MVŠO

DIFERENCIÁLNÍ POČET (1)

STUDIJNÍ OPORA PRO KOMBINOVANÉ STUDIUM

DIFERENCIÁLNÍ POČET (1)

Funkce jedné proměnné

Řešené příklady

RNDr. Vladimíra MÁDROVÁ, CSc.

RNDr. Vratislava MOŠOVÁ, CSc.

Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s., 2018

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Projekt EDULAM - „Zvýšení kvality vzdělávání na MVŠO s ohledem na potřeby trhu práce, digitalizaci a internacionalizaci“ (č. projektu XXXXX) je spolufinancován Evropskou unií.

Autor: RNDr. Vladimíra MÁDROVÁ, CSc.
RNDr. Vratislava MOŠOVÁ, CSc.

Olomouc 2018

Obsah

Úvod

Cílem textu je seznámení studentů s diferenciální počtem funkce jedné proměnné, a to především s jeho využitím formou řešených příkladů. Po přečtení textu student správně chápe pojem funkce a uvědomuje si užitečnost funkcí pro popis vztahů mezi jednotlivými veličinami, rozpoznává a charakterizuje základní vlastnosti funkcí. Pro funkce jedné proměnné bezpečně definuje limitu funkce, zná vlastnosti limit a umí počítat limity rozličných funkcí, rozumí pojmu spojitosti funkce. Chápe a umí definovat derivaci funkce, rutinně zvládá výpočet derivací rozmanitých funkcí, chápe geometrický význam derivace. Zvládá aplikaci všech vědomostí diferenciálního počtu a umí vyšetřit průběh různých funkcí.

Kapitola 1

Výpočet limit

Po prostudování kapitoly budete umět:

- počítat limity ve vlastním bodě;
- počítat jednostranné limity,
- počítat limity v nevlastním bodě,
- stanovit limitu složené funkce.

Klíčová slova:

Limita, jednostranná limita, vlastní bod, nevlastní bod, složená funkce.

a) Limita ve vlastním hromadném bodě

Příklady, v nichž užíváme úpravy předpisu funkce:

Příklad 1.1 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(x-5)} = \lim_{x\to 4} \frac{x+2}{x-5} = \frac{6}{-1} = -6$$

■

Příklad 1.2 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^2+8x+7}$.

Řešení

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^2+8x+7} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x+7)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-3}{x+7} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

■

Příklad 1.3 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{3x^2-11x+6}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{3x^2-11x+6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3} \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x+1}{3x-2} = \frac{7}{7} = 1$$

■

Příklad 1.4 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

Řešení

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2} \frac{x\left(x^2+3x+2\right)}{x^2-x-6} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$$

■

Příklad 1.5 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)\left(x^2-1\right)}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} (x+2) = 3$$

■

Příklad 1.6 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x^3+5x^2+5x+1}$.

Řešení

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x^3+5x^2+5x+1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -1} \frac{x^4-1}{(x^3+1)+5x\,(x+1)} =$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+1)\,(x+1)\,(x-1)}{(x+1)\,[(x^2-x+1)+5x]} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+1)\,(x-1)}{x^2+4x+1} = \frac{2\cdot(-2)}{1-4+1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

■

Příklad 1.7 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5} \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x^2-4x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2^2}{(x^2-4x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{x-1-4}{(x-5)\,(x+1)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{1}{6\left(\sqrt{4}+2\right)} = \frac{1}{24}$$

■

Příklad 1.8 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^3-1^3}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1} = \frac{1}{3}$$

■

Příklad 1.9 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{7+x}-3}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{7+x}-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{7+x-9} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \left(\sqrt{7+x}+3\right) = 6$$

■

Příklad 1.10 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1$$

■

Příklad 1.11 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x^4-1}\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x^4-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1-2}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$$

■

Příklad 1.12 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}-\frac{2x^2+x-1}{2x^2-7x+3}\right)$.

Řešení

$$=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}-\frac{2x^2+x-1}{2x^2-7x+3}\right)=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}-\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2+x-1}{2x^2-7x+3}=$$
$$=\left(\frac{0}{0}\right)-\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}{6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}-\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)}=$$
$$=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}{(2x-1)(3x-1)}-\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-3}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}-\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{5}{3}}=$$
$$=\frac{4\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+1}{3\cdot\frac{1}{2}-1}-\left(-\frac{9}{10}\right)=\frac{3}{\frac{1}{2}}+\frac{9}{10}=6+\frac{9}{10}=\frac{69}{10}$$

■

Výpočet jednostranných limit a užití věty o jednostranných limitách a „oboustranné“ limitě:

Příklad 1.13 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x-15}{x-4}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x-15}{x-4}=\left[\frac{-3}{0}\right]$$
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{3x-15}{x-4}=\left[\frac{-3}{\to 0^+}\right]=-\infty$$
$$\lim_{x\to 4^-}\frac{3x-15}{x-4}=\left[\frac{-3}{\to 0^-}\right]=+\infty$$
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{3x-15}{x-4}\neq\lim_{x\to 4^-}\frac{3x-15}{x-4}\implies\lim_{x\to 4}\frac{3x-15}{x-4}\text{ neexistuje}$$

■

Příklad 1.14 *Spočítejte* $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2x}{(x+3)^2}$.

Řešení

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x}{(x+3)^2} = \left[\frac{-6}{0}\right]$$
$$\lim_{x \to -3^+} \frac{2x}{(x+3)^2} = \left[\frac{-6}{\to 0^+}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \to -3^-} \frac{2x}{(x+3)^2} = \left[\frac{-6}{\to 0^+}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \to -3^+} \frac{2x}{(x+3)^2} = \lim_{x \to -3^-} \frac{2x}{(x+3)^2} \implies \lim_{x \to -3} \frac{2x}{(x+3)^2} = -\infty$$

■

Příklad 1.15 *Spočítejte* $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{(1-x^2)^3}$.

Řešení

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{(1-x^2)^3} = \left[\frac{-1}{0}\right]$$
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{(1-x^2)^3} = \left[\frac{-1}{\to 0^+}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{(1-x^2)^3} = \left[\frac{-1}{\to 0^-}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{(1-x^2)^3} \neq \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{(1-x^2)^3} \implies \lim_{x \to -1} \frac{x}{(1-x^2)^3} \text{ neexistuje}$$

■

Příklad 1.16 *Spočítejte* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$.

