{2\frac{1+y^2}{y^2}\left(1 - \frac{1+y^2}{y^2}\right)}{y} = \frac{2\frac{1+y^2}{y^2} \cdot \frac{y^2-1-y^2}{y^2}}{y} = \frac{-2\,(1+y^2)}{y^5}; y \neq 0$$

Výsledek: $y' = \frac{1+y^2}{y^2}$, $y \neq 0$; $y'' = \frac{-2\left(1+y^2\right)}{y^5}$, $y \neq 0$.

■

Příklad 12.4 *Rozhodněme, zda rovnice $x^2+2xy-y^4-4=0$ definuje implicitně funkci $y=f(x)$ na okolí bodu $A=[2,0]$. Pokud ano, určíme $y'(A)$ a $y''(A)$.*

Řešení

Ověříme předpoklad věty o implicitní funkci. $F(x,y) = x^2+2xy-y^2-4$

a) $F'_x = 2x+2y$
$F'_y = 2x-2y$
Obě parciální derivace jsou spojité na R^2.

b) $F(A) = F(2,0) = 2^2+2\cdot 2\cdot 0-0-4=0$

c) $F'_y(A) = F'_y(2,0) = 2\cdot 2-2\cdot 0 = 4 \neq 0$

Všechny 3 podmínky jsou splněny, daná rovnice definuje na okolí bodu A funkci $y=f(x)$. Výpočet derivace funkce y provedeme dvěma způsoby.

a) Zderivujeme rovnici podle x, ale y není považováno za konstantu jako při výpočtu parciální derivace, nýbrž je funkcí x, kterou explicitně neznáme, proto derivace y bude jen naznačena čárkou, tj. y'.

$$\begin{aligned} x^2+2xy-y^2-4&=0\\ 2x+2\cdot y+2x\cdot y'-2\cdot y\cdot y'&=0\;/:2\\ x+y+xy'-yy'&=0\\ y'(x-y)&=-x-y\\ y'&=\frac{x+y}{y-x};\ y\neq x \end{aligned}$$

b) Podle vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$

$$y' = -\frac{2x+2y}{2x-2y} = \frac{x+y}{y-x}; y \neq x$$

Dosazením souřadnic bodu A, tj. $x=2$ a $y=0$, do vztahu pro y' získáme $y'(A)$.

$$y'(A) = y'(2,0) = \frac{2+0}{0-2} = -1$$

Pro výpočet y'' existuje vzorec, ale pohodlněji ji vypočítáme derivací y' podle x, y opět derivujeme jako funkci x.

$y' = \dfrac{x+y}{y-x}$ derivujeme podle x, y je funkcí x

$$y'' = \frac{(1+y')(y-x)-(x+y)(y'-1)}{(y-x)^2} = \frac{y+yy'-x-xy'-xy'-yy'+x+y}{(y-x)^2} =$$

$$= \frac{2y-2xy'}{(y-x)^2} = 2\frac{y-xy'}{(y-x)^2};\ y\neq x$$

Dosazením souřadnic bodu A, tj. $x = 2$, $y = 0$ a $y'(A) = -1$, obdržíme

$$y''(A) = y''(2,0) = 2\frac{0 - 2\cdot(-1)}{(0-2)^2} = \frac{4}{4} = 1.$$

Můžeme postupovat také takto - do y'' dosadíme y':

$$y'' = 2\frac{y - x\frac{x+y}{y-x}}{(y-x)^2} = 2\frac{\frac{y^2-xy-x^2-xy}{y-x}}{(y-x)^2} = \frac{2(y^2 - 2xy - x^2)}{(y-x)^3};\ y \neq x$$

Dosazením souřadnic bodu A, tj. $x = 2$ a $y = 0$ obdržíme

$$y''(A) = y''(2,0) = \frac{2(0 - 2\cdot 2\cdot 0 - 2^2)}{(0-2)^3} = \frac{-8}{-8} = 1$$

Hledané hodnoty jsou: $y'(A) = -1$ a $y''(A) = 1$.

■

Příklad 12.5 *Určíme y' a y'' funkce y, která je dána implicitně rovnicí $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.*

Řešení

Funkce $F(x,y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$.
Vypočteme y' podle vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

$$F'_x = y - \frac{ye^{xy} - ye^{xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{ye^{xy} + ye^{-xy} - ye^{xy} + ye^{xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$$
$$F'_y = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{xe^{xy} + xe^{-xy} - xe^{xy} + xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$$
$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}{\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}} = -\frac{y}{x};\ x \neq 0$$

Druhou derivaci y'' vypočteme derivováním $y' = -\frac{y}{x}$ podle x, y je funkcí x.

$$y'' = -\frac{y'x - y\cdot 1}{x^2}$$

Dosadíme $y' = -\frac{y}{x}$.

$$y'' = -\frac{\left(-\frac{y}{x}\right)\cdot x - y}{x^2} = -\frac{-2y}{x^2} = \frac{y}{x^2};\ x \neq 0$$

Výsledek: $y' = -\frac{y}{x}$, $y'' = \frac{y}{x^2}$; $x \neq 0$.

■

Příklad 12.6 *Funkce y proměnné x je daná rovnicí $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. Najděme hodnotu její první a druhé derivace v bodě $[1, 1]$.*

Řešení

Funkce $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.
Vypočteme $F'_x = 2x + y$, $F'_y = x + 2y$;

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x + y}{x + 2y},\ x \neq -2y$$
$$y'(1, 1) = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2 \cdot 1} = -1$$

Výpočet y'' provedeme tak, že zderivujeme y'.

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y} \ \text{/ zderivujeme podle } x,\ y \text{ je funkcí } x$$
$$y'' = -\frac{(2 + y')(x + 2y) - (2x + y)(1 + 2y')}{(x + 2y)^2} =$$
$$= -\frac{2x + xy' + 4y + 2yy' - 2x - y - 4xy' - 2yy'}{(x + 2y)^2} =$$
$$= -\frac{3y - 3xy'}{(x + 2y)^2};\ x \neq -2y$$

Dosazením $x = 1$, $y = 1$ a $y' = -1$ získáme

$$y''(1, 1) = -\frac{3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot (-1)}{(1 + 2 \cdot 1)^2} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

Poznámka.
Výpočet y'' můžeme provést i takto:
Úpravou vztahu $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$ dostaneme

$$y'(x + 2y) = (2x + y)$$
$$(2x + y) + (x + 2y)\, y' = 0$$

Tuto rovnici zderivujeme podle x, y je funkcí x.

$$2 + y' + (1 + 2y')\, y' + (x + 2y)\, y'' = 0$$

Dosazením $x = 1$, $y = 1$ a $y' = -1$ získáme $y''(1, 1)$.

$$\begin{aligned} 2 + (-1) + (1 - 2 \cdot 1) \cdot (-1) + (1 + 2 \cdot 1)\, y'' &= 0 \\ 1 + 1 + 3y'' &= 0 \\ y'' &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Hledané hodnoty jsou: $y'(1, 1) = -1$, $y''(1, 1) = -\frac{2}{3}$.

■

Příklad 12.7 *Určeme y' a y'' pro funkci y danou implicitně rovnicí $x = \ln y + y^2$ a jejich hodnoty v bodě $A = [1, 1]$.*

Řešení

Funkce $F(x, y) = x - \ln y - y^2$.

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1}{-\frac{1}{y} - 2y} = \frac{y}{1 + 2y^2};\ 1 + 2y^2 \neq 0 \text{ vždy splněno}$$

$$y'(A) = \frac{1}{1 + 2 \cdot 1^2} = \frac{1}{3}$$

Derivováním $y' = \frac{y}{1+2y^2}$ obdržíme y''.

$$y'' = \frac{y'(1 + 2y^2) - y \cdot 4yy'}{(1 + 2y^2)^2} = \frac{y' + 2y'y^2 - 4y^2y'}{(1 + 2y^2)^2} = \frac{y'(1 - 2y^2)}{(1 + 2y^2)^2}$$

Dosazením $y' = \frac{y}{1+2y^2}$ obdržíme

$$y'' = \frac{\frac{y}{1+2y^2}(1 - 2y^2)}{(1 + 2y^2)^2} = \frac{y(1 - 2y^2)}{(1 + 2y^2)^3}$$

Dosadíme souřadnice bodu A, tj. $x = 1$, $y = 1$.

$$y''(A) = \frac{1 \cdot (1 - 2 \cdot 1^2)}{(1 + 2 \cdot 1^2)^3} = \frac{-1}{27}$$

Hodnotu $y''(A)$ můžeme vypočítat také úpravou y' na rovnici, rovnici zderivujeme podle x, y je funkcí x.

$$y' = \frac{y}{1 + 2y^2} \Leftrightarrow y'\left(1 + 2y^2\right) - y = 0 \ / \text{ zderivujeme}$$

$$y''\left(1 + 2y^2\right) + y' \cdot 4y \cdot y' - y' = 0$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 1$, $y'(A) = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} y''\left(1 + 2 \cdot 1^2\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{3} &= 0 \\ 3y'' + \frac{4}{9} - \frac{1}{3} &= 0 \\ 3y'' + \frac{1}{9} &= 0 \\ y'' &= -\frac{1}{27} \end{aligned}$$

Určili jsme: $y'(A) = \frac{1}{3}$, $y''(A) = -\frac{1}{27}$.