Řešení

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} \implies \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \text{ neexistuje}$$

■

Příklad 1.17 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+|x|}{|x|}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+|x|}{|x|}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+|x|}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(x^2+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+|x|}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(x^2-1\right)}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\left[-\left(x^2-1\right)\right]=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+|x|}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+|x|}{|x|}\implies\lim_{x\to 0}\frac{x^3+|x|}{|x|}=1$$

■

Příklad 1.18 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x|x-5|}{x-5}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x\,|x-5|}{x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{2x\,|x-5|}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{2x\,(x-5)}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}2x=10$$

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{2x\,|x-5|}{x-5}=\lim_{x\to 5^-}\frac{2x\,(-x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5^-}(-2x)=-10$$

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{2x\,|x-5|}{x-5}\neq\lim_{x\to 5^-}\frac{2x\,|x-5|}{x-5}\implies\lim_{x\to 5}\frac{2x\,|x-5|}{x-5}\text{ neexistuje}$$

■

Příklad 1.19 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x+2}{|x(6+x)|}$.

Řešení

$$\lim_{x\to -6}\frac{x+2}{|x\,(6+x)|}=\left[\frac{-4}{\to 0^+}\right]=-\infty$$

■

Užití goniometrických vzorců při výpočtu limit:

Příklad 1.20 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

■

Příklad 1.21 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x+\sin^2 x}{1-\sin x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x+\sin^2 x}{1-\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^2 x}{1-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x} =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin x) = 1+\sin\frac{\pi}{2} = 1+1 = 2$$

$\blacksquare$

Příklad 1.22 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x(1-\operatorname{tg} x)}{\cos 2x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x(1-\operatorname{tg} x)}{\cos 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x\cdot\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos x(\cos x+\sin x)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$\blacksquare$

Příklad 1.23 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cdot\cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{2\sin x\cdot\cos^2 x} = \lim_{x\to\pi} \frac{1}{2\cdot\cos^2 x} =$$
$$= \frac{1}{2\cos^2\pi} = \frac{1}{2(-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$\blacksquare$

Příklad 1.24 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right)\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right)}{\sin x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{tg} x-1+\operatorname{tg} x}{\sin x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x}{\sin x\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1-\operatorname{tg} x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\cos 0} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1} = 1$$

■

Využití vzorců $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$:

Příklad 1.25 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3\frac{\sin 3x}{3x}}{2\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

■

Příklad 1.26 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{3}{2}x}{\sin \frac{x}{3}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{3}{2}x}{\sin \frac{x}{3}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}\frac{\operatorname{tg} \frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}}{\frac{1}{3}\frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{9}{2}$$

■

Příklad 1.27 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} 3x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{\operatorname{tg} 3x}{3x}\cdot 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\frac{x}{4}}{\frac{\operatorname{tg} 3x}{3x}\cdot 3} = \frac{1^2\cdot\frac{0}{4}}{1\cdot 3} = \frac{0}{3} = 0$$

■

Příklad 1.28 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x^2}{\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\right)^2\cdot\frac{x^2}{16}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\right)^2\cdot\frac{1}{16}}=$$

$$=\frac{1\cdot 2}{1^2\cdot\frac{1}{16}}=32$$

■

Příklad 1.29 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}x-\sin 4x}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{5}-6x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}x-\sin 4x}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{5}-6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\frac{5}{2}x-\sin 4x}{x}}{\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{5}-6x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}-\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4}{2\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}{\frac{x}{5}}\cdot\frac{1}{5}-6}=\frac{\frac{5}{2}-1\cdot 4}{2\cdot 1\cdot\frac{1}{5}-6}=\frac{\frac{-3}{2}}{\frac{-28}{5}}=$$

$$=\frac{15}{56}$$

■

b) Limita v nevlastním bodě

Využití vzorce $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ **:**

Příklad 1.30 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3+3x^2-10)$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+3x^2-10\right)=2\cdot\infty^3+3\cdot\infty^2-10=\infty+\infty-10=+\infty$$

■

Příklad 1.31 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3+3x^2-10)$.

Řešení

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+3x^2-10\right)=2\left(-\infty\right)^3+3\left(-\infty\right)^2-10=-\infty+\infty-10=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(2+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^3}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}x^3\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^3}\right)=\left(-\infty\right)^3(2+0-0)=$$

$$=-\infty\cdot 2=-\infty$$

■

Příklad 1.32 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{10^5}x^4+50x^3-\frac{5^{10}}{x}\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{10^5}x^4+50x^3-\frac{5^{10}}{x}\right)=\frac{1}{10^5}\infty^4+50\infty^3-\frac{5^{10}}{\infty}=\infty+\infty-0=+\infty$$

■

Příklad 1.33 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{10^5}x^4+50x^3-\frac{5^{10}}{x}\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{10^5}x^4+50x^3-\frac{5^{10}}{x}\right)=\frac{1}{10^5}(-\infty)^4+50(-\infty)^3-\frac{5^{10}}{-\infty}=\infty-\infty+0=$$
$$=(\infty-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^4\left(\frac{1}{10^5}+\frac{50}{x}-\frac{5^{10}}{x^5}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}x^4\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{10^5}+\frac{50}{x}-\frac{5^{10}}{x^5}\right)=$$
$$=(-\infty)^4\left(\frac{1}{10^5}+0-0\right)=+\infty$$

■

Poznámka.
Srovnej výpočty limit v příkladech 1.30 - 1.33. V příkladech 1.30 a 1.32 byly operace s nevlastními čísly definovány; nenastaly žádné problémy. Naproti tomu v příkladech 1.31 a 1.33 jsme dospěli k neurčitým výrazům, proto jsme museli nejprve limitovanou funkci upravit, abychom dospěli k výsledku.

Příklad 1.34 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+5}{6+3x^2-2x^3}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+5}{6+3x^2-2x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{6}{x^3}+\frac{3}{x}-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{\frac{6}{x^3}+\frac{3}{x}-2}=\frac{1-0+0}{0+0-2}=$$
$$=-\frac{1}{2}$$

■

Příklad 1.35 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^3-2}{2+3x^2}$.

Řešení

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3-2}{2+3x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(6-\frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x^2}+3\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(6-\frac{2}{x^3}\right)}{\frac{2}{x^2}+3}=\frac{-\infty\,(6-0)}{0+3}=$$
$$=\frac{-6\infty}{3}=-\infty$$

■

Příklad 1.36 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{7x^2-3x}{4x^3+6}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^2-3x}{4x^3+6} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(7-\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(4+\frac{6}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7-\frac{3}{x}}{x\left(4+\frac{6}{x^3}\right)} = \frac{7-0}{\pm\infty\,(4+0)} =$$
$$= \frac{7}{\pm\infty} = 0$$

■

Příklad 1.37 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x-10}-x\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x-10}-x\right) = (\infty-\infty) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x-10}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3x-10}+x\right)}{\sqrt{x^2-3x-10}+x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-10-x^2}{\sqrt{x^2-3x-10}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x-10}{\sqrt{x^2-3x-10}+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3x-10}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x-10}+x}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3-\frac{10}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-3x-10}{x^2}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3-\frac{10}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}}+1} = \frac{-3-0}{\sqrt{1-0+0}+1} = \frac{-3}{2}$$