■

Příklad 12.8 *Vypočtěme* $y'(1)$ *a* $y''(1)$ *funkce* y*, která je dána implicitně rovnicí* $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$

Řešení

Budeme potřebovat i y-ovou souřadnici bodu jehož x-ová souřadnice je $x = 1$. Získáme ji dosazením $x = 1$ do dané rovnice.

$$\begin{aligned} 1^2 - 2 \cdot 1y + y^2 + 1 + y - 2 &= 0 \\ y^2 - y &= 0 \\ y(y-1) &= 0 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = 1 \end{aligned}$$

Existují 2 body na křivce $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$, jejichž souřadnice $x = 1$. Jsou to body $A = [1, 0]$ a $B = [1, 1]$.
Vypočteme $y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}$; $-2x + 2y + 1 \neq 0$

$$y'(1) = y'(A) = -\frac{2 \cdot 1 - 0 + 1}{-2 \cdot 1 + 0 + 1} = -\frac{3}{-1} = 3$$
$$y'(1) = y'(B) = -\frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1}{-2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1} = -\frac{1}{1} = -1$$

Pro snadnější výpočet hodnot $y''(A)$ a $y''(B)$ upravíme y' na rovnici, kterou budeme derivovat.

$$y' = -\frac{2x - 2y + 1}{-2x + 2y + 1}$$
$y'(-2x + 2y + 1) + 2x - 2y + 1 = 0$ / derivujeme podle x, y je funkcí x
$$y''(-2x + 2y + 1) + y'(-2 + 2y') + 2 - 2y' = 0$$

Dosadíme souřadnice bodu A a $y'(A)$.

$$\begin{aligned} y''(-2 \cdot 1 + 0 + 1) + 3(-2 + 2 \cdot 3) + 2 - 2 \cdot 3 &= 0 \\ -y'' + 8 &= 0 \Rightarrow y'' = 8 \end{aligned}$$

Dosadíme souřadnice bodu B a $y'(B)$.

$$\begin{aligned} y''(-2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1) + (-1)[-2 + 2 \cdot (-1)] + 2 - 2 \cdot (-1) &= 0 \\ y'' + 8 &= 0 \Rightarrow y'' = -8 \end{aligned}$$

Hledané hodnoty jsou: $y'(A) = 3, y''(A) = 8$
$y'(B) = -1, y''(B) = -8$

■

Příklad 12.9 *Přesvědčíme se o tom, že pro funkci y, určenou implicitně rovnicí $xy - \ln y = 1$ platí*
$y^2 + (xy-1)\frac{dy}{dx} = 0$.

Řešení

Funkce $F(x,y) = xy - \ln y - 1$.
Vypočteme první parciální derivace funkce F.

$$F'_x = y$$
$$F'_y = x - \frac{1}{y}; y \neq 0$$

Potom $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y}{x-\frac{1}{y}} = -\frac{y^2}{xy-1}; xy \neq 1$.
Dosadíme do dané diferenciální rovnice.

$$\begin{aligned} y^2 + (xy-1)\frac{-y^2}{xy-1} &= 0 \\ y^2 - y^2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

■

Příklad 12.10 *Napišme rovnici tečny t a normály n grafu funkce f dané implicitně funkcí $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$ a bodem $A = [1,1]$ v bodě A.*

Řešení

Vypočteme 1. derivaci podle vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

$$F'_x = 2x - 2y + 1; F'_y = -2x + 2y + 1$$
$$y' = -\frac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}$$
$$y'(1,1) = -\frac{2\cdot 1 - 2\cdot 1 + 1}{-2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1} = -\frac{1}{1} = -1$$

Dosadíme do rovnice tečny a normály.

$$y = f(x), x_0 = 1, f(x_0) = 1, f'(x_0) = -1$$

$$\begin{aligned} t: y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - 1 &= -1(x-1) \\ y &= -x + 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n: y - f(x_0) &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \\ y - 1 &= -\frac{1}{-1}(x-1) \\ y &= x \end{aligned}$$

■

Příklad 12.11 *Napišme rovnici tečny t a normály n ke křivce dané rovnicí $2x^2 - xy + y^2 - 3x + 2y = 0$ v bodě $T = [0, y < 0]$.*

Řešení

Vypočteme y-ovou souřadnici bodu T tak, že dosadíme $x = 0$ do rovnice křivky.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0^2 - 0 \cdot y + y^2 - 3 \cdot 0 + 2y &= 0 \\ y^2 + 2y &= 0 \\ y\,(y+2) &= 0 \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 0 \text{ nevyhovuje} \\ y_2 = -2 \end{array} \end{aligned}$$

Bod $T = [0, -2]$.
Vypočteme $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$; $F\,(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - 3x + 2y$.

$$F'_x = 4x - y - 3; \; F'_y = -x + 2y + 2$$

$$y' = -\frac{4x - y - 3}{-x + 2y + 2}; \; y'\,(0, -2) = -\frac{4 \cdot 0 - (-2) - 3}{0 + 2 \cdot (-2) + 2} = -\frac{-1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} t: y - (-2) &= -\frac{1}{2}\,(x - 0) \\ y &= -\frac{1}{2}x - 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} n: y - (-2) &= \frac{-1}{-\frac{1}{2}}\,(x - 0) \\ y + 2 &= 2x \\ y &= 2x - 2 \end{aligned}$$

■

Příklad 12.12 *Ve kterém bodě křivky $x^2 + 2y^2 - 4x + 8y = 36$ jsou tečny rovnoběžné s přímkou $p: x - 2y = 0$. Napišme rovnice těchto tečen.*