■

Příklad 1.38 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x}}{\frac{x+2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3+2x-1}{x^3}}}{1+\frac{2}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1$$

■

Příklad 1.39 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2x}}{x+1}$ *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2x}}{x+1}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2x}}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+2x}}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2+2x}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{2}{x}}}{1+\frac{1}{x}} =$$
$$= \frac{\sqrt{9+0}}{1+0} = \sqrt{9} = 3$$

Pozor! $\sqrt{x^2} = |x|$
Pokud $x \to +\infty$, pak $\sqrt{x^2} = x$
Pokud $x \to -\infty$, pak $\sqrt{x^2} = -x \implies x = -\sqrt{x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2x}}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+2x}}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{9x^2+2x}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9+\frac{2}{x}}}{1+\frac{1}{x}} =$$
$$= \frac{-\sqrt{9}}{1} = -3$$

■

Příklad 1.40 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+1}{3-x^2} \cdot \left(1+\frac{2}{x}+\frac{3x-4}{15x^2+5}\right)\right]$.

Řešení

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+1}{3-x^2} \cdot \left(1+\frac{2}{x}+\frac{3x-4}{15x^2+5}\right)\right] =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{3-x^2} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{2}{x}+\frac{3x-4}{15x^2+5}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{2}{x}+\frac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(15+\frac{5}{x^2}\right)}\right) = \frac{2}{-1} \cdot \left(1+0+\frac{3}{\pm\infty}\right) =$$
$$= -2 \cdot (1+0+0) = -2$$

■

Příklad 1.41 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{6x^2+15}{2x^3-5x} + \frac{10x^5-x^6}{10+x^5}\right]$.

Řešení

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{6x^2+15}{2x^3-5x} + \frac{10x^5-x^6}{10+x^5}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(6+\frac{15}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{5}{x^2}\right)} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^6\left(\frac{10}{x}-1\right)}{x^5\left(\frac{10}{x^5}+1\right)} =$$
$$= \frac{6+0}{\pm\infty\,(2-0)} + \frac{\pm\infty\,(0-1)}{0+1} = 0 \pm \infty(-1) = 0 \mp \infty = \mp\infty$$

■

Využití vzorce $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ pro } a \in (-1,1) \\ 1 \text{ pro } a = 1 \\ \infty \text{ pro } a > 1 \\ \text{neexistuje pro } a \leq -1 \end{cases}}$

Příklad 1.42 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^x-2\cdot 5^{x+2}}{5\cdot 6^x-3\cdot 4^{x-1}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x-2\cdot 5^{x+2}}{5\cdot 6^x-3\cdot 4^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3^x-2\cdot 5^{x+2}}{6^x}}{\frac{5\cdot 6^x-3\cdot 4^{x-1}}{6^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{6}\right)^x - 2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^x \cdot 5^2}{5\cdot 1 - 3\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{6}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\left(\frac{5}{6}\right)^x \cdot 25}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{0-2\cdot 0\cdot 25}{5-3\cdot 0\cdot\frac{1}{6}} = \frac{0}{5} = 0$$

■

Příklad 1.43 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3\cdot 7^{x+1}-2\cdot 4^{x}}{5\cdot 7^{x+2}+\frac{1}{2}(-5)^{x-1}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot 7^{x+1}-2\cdot 4^{x}}{5\cdot 7^{x+2}+\frac{1}{2}\left(-5\right)^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3\cdot 7^{x+1}-2\cdot 4^{x}}{7^x}}{\frac{5\cdot 7^{x+2}+\frac{1}{2}(-5)^{x-1}}{7^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot 7\cdot 1-2\left(\frac{4}{7}\right)^{x}}{5\cdot 7^2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)^{x}\cdot\frac{1}{7}} =$$

$$= \frac{3\cdot 7-2\cdot 0}{5\cdot 7^2+\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\frac{1}{7}} = \frac{3}{35}$$

■

Příklad 1.44 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2\cdot 3^{x-1}+5^{x+1}}{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}+6\cdot 5^{x}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2\cdot 3^{x-1}+5^{x+1}}{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}+6\cdot 5^{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2\cdot 3^{x-1}+5^{x+1}}{5^x}}{\frac{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}+6\cdot 5^{x}}{5^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{x}-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{5}+5}{2\cdot\left(\frac{3}{20}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{5}+6\cdot 1} =$$

$$= \frac{0-2\cdot 0\cdot\frac{1}{5}+5}{2\cdot 0\cdot\frac{1}{5}+6} = \frac{5}{6}$$

■

Využití vzorců $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k},\ k\in R\setminus\{0\}$ a věty o limitě složené funkce:

Příklad 1.45 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3+3}{x-3}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-3}\right)^{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-3}\right)^{x-3+3} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-3}\right)^{x-3}\cdot\left(1+\frac{3}{x-3}\right)^{3}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-3}\right)^{x-3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-3}\right)^{3} = e^3\cdot(1+0)^3 = e^3$$

■

Příklad 1.46 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x-2+2+3}{x-2}\right)^{x}\right]^{3} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x}\right]^{3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x-2+2}\right]^{3} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x-2}\cdot\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{2}\right]^{3} =$$

$$= \left[e^5\cdot(1+0)^2\right]^3 = e^{15}$$

■

Příklad 1.47 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+3-3-1}{2x+3}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left[\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3-3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{2x+3}\right]^{\frac{1}{6}}\cdot\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right\}=\left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot(1+0)^{-\frac{1}{6}}=$$
$$=e^{-\frac{4}{6}}\cdot 1=e^{-\frac{2}{3}}$$

■

c) Užití věty o limitě složené funkce

Příklad 1.48 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin\frac{1}{x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sin\frac{1}{x}=\sin\left[\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\right]=\sin 0=0$$

■

Příklad 1.49 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{(x-2)^2}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{(x-2)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(x-2)^2}}=e^0=1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(x-2)^2}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

■

Příklad 1.50 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 3} e^{\frac{1}{(x-3)^2}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 3} e^{\frac{1}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}} = [e^{\infty}] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)^2} = \left[\frac{1}{\to 0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(x-3)^2} = \left[\frac{1}{\to 0^+}\right] = +\infty$$

■

Příklad 1.51 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{3-x^3}{4x+x^2}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{3-x^3}{4x+x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x^3}{4x+x^2}} = \left[e^{-\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^3}{4x+x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{3}{x^3}-1\right)}{x^2\left(\frac{4}{x}+1\right)} = \frac{\infty\cdot(-1)}{1} = -\infty$$

■

Příklad 1.52 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\frac{x+3}{x-2}$.

Řešení

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{x+3}{x-2} = \ln\left[\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x-2}\right] = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 1$$

■

Příklad 1.53 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 3} \ln\frac{x^2-x+4}{(x-3)^2}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 3}\ln\frac{x^2-x+4}{(x-3)^2} = \ln\left[\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x+4}{(x-3)^2}\right] = [\ln\infty] = \infty$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x+4}{(x-3)^2} = \left[\frac{10}{\to 0^+}\right] = +\infty$$

■

Příklad 1.54 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to-1} e^{\frac{1-x}{x+1}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to-1} e^{\frac{1-x}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-x}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{1-x}{x+1} = \left[\frac{2}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{1-x}{x+1} = \left[\frac{2}{\to 0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1-x}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-x}{x+1}} = \left[e^{-\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{1-x}{x+1} = \left[\frac{2}{\to 0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} e^{\frac{1-x}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-x}{x+1}} = \left[e^{+\infty}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} e^{\frac{1-x}{x+1}} \neq \lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1-x}{x+1}} \implies \lim_{x\to-1} e^{\frac{1-x}{x+1}} \text{ neexistuje}$$

Poznámka.
Neexistence $\lim\limits_{x\to-1} e^{\frac{1-x}{x+1}}$ plyne již z toho, že neexistuje $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1-x}{x+1}$.

■

Příklad 1.55 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2-2}{x^2+5x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2-2}{x^2+5x} = \operatorname{arctg}\left[\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x^2+5x}\right] = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x^2+5x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)} = 1$$

■

Příklad 1.56 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2} = \operatorname{arccotg}\left[\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2}\right] = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$$

■

Příklad 1.57 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} \frac{2x^4}{x-1}$ *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} \frac{2x^4}{x-1}$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} \frac{2x^4}{x-1} = \operatorname{arccotg} \left[\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{x-1}\right] = [\operatorname{arccotg} \infty] = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{1-\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} \frac{2x^4}{x-1} = \operatorname{arccotg} \left[\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{x-1}\right] = [\operatorname{arccotg} (-\infty)] = \pi$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1-\frac{1}{x}} = -\infty$$

■

Limita funkce f pro $x \to x_0$ se rovná L, když pro každou posloupnost bodů $x_n \to x_0$, $x \neq 0$ konverguje posloupnost funkčních hodnot $f(x_n) \to (x_0)$. Funkce může mít limitu vlastní popř. nevlastní. Pokud má funkce limitu, je tato limita jediná a je rovna společné hodnotě jednostranných limit funkce.
Při výpočtu limit uplatňujeme následující pravidla: Limita součtu je rovna součtu limit. Limita součinu je rovna součinu limit. Výpočet limity složené začínáme od vnitřní složky. Je dobré si zapamatovat, že:

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Výpočet limity zahájíme dosazením limitní hodnoty za proměnnou. Pokud obdržíme neurčitý výraz, je třeba funkci vhodným způsobem upravit.

1. Vypočítejte limity.

- $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$ $\left[\frac{6}{5}\right]$
- $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-6x-7}$ $\left[\frac{1}{48}\right]$
- $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-20}{(x-5)^2}$ $[+\infty]$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{6x+7}{5x^8-9x^3} - \frac{x^3-6x^6}{2+x^3}\right)$ $[+\infty]$
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$
- $\lim\limits_{x\to 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$ $[6]$
- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+2}{x-3}$ [neexistuje]
- $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+4}$ $[2]$
- $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-20}{(x-4)^2}$ $[-\infty]$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{5x^3-4x}{7x+2} - \frac{6x+1}{x^3+5}\right)$ $[+\infty]$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right)$ $[\pm 1]$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+7}\right)^{\frac{2x-1}{4}}$ $\quad [e^{-2}]$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} \ln\frac{x+1}{x-1}$ $\quad [-\infty]$
- $\lim\limits_{x\to1^+} \ln\frac{x+1}{x-1}$ $\quad [+\infty]$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\frac{x+1}{x-1}$ $\quad [0]$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$
- $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{arccotg}\frac{1}{x^2}$ $\quad [0]$
- $\lim\limits_{x\to4} e^{\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}}$ $\quad \left[e^{\frac{3}{4}}\right]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Kapitola 2

Spojitost funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozhodnout, zda je funkce v daném bodě spojitá či nespojitá;
- rozlišit jednotlivé typy bodů nespojitosti,
- vytvořit si grafickou představu o tom, jak vypadá situace v okolí bodu nespojitosti.

Klíčová slova:

Funkce spojitá v bodě, funkce spojitá na intervalu, bod odstranitelné nespojitosti, nespojitost 1. druhu, nespojitost 2. druhu.

Příklad 2.1 *Vyšetřete body nespojitosti funkce* $y = \frac{x-6}{\sqrt{x-2}-2}$.

Řešení

$D(f)$: $\sqrt{x-2} - 2 \neq 0 \ \wedge \ x - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \neq 6 \wedge x \geq 2$

$x \in \langle 2, 6) \cup (6, \infty)$

Funkce není definovaná v bodě $x = 6$.
Vyšetříme jednostranné limity v tomto bodě.

$$\lim_{x\to 6^\pm} \frac{x-6}{\sqrt{x-2}-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 6^\pm} \frac{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}{x-2-4} = \lim_{x\to 6^\pm} \left(\sqrt{x-2}+2\right) = 4$$

Protože obě jednostranné limity jsou konečné a rovnají se, má funkce v bodě $x = 6$ odstranitelnou nespojitost.

■

Příklad 2.2 *Vyšetřete body nespojitosti funkce* $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}$.

Řešení

$D(f)$: $x + 1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq -1$

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

V bodě $x = -1$ funkce není definována, proto zde spočítáme jednostranné limity.

$$\lim_{x\to -1^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} = \left| \begin{array}{l} \text{označme } \frac{1}{x+1} = t \\ x \to -1^- \Rightarrow t \to -\infty \end{array} \right| = \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} = \left| \begin{array}{l} \text{označme } \frac{1}{x+1} = t \\ x \to -1^+ \Rightarrow t \to +\infty \end{array} \right| = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

Spočtené jednostranné limity jsou konečné různé, funkce má proto v bodě $x = -1$ nespojitost I. druhu se skokem $\left|\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \pi$.

■

Příklad 2.3 *Vyšetřete body nespojitosti funkce* $y = \frac{x^4-2x}{x^2-4}$.

Řešení

$D(f)$: $x^2 - 4 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \pm 2$

$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

Spočteme jednostranné limit v bodech -2 a 2.

$$\lim_{x\to -2^\pm} \frac{x^4-2x}{x^2-4} = \left[\frac{20}{0}\right] = \mp\infty$$

V bodě $x = -2$ jsou obě jednostranné limity nevlastní. Zadaná funkce má v tomto bodě nespojitost II. druhu.