Řešení

Rovnici přímky p uvedeme na směrnicový tvar: $y = \frac{1}{2}x$.
Určíme směrnici k_p přímky p: $k_p = \frac{1}{2}$.
Funkce $F\,(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 36$.
Vypočteme $y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x-4}{4y+8} = -\frac{x-2}{2y+4} = \frac{2-x}{2y+4}$; $y \neq -2$.
Tečny mají být rovnoběžné s přímkou p, tzn., že směrnice k_p přímky p se musí rovnat směrnici k_t tečny, tj. $k_p = k_t$.

$$k_t = y' = \frac{2 - x}{2y + 4}$$

Potom $k_t = k_p \Leftrightarrow \dfrac{2 - x}{2y + 4} = \dfrac{1}{2}$.

Získali jsme jednu podmínku pro dotykový bod T tečny. (1)
Bod T je bodem dané křivky - to je druhá podmínka pro bod T. (2)
Souřadnice bodu T získáme řešením soustavy rovnic:

(1) $\dfrac{2 - x}{2y + 4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - x = \dfrac{1}{2}\,(2y + 4) \Rightarrow 2 - x = y + 2 \Rightarrow y = -x \cdots$ dosadíme do (2)
(2) $x^2 + 2y^2 - 4x + 8y = 36$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2(-x)^2 - 4x + 8 \cdot (-x) &= 36 \\
3x^2 - 12x - 36 &= 0 \; / : 3 \\
x^2 - 4 - 12 &= 0 \\
(x-6)(x+2) &= 0 \qquad & x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = 2 \\
x_1 = -2, x_2 &= 6 \qquad & x_2 = 6 \Rightarrow y_2 = -6
\end{aligned}
$$

Získali jsme 2 dotykové body: $T_1 = [-2, 2]$ a $T_2 = [6, -6]$.
Rovnice příslušných tečen jsou:

Pro bod $T_1 = [-2, 2]$:

$$
\begin{aligned}
t_1 : y - 2 &= \frac{1}{2}(x+2) \\
y &= \frac{1}{2}x + 1 + 2 \\
y &= \frac{1}{2}x + 3
\end{aligned}
$$

Pro bod $T_2 = [6, -6]$:

$$
\begin{aligned}
t_2 : y + 6 &= \frac{1}{2}(x-6) \\
y &= \frac{1}{2}x - 3 - 6 \\
y &= \frac{1}{2}x - 9
\end{aligned}
$$

Poznámka.
Směrnice tečen je $\frac{1}{2}$, protože $t_1 \parallel t_2 \parallel p$.
Dosadíme-li souřadnice bodů T_1 a T_2 do $k_t = y' = \frac{2-x}{2y+4}$, pak samozřejmě obdržíme také $\frac{1}{2}$.
Přesvědčíme se:

$$
k_{t_1} = \frac{2-(-2)}{2 \cdot 2 + 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \; k_{t_2} = \frac{2-6}{2 \cdot (-6) + 4} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}
$$

■

Příklad 12.13 *Rozhodněme, zda křivka daná rovnicí $x^2 + y^2 - xy - 7 = 0$ je na okolích bodů $A = [1, -2]$, $B = [1, 3]$ a $C = [3, 2]$ rostoucí nebo klesající.*

Řešení

Rozhodneme podle hodnoty první derivace funkce $y = f(x)$ určené danou rovnicí, v bodě A, B a C.
Určíme $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

$$
\begin{aligned}
y' &= -\frac{2x - y}{2y - x} = \frac{2x - y}{x - 2y}, x \neq 2y \\
y'(A) &= \frac{2 \cdot 1 - (-2)}{1 - 2 \cdot (-2)} = \frac{4}{5} > 0 \Rightarrow \text{ rostoucí} \\
y'(B) &= \frac{2 \cdot 1 - 3}{1 - 2 \cdot 3} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow \text{ rostoucí} \\
y'(C) &= \frac{2 \cdot 3 - 2}{3 - 2 \cdot 2} = \frac{4}{-1} = -1 < 0 \Rightarrow \text{ klesající}
\end{aligned}
$$

Funkce je na okolích bodů A a B rostoucí a na okolí bodu C klesající.