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{x^4-2x}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0}\right] = \pm\infty$$

V bodě $x = 2$ jsou obě jednostranné limity nevlastní a proto má zadaná funkce v tomto bodě nespojitost II. druhu.

■

Příklad 2.4 *Vyšetřete body nespojitosti funkce* $y = \frac{x^2+2x}{x^3-4x}$.

Řešení

$D(f)$: $x^3 - 4x \neq 0 \Longleftrightarrow x\,(x-2)\,(x+2) \neq 0$

$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

Jednostranné limity spočteme pro $x \to -2, 0, 2$.

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x^2+2x}{x^3-4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x\,(x+2)}{x\,(x+2)\,(x-2)} = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

Bod $x = -2$ je bodem odstranitelné nespojitosti.

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{x^2+2x}{x^3-4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{x\,(x+2)}{x\,(x+2)\,(x-2)} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

Bod $x = 0$ je bodem odstranitelné nespojitosti.

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^2+2x}{x^3-4x} = \left[\frac{8}{0}\right] = \pm\infty$$

Bod $x = 2$ je bodem nespojitosti II. druhu.

■

Příklad 2.5 *Vyšetřete body nespojitosti funkce* $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pro } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{pro } x > 0 \end{cases}$.

Řešení

$D(f) : x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Do definičního oboru nepatří bod 0. Vyšetříme jednostranné limity v tomto bodě.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Protože jedna z jednostranných limit je nevlastní, má zadaná funkce v bodě $x = 0$ nespojitost II. druhu.

■

Příklad 2.6 *Vyšetřete body nespojitosti funkce* $y = \begin{cases} x+1 & \text{pro } x<0 \\ 2x & \text{pro } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{pro } x>1 \end{cases}$.

Řešení

$D(f) = R$

Funkce je sice definovaná pro všechna reálná čísla, ale v bodech $x=0$ a $x=1$ se předpis mění. Vypočteme proto jednostranné limity v těchto dvou bodech.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$$

V bodě $x = 2$ jsou jednostranné limity konečné a navzájem různé, absolutní hodnota jejich rozdílu je rovna 1. Zadaná funkce má proto v tomto bodě nespojitost I. druhu se skokem 1.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$

V bodě $x = 1$ jsou jednostranné limity konečné a rovnají se. Zadaná funkce má proto pro $x \to 1$ limitu rovnu 2. Současně je tato limita rovna funkční hodnotě v bodě nula. Funkce je v bodě $x=1$ spojitá.

■

Příklad 2.7 *Pojednejte o spojitosti funkce* $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{pro } x \in \langle -1,0) \cup (0,1\rangle \\ 0 & \text{pro } x=0 \\ -\frac{1}{x} & \text{pro } |x|>1 \end{cases}$

na jejím definičním oboru a načrtněte její graf.

Řešení

$D(f) = R;\ |x|>1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)\,.$

Funkce x^2+1 je kvadratická funkce, která je spojitá na svém $D(f) = R$ a odtud plyne, že je spojitá na každé podmnožině $D(f)$; tedy i na intervalech $(-1,0)$ a $(0,1)$. Lineární lomená funkce $-\frac{1}{x}$ je spojitá na $R\setminus\{0\}$ a z toho plyne, že je spojitá na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$. Chování funkce v bodech, v nichž se mění její předpis, musíme vyšetřit zvlášť. V našem případě jsou to body -1, 0, 1.
Pro $x \to -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{1} = 1$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(x^2+1\right) = (-1)^2+1 = 2 = f(-1) \qquad \lim_{x\to -1} f(x) \text{ neexistuje}$$

Jednostranné limity jsou vlastní, ale různé, proto bod -1 je bod nespojitosti I. druhu se skokem 1.

$$\left|\lim_{x\to -1^+} f(x) - \lim_{x\to -1^-} f(x)\right| = |2-1| = 1$$

Funkce f je spojitá zprava v bodě -1.

Pro $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(x^2+1\right) = 0^2+1 = 1 \neq f(0);\; f(0)=0.$$

Funkce f má v bodě 0 vlastní limitu, ale ta není rovna $f(0)$. Bod 0 je bod odstranitelné nespojitosti.
Pro $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2+1\right) = 1^2+1 = 2 = f(2)$$

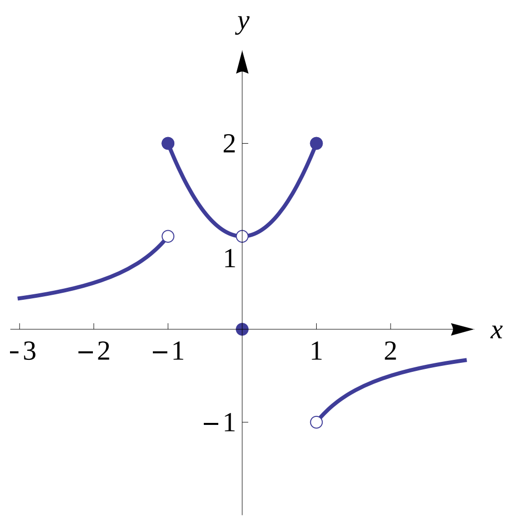
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \lim_{x\to 1} f(x) \text{ neexistuje}$$

Jednostranné limity jsou vlastní, ale jsou různé, proto bod 1 je bod nespojitosti I. druhu se skokem 3.

$$\left| \lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) \right| = |-1-2| = |-3| = 3$$

Funkce f je spojitá zleva v bodě 1.

Závěr: Funkce f je spojitá na intervalech $(-\infty,-1)$, $\langle -1,0)$, $(0,1\rangle$ a $(1,\infty)$.
Funkce f má 3 body nespojitosti: -1, 0, 1.



Obr. 2.1 Graf funkce $f(x)$
Zdroj: Vlastní zpracování

Uvědom si a srovnej s grafem funkce f!

V bodě -1 a 1 funkce nemá limitu.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$$

■

Příklad 2.8 *Pojednejte o spojitosti funkce* $f(x) = \begin{cases} -2^x & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{2}{x} & \text{pro } x \in (0, \infty) \end{cases}$

na jejím definičním oboru a načrtněte její graf.

Řešení

$D(f) = R \setminus \{0\}$.

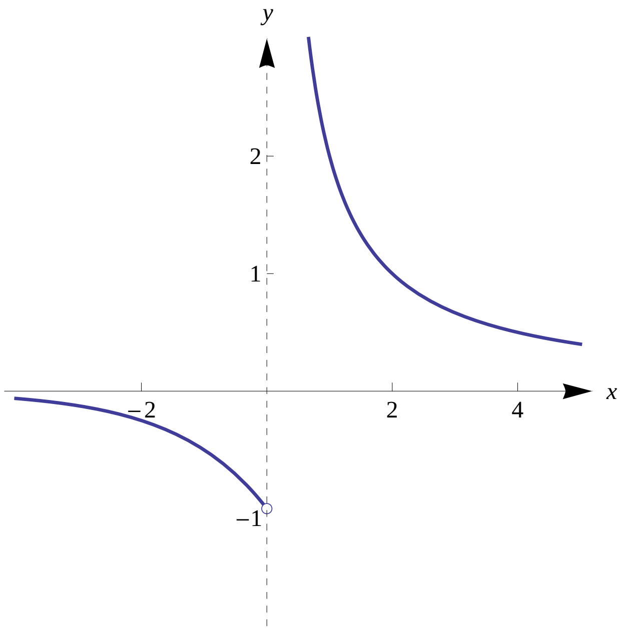
Exponenciální funkce -2^x je spojitá na R, je tedy spojitá i na intervalu $(-\infty, 0)$.
Funkce lineární lomená $\frac{2}{x}$ je spojitá na $R \setminus \{0\}$, je tedy spojitá i na intervalu $(0, \infty)$.
Bod 0, ve kterém se mění předpis funkce vyšetříme zvlášť pomocí jednostranných limit.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = \left[\frac{2}{\to 0^+}\right] = +\infty \quad f(0) \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2^x) = -2^0 = -1 \qquad \lim_{x\to 0} f(x) \text{ neexistuje}$$

Jedna z jednostranných limit je nevlastní, proto je bod 0 bodem nespojitosti II. druhu.

Závěr: Funkce f je spojitá na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ a má jeden bod nespojitosti - 0.



Obr. 2.2 Graf funkce $f(x)$
Zdroj: Vlastní zpracování

Uvědom si a srovnej s grafem funkce f!

Přímka o rovnici $x = 0$ je vertikální asymptota grafu funkce f.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0; \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2^x) = \left[-\frac{1}{2^\infty}\right] = 0$$

■

Příklad 2.9 *Pojednejte o spojitosti funkce* $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x & \text{pro } x \in (0, \infty) \\ 1 & \text{pro } x = 0 \\ -\frac{3}{x} & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

na jejím definičním oboru a načrtněte její graf.

Řešení

$D(f) = R$

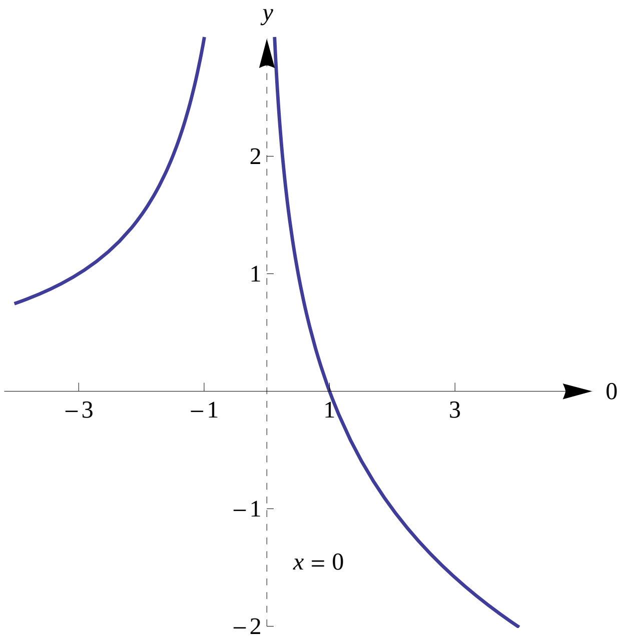
Logaritmická funkce $\log_{\frac{1}{2}} x$ je spojitá na intervalu $(0, \infty)$.
Funkce lineární lomená $-\frac{3}{x}$ je spojitá na $R \setminus \{0\}$ a tedy je spojitá i na intervalu $(-\infty, 0)$.
Bod 1, v němž se mění předpis funkce, vyšetříme zvlášť .

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{-3}{x} \right) = \left[\frac{-3}{\to 0^-} \right] = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty \qquad f(0) = 1$$

Obě jednostranné limity jsou nevlastní, proto je bod 0 bod nespojitosti II. druhu.

Závěr:Funkce f je spojitá na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ a má jeden bod nespojitosti - 0.



Obr. 2.3 Graf funkce $f(x)$
Zdroj: Vlastní zpracování

Uvědom si a srovnej s grafem funkce f!

Přímka o rovnici $x = 0$ je vertikální asymptota grafu funkce f.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-3}{x} \right) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$$

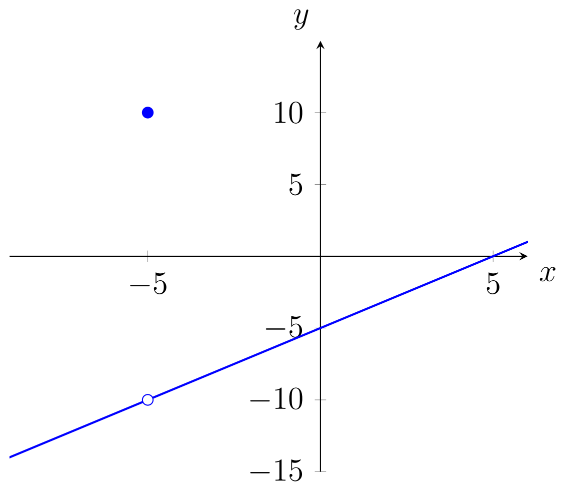
■

Funkce f je spojitá v bodě x_0, je-li limita funkce f v bodě x_0 je rovna funkční hodnotě $f(x_0)$. V takovém případě $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. Funkce je spojitá na intervalu, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.
Body, ve kterých ale $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, se nazývají body nespojitosti. Funkce, která není v bodě x_0 definovaná, může mít v tomto bodě jeden ze tří typů nespojitosti:

- odstranitelnou nespojitost, když jednostranné limity jsou konečné a rovnají se,
- nespojitost 1. druhu, pokud jednostranné limity jsou konečné a nerovnají se,
- nespojitost 2. druhu, pokud alespoň jedna z jednostranných limit je nevlastní.