■

Příklad 12.14 *Rozhodněme, zda křivka daná rovnicí* $3x^2 - 2xy + y^2 - 5x - 6y - 5 = 0$ *je na okolí bodu* $A = [-1, 3]$ *konvexní nebo konkávní.*

Řešení

Rozhodneme podle hodnoty druhé derivace funkce $y = f(x)$ určené danou rovnicí, v bodě A. Zderivujeme rovnici podle x, y je funkcí x.

$$
\begin{aligned}
6x - 2y - 2xy' + 2yy' - 5 - 6y' = 0& \\
y'(-2x + 2y - 6) &= 5 - 6x + 2y \qquad (*) \\
y' &= \frac{5 - 6x + 2y}{2y - 2x - 6} \\
y'(A) &= \frac{5 - 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) - 6} = \frac{17}{2}
\end{aligned}
$$

Vypočteme y'' derivováním rovnice $(*)$.

$$y''(-2x + 2y - 6) + y'(-2 + 2y') = -6 + 2y'$$

Dosadíme $x = -1$, $y = 3$ a $y'(A) = \frac{17}{2}$.

$$
\begin{aligned}
y''[-2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 - 6] + \frac{17}{2}\left(-2 + 2 \cdot \frac{17}{2}\right) = -6 + 2 \cdot \frac{17}{2}& \\
2y'' + \frac{17}{2} \cdot 15 &= 11 \\
2y'' &= 11 - \frac{17 \cdot 15}{2} \\
y'' &= \frac{22 - 255}{4} \\
y'' &= \frac{-233}{4}
\end{aligned}
$$

$$y''(A) = -\frac{233}{4} < 0 \Rightarrow \text{ konkávní}$$

Křivka je v okolí bodu A konkávní.

■

Příklad 12.15 *Rozhodněme, zda funkce* $x = g(y)$ *definovaná implicitně rovnicí* $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ *a podmínkou* $g(1) = 1$ *je v bodě 1 konvexní nebo konkávní.*

Řešení

Pozor! $x = g(y)$, x je závisle proměnná, y nezávisle proměnná, x je funkcí y.
Zderivujeme danou rovnici podle y, x je funkcí y.

$$2xx' + 2x + 2yx' + 2y + 2x' - 4 = 0 \;/ : 2$$
$$x'(x + y + 1) = 2 - y - x \quad (*)$$
$$x' = \frac{2 - y - x}{x + y + 1};\; x + y + 1 \neq 0$$

Poznámka.
Podmínka $g(1) = 1$ informuje, že bod $A = [1, 1]$ je bodem funkce $x = g(y)$.
Určíme $x'(A) = \frac{2-1-1}{1+1+1} = 0$
Vypočítáme x'' derivováním $(*)$:

$$x''(x + y + 1) + x'(x' + 1) = -1 - x'$$

Dosadíme souřadnice $x = 1$, $y = 1$ bodu A a hodnotu $x'(A) = 0$.

$$x''(1 + 1 + 1) + 0 = -1 - 0$$
$$3x'' = -1$$
$$x'' = -\frac{1}{3}$$

$$x''(A) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \text{ konkávní}$$

Funkce je v bodě 1 konkávní.
Poznámka.
Jistě jste si uvědomili další skutečnost - funkce má v bodě 1 ostré lokální maximum, protože $x'(A) = 0$ a $x''(A) = -\frac{1}{3} < 0$.

■

Příklad 12.16 *Najděme lokální extrémy funkce* $y = f(x)$ *definované implicitně rovnicí* $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$.

Řešení

Vypočteme y' derivováním rovnice $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ podle x, y je funkcí x.

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3 \cdot y - 3x \cdot y' = 0 \;/ : 3$$
$$y'\left(y^2 - x\right) = y - x^2 \quad (*)$$
$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x};\; x \neq y^2$$

Vyhledáme body podezřelé z lokálního extrému.

Nutná podmínka pro extrém: $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y - x^2}{y^2 - x} = 0 \Rightarrow y - x^2 = 0 \Rightarrow y = x^2$

Získali jsme jeden vztah platící pro souřadnice stacionárních bodů. Stacionární body leží na křivce $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$, proto jejich souřadnice musí vyhovovat rovnici křivky - to je druhý vztah pro jejich souřadnice. Souřadnice x a y stacionárních bodů získáme tedy řešením soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ll} (1) & y = x^2 \\ (2) & x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0 \end{array}$$

Dosadíme (1) do (2):

$$\begin{aligned} x^3 + \left(x^2\right)^3 - 3x \cdot x^2 - 3 &= 0 \\ x^6 - 2x^3 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Zavedeme substituci $x^3 = z$.

$$z^2 - 2z - 3 = 0$$

Levou stranu rovnice rozložíme.

$$\begin{aligned} (z-3)(z+1) &= 0 \\ \left(x^3 - 3\right)\left(x^3 + 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} x^3 - 3 = 0 \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3} & y = \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = \sqrt[3]{9} \\ x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1 & y = (-1)^2 = 1 \end{array}$$

Získali jsme 2 stacionární body:

$A = \left[\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}\right]$ a $B = [-1, 1]$.

Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu extrému.
Vypočteme y'' tak, že zderivujeme rovnici $(*)$.

$y'\left(y^2 - x\right) = y - x^2$ / derivujeme podle x, y je funkcí x

$$y''\left(y^2 - x\right) + y'(2yy' - 1) = y' - 2x \quad (\triangle)$$

Dosadíme souřadnice x a y stacionárních bodů A a B a hodnoty první derivace v těchto bodech, tj. $y'(A) = 0$ a $y'(B) = 0$ do rovnice $(\triangle)$.