1. Pojednejte o spojitosti funkcí a sestrojte jejich graf.

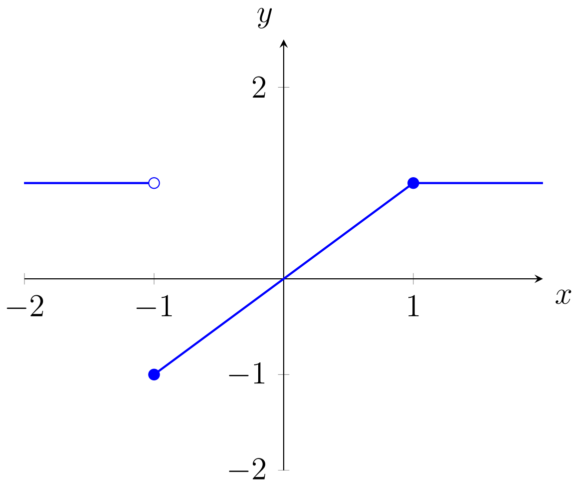
- $f(x) = \begin{cases} 10 & \text{pro } x = -5 \\ \frac{x^2-25}{x+5} & \text{pro } x \neq -5 \end{cases}$



bod -5 je bod odstranitelné nespojitosti
f je spojitá na intervalech $(-\infty, -5)$ a $(-5, \infty)$

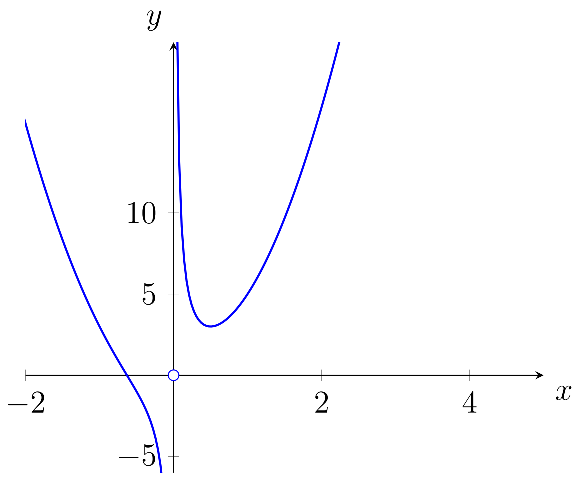
?

- $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}$



-1 je bod nespojitosti I. druhu se skokem 2
f je spojitá na intervalech $(-\infty, -1)$ a $\langle -1, \infty)$

- $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$



0 je bod nespojitosti II. druhu
f je spojitá na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$

?

2. *Určete číslo $a \in R$ tak, aby funkce f byla spojitá na celém definičním oboru.*

- $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-16}{x+2} & \text{pro } x \neq -2 \\ a & \text{pro } x = -2 \end{cases}$$
  $[a = -32]$
- $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ a & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
  $[a = 0]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Kapitola 3

Asymptoty ke grafu funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- napsat a nakreslit k danému grafu asymptotu bez směrnice;
- napsat a nakreslit k danému grafu asymptotu se směrnicí.

Klíčová slova:

Asymptota bez směrnice, jednostranné limity ve vlastním bodě, asymptota se směrnicí, limity v nevlastních bodech.

Příklad 3.1 *Určete rovnice všech asymptot grafu funkce* $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$.

Řešení

Určíme $D(f): x^3 + 1 \neq 0 \implies x^3 \neq -1 \implies x \neq -1$.
$D(f) = R \setminus \{-1\}$.
Bod $-1 \notin D(f)$, funkce v něm není spojitá.

Určíme jednostranné limity v tomto bodě. Pokud aspoň jedna z nich je nevlastní, pak přímka o rovnici $x = -1$ je asymptotou bez směrnice (vertikální asymptotou).

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{1+x^3} = \left[\frac{-1}{\to 0^+}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{1+x^3} = \left[\frac{-1}{\to 0^-}\right] = +\infty$$

Přímka o rovnici $x = -1$ je asymptota bez směrnice. Bod -1 je bod nespojitosti II. druhu.

Zjistíme, zda graf funkce má asymptoty se směrnicí. Rovnice takové asymptoty je $y = kx + q$, přičemž

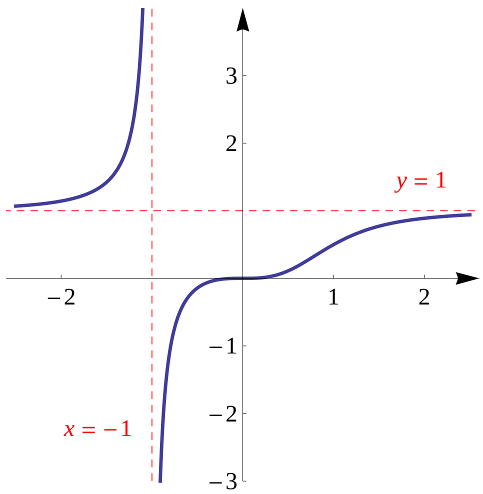
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \; a \; q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx).$$

V našem případě

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{1+x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x(1+x^3)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x+x^4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}+1} = 0$$
$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{1+x^3} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{1+x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^3}+1} = 1$$

Graf funkce má asymptotu se směrnicí o rovnici $y = 0 \cdot x + 1$, tedy $y = 1$. (Tato asymptota je rovnoběžná s osou x, říká se jí horizontální asymptota.)

Graf funkce má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = -1$ a asymptotu se směrnicí o rovnici $y = 1$.



Obr. 3.1 Asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 3.2 *Určete rovnice všech asymptot grafu funkce* $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Řešení

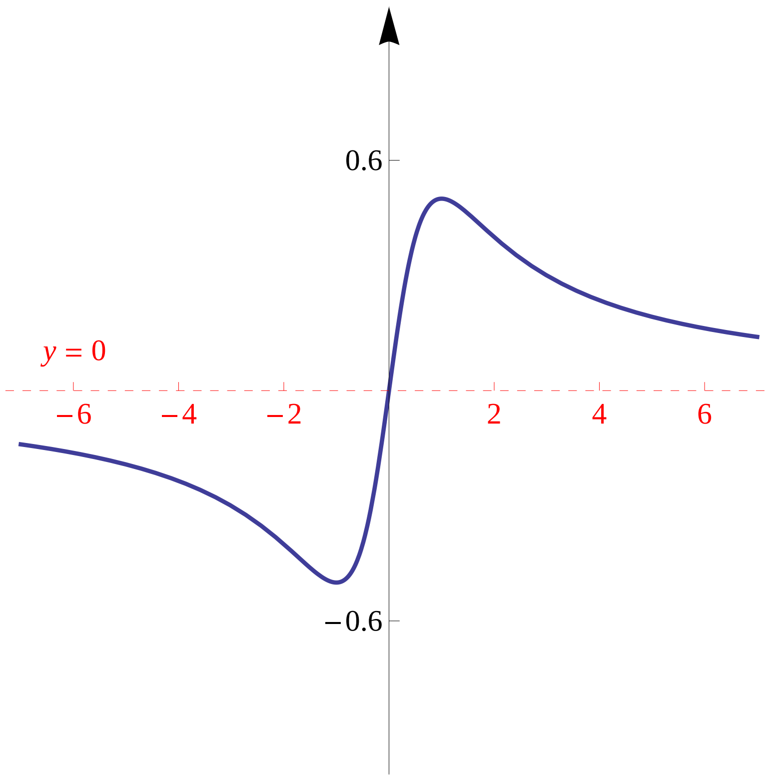
Určíme $D(f) = R$, funkce nemá žádný bod nespojitosti, graf funkce nemá asymptoty bez směrnice.
Vyšetříme, zda má graf funkce asymptoty se směrnicí, spočítáme tedy k a q.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1} = 0$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = 0$$

Rovnice asymptoty se směrnicí je $y = kx + q$, tedy $y = 0\cdot x + 0 \implies y = 0$.