Bod $A = \left[\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}\right]$: $y''\left(\sqrt[3]{9^2} - \sqrt[3]{3}\right) + 0 = 0 - 2\sqrt[3]{3}$

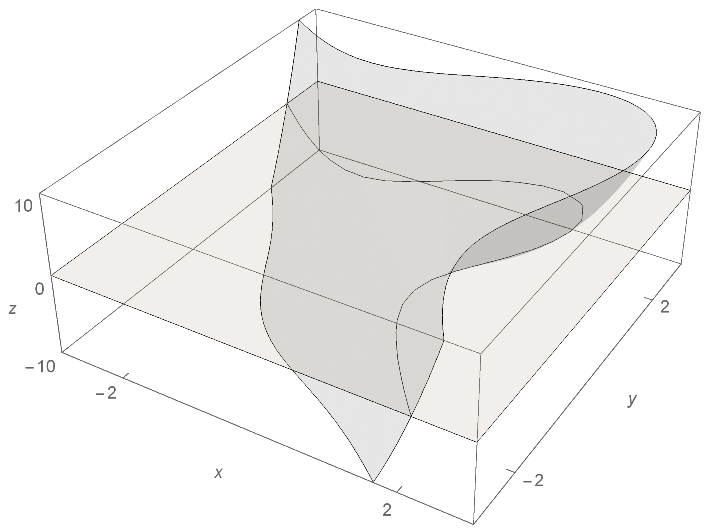
$y'' = \frac{-2\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3}} = -1 < 0 \Rightarrow$ ostré lokální maximum

Bod $B = [-1, 1]$: $y''\left[1^2 - (-1)\right] + 0 = 0 - 2(-1)$

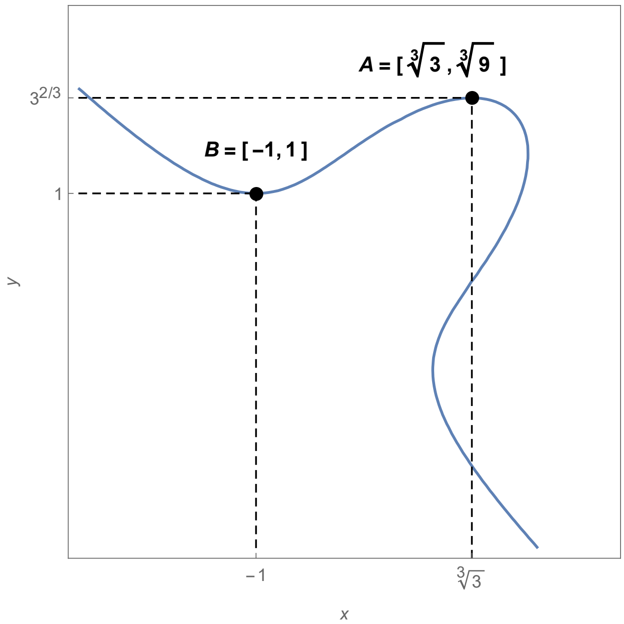
$2y'' = 2$

$y'' = 1 > 0 \Rightarrow$ ostré lokální minimum

Funkce má ostré lokální maximum $\sqrt[3]{9}$ v bodě $\sqrt[3]{3}$ a ostré lokální minimum 1 v bodě -1.



Obr. 12.3 Graf funkce
$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3$ a roviny $z = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování



Obr. 12.4 Nulová vrstevnice funkce
$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 12.17 *Najděme lokální extrémy funkce $y = f(x)$ definované implicitně rovnicí $x^2y^3 + y - 3 = 0$.*

Řešení

Pro derivaci funkce y obdržíme rovnici:

$$2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' + y' = 0$$
$$(*) \quad y'\left(3x^2y^2 + 1\right) = -2xy^3$$
$$y' = \frac{-2xy^3}{3x^2y^2 + 1};\ 3x^2y^2 \neq -1$$

Vyhledáme body podezřelé z lokálního extrému.

Nutná podmínka pro extrém: $y' = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2xy^3}{3x^2y^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$

Získané hodnoty dosadíme do implicitní rovnice funkce.

$x = 0 : 0 \cdot y^3 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$
$y = 0 : x^2 \cdot 0 + 0 - 3 = 0$ neplatí

Získali jsme 1 stacionární bod $A = [0, 3]$.
Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu extrému.
Derivujeme rovnici $(*)$:

$$y''\left(3x^2y^2 + 1\right) + y'\left(6xy^2 + 6x^2yy'\right) = -2y^3 - 6xy^2y'$$

Dosadíme $x = 0$, $y = 3$ a $y'(A) = 0$ a dostaneme

$$y''\left(3 \cdot 0 \cdot 3^2 + 1\right) + 0 = -2 \cdot 3^3 - 0$$
$$y'' = -54 < 0 \Rightarrow \text{ostré lokální maximum}$$

Funkce má ostré lokální maximum 3 v bodě 0.

■

Příklad 12.18 *Najděme lokální extrémy funkce $y = f(x)$ definované implicitně rovnicí* arctg $y + x - y = 0$.

Řešení

Vypočteme

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{-1}{\frac{1}{1+y^2} - 1} = \frac{-1}{\frac{1-1-y^2}{1+y^2}} = \frac{-1}{\frac{-y^2}{1+y^2}} = \frac{1+y^2}{y^2},\ y \neq 0$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = -1$$

Rovnice nemá řešení v R.
Funkce nemá žádný extrém, protože v žádném bodě není $y' = 0$.
Vždy je $y' > 0$ v každém bodě x, což znamená, že je funkce stále rostoucí, tedy ryze monotónní.

■

Příklad 12.19 *Najděme lokální extrémy funkcí* $y = f(x)$ *definovaných implicitně rovnicí* $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 4 = 0 \quad (\square)$.

Řešení

Vypočteme 1. derivaci derivováním dané rovnice.

$$\begin{aligned} 2x - 2yy' + 2 + 6y' &= 0 \;/ : 2 \\ y'(3-y) &= -x-1 \quad (*) \\ y' &= \frac{x+1}{y-3};\ y \neq 3 \end{aligned}$$

Vyhledáme body podezřelé z lokálního extrému.

Nutná podmínka pro extrém: $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{y-3} = 0 \Rightarrow x = -1$

Souřadnice x a y stacionárního bodu jsou řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} &(1) \quad x = -1 \\ &(2) \quad x^2 - y^2 + 2x + 6y - 4 = 0 \end{aligned}$$

Dosadíme $x = -1$ do rovnice (2):

$$\begin{aligned} (-1)^2 - y^2 + 2\cdot(-1) + 6y - 4 &= 0 \\ -y^2 + 6y - 5 &= 0 \\ y^2 - 6y + 5 &= 0 \\ (y-1)(y-5) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \\ &y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \end{aligned}$$

Získali jsme 2 stacionární body: $A = [-1, 1]$ a $B = [-1, 5]$.
Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu extrému.
Derivací rovnice $(*)$ obdržíme y''.

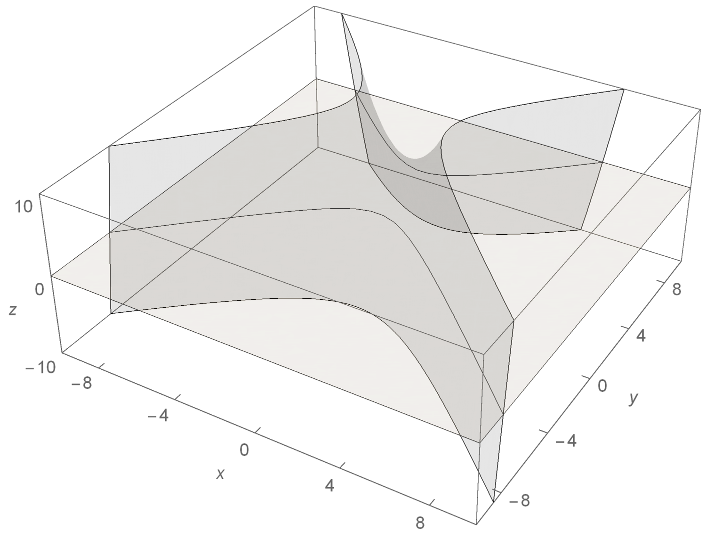
$$y''(3-y) + y' \cdot (-1) \cdot y' = -1$$

Dosadíme souřadnice bodů A a B a hodnoty y' v těchto bodech.

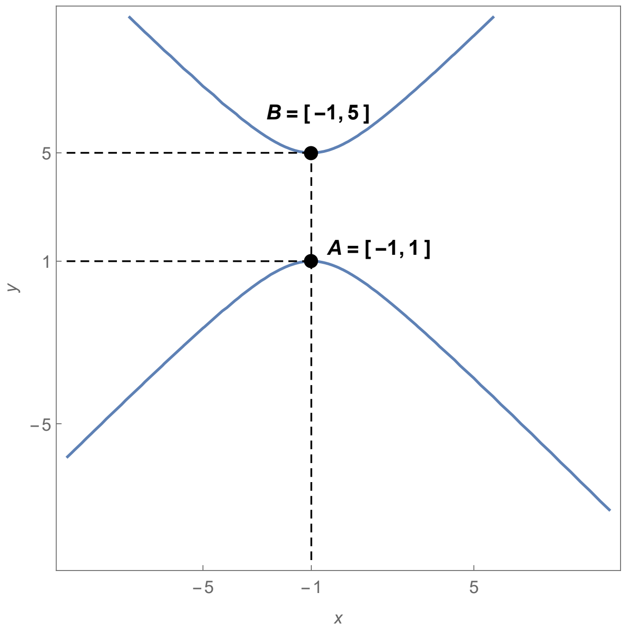
Bod $A = [-1, 1] : y''(3-1) + 0 = -1$
$y'' = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ ostré lokální maximum

Bod $B = [-1, 5] : y''(3-5) + 0 = -1$
$y'' = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ ostré lokální minimum

Zřejmě jde o 2 funkce definované implicitně rovnicí $(\square)$.
Funkce $y = f_1(x)$ definovaná rovnicí $(\square)$ a podmínkou $f_1(-1) = 1$ má v bodě -1 má ostré lokální maximum 1.
Funkce $y = f_2(x)$ definovaná rovnicí $(\square)$ a podmínkou $f_2(-1) = 5$ má v bodě -1 ostré lokální minimum 5.



Obr. 12.5 Graf funkce
$F(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 6y - 4$ a roviny $z = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování



Obr. 12.6 Nulová vrstevnice funkce
$F(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 6y - 4$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Σ

Rovnicí $F(x, y) = 0$ muže být za jistých podmínek daná funkce y proměnné x, tj. $y = f(x)$. Podmínky udává věta o implicitní funkci a také uvádí vzorce na výpočet derivací. Funkci zadanou implicitně můžeme vyšetřovat obdobně jako funkci danou explicitně. Můžeme zjišťovat, zda je na okolí bodu monotónní, konvexní nebo konkávní, můžeme vyhledávat její lokální extrémy.

?

1. *Zjistěte, zda rovnicí $ye^x - x \ln y - 1 = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$ na okolí bodu $A = [0, 1]$.*

   [ano, jsou splněny 3 podmínky věty o implictiní funkci]

2. *Vypočítejte y', je-li funkce y daná implicitně rovnicí.*
   - $y = 1 + y^x;\ y > 0$

     $\left[y' = \frac{-y^x \ln y}{xy^{x-1}}\right]$
   - $x^y - y^x = 0;\ x > 0, y > 0$

     $\left[y' = \frac{y^x \ln y - yx^{y-x}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}\right]$
   - $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 0$

     $\left[y' = \frac{x\left(y^2-2x^2\right)}{y(2y^2-x^2)}\right]$

3. *Vypočítejte y' a y'', je-li funkce y daná implicitně rovnicí.*
   - $y = x + \ln y;\ y > 0$

     $\left[y' = \frac{y}{y-1};\ y'' = \frac{y}{(y-1)^3}\right]$
   - $x - 2y + 2e^{x+y} = 0$

     $\left[y' = \frac{-2y+x-1}{2y-x-2},\ y'' = \frac{9x-18y}{(2y-x-2)^3}\right]$
   - $2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$

     $\left[y' = \frac{y}{x},\ y'' = 0\right]$

4. Určete $y'(A)$ a $y''(A)$ pro funkci $y = f(x)$ určenou implicitně rovnicí a bodem A.
   - $x^2 - 2xy - y^2 - 16 = 0;\ A = [4, 0]$

     $\left[y'(A) = 1,\ y''(A) = -\frac{1}{2}\right]$
   - $x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y = 0;\ A = [2, 0]$

     $\left[y'(A) = \frac{2}{3},\ y'' = \frac{14}{27}\right]$
   - $x \cos xy = 0;\ A = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

     $\left[y'(A) = -\frac{\pi}{2},\ y''(A) = \pi\right]$

5. *Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $(x^2 + y^2)(y - 1)^2 - 5y^2 = 0$ v bodě $C = [4, 2]$.*

   $$\begin{bmatrix} t : y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \\ n : y = 3x - 10 \end{bmatrix}$$

?

6. *Zjistěte, ve kterých bodech křivky $x^2 + y^2 - 3xy + 1 = 0$ jsou tečny rovnoběžné s přímkou $y = -x$. Rovnice těchto tečen napište.*

$$\left[\begin{array}{r} T_1 = [1, 1]; \quad t_1 : y = -x + 2 \\ T_2 = [-1, -1]; \quad t_2 : y = -x - 2 \end{array}\right]$$

7. *Najděte lokální extrémy funkce $y = f(x)$ definované implicitně rovnicí.*
   - $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$

     [ostré lokální maximum 1 v bodě -1]
   - $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0$

     [ostré lokální minimum -2 v bodě -3
ostré lokální maximum 0 v bodě -1]

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] KARÁSEK, J.: *Matematika II*, 1. vyd., Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3. vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1. vyd., Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Seznam literatury a použitých zdrojů

[1] BERMAN, G. N.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Moskva: Nauka, 1965, 443 s. (rusky)

[2] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Moskva: Nauka, 1977, 527 s. (rusky)

[3] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[4] KARÁSEK, J.,: *Matematika II*, 1. vydání, Brno: VUT, 2002, 242 s., ISBN 80-214-2092-8 (skripta)

[5] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[6] MÍČKA, J. a kolektiv.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 3.vyd., Praha: VŠCHT, 1998, 321 s. ISBN 80-7080-327-4 (skripta)

[7] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2005. 134 s., ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

[8] TOMICA, R.: *Cvičení z matematiky II*, Brno: VUT, 1970, 293 s.

Seznam obrázků

Seznam tabulek