Graf funkce má asymptotu se směrnicí o rovnici $y = 0$; je to horizontální asymptota.



Obr. 3.2 Asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 3.3 *Určete rovnice všech asymptot grafu funkce* $f(x) = x + \frac{x}{3x-1}$.

Řešení

Určíme $D(f) = R\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Protože $x = \frac{1}{3}$ je bod nespojitosti, vyšetříme jednostranné limity

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}\left(x + \frac{x}{3x-1}\right) = \frac{1}{3} + \left[\frac{\frac{1}{3}}{\to 0^+}\right] = \frac{1}{3} + \infty = +\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}\left(x + \frac{x}{3x-1}\right) = \frac{1}{3} + \left[\frac{+\frac{1}{3}}{\to 0^-}\right] = \frac{1}{3} - \infty = -\infty$$

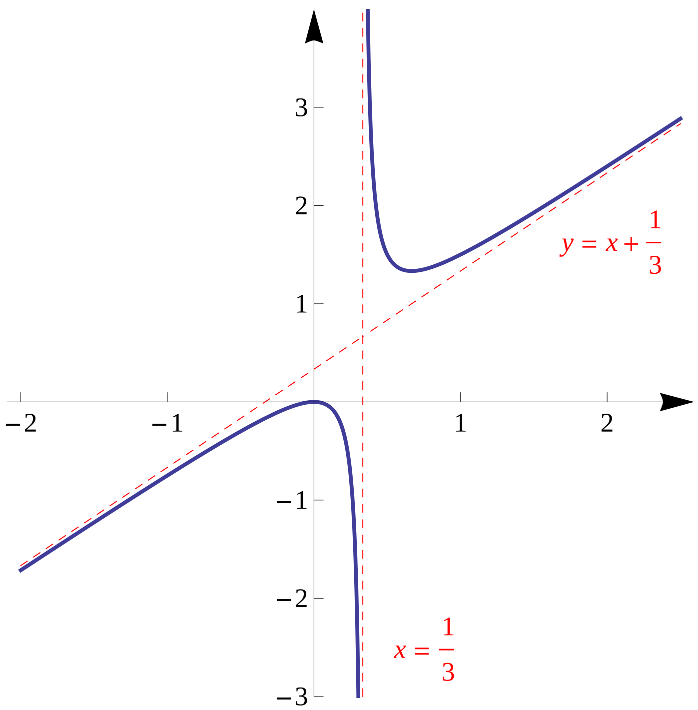
Přímka o rovnici $x = \frac{1}{3}$ je vertikální asymptota (asymptota bez směrnice).
Bod $\frac{1}{3}$ je bod nespojitosti II. druhu.

Zjistíme, zda má graf funkce asymptotu se směrnicí.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x + \frac{x}{3x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{3x-1}\right) = 1 + \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3 - \frac{1}{x}} = 1 + 0 = 1$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x + \frac{x}{3x-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{3x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$$

$$y = 1\cdot x + \frac{1}{3}$$

Graf funkce má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = \frac{1}{3}$ a asymptotu se směrnicí o rovnici $y = x + \frac{1}{3}$.



Obr. 3.3 Asymptoty ke grafu funkce $f(x) = x + \frac{x}{3x-1}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 3.4 *Určete rovnice všech asymptot grafu funkce* $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Řešení

Určíme $D(f) = R \setminus \{0\}$.
Vypočteme jednostranné limity v bodě 0.

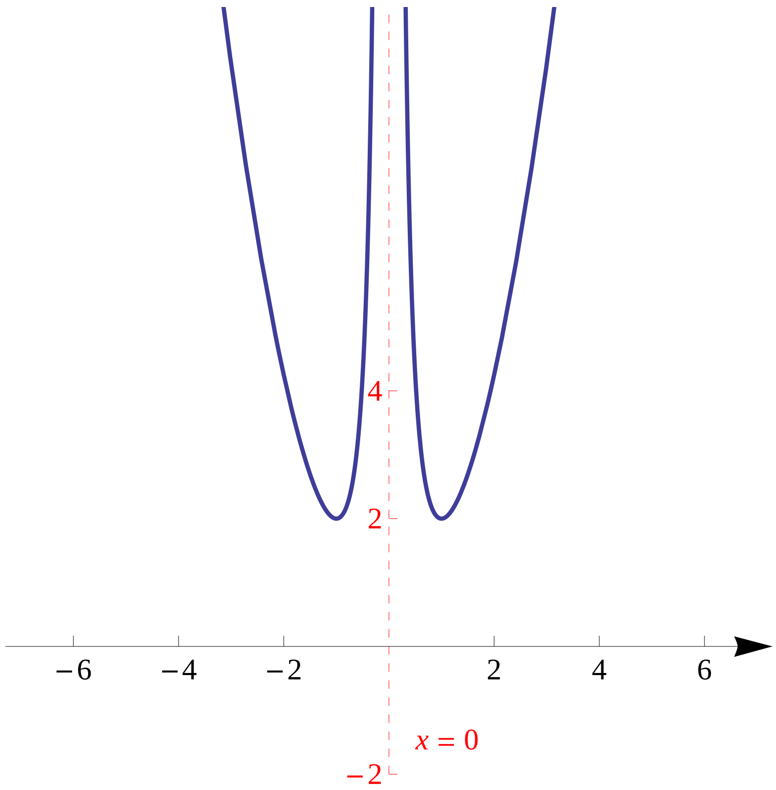
$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = 0 + \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \left[\frac{1}{\to 0^+}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = 0 + \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \left[\frac{1}{\to 0^+}\right] = +\infty$$

Přímka o rovnici $x = 0$ je vertikální asymptota. Bod 0 je bod nespojitosti II. druhu.

Zjistíme, zda má graf funkce asymptotu se směrnicí.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+1}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\right] = \pm\infty(1+0) = \pm\infty \cdots \text{ asymptota se směrnicí neexistuje}$$

Graf funkce má vertikální asymptotu $x = 0$.



Obr. 3.4 Asymptoty ke grafu funkce $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Přímky, ke kterým se limitně blíží graf funkce, se nazývají asymptoty. Asymptota bez směrnice má tvar $x = x_0$. Může existovat jen v bodě nespojitosti II. druhu funkce f, to je v bodech, v nichž aspoň jedna z jednostranných limit je nevlastní: $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

Asymptota se směrnicí ke grafu funkce $y = f(x)$ má tvar $y = kx + q$, kde $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$.

1. *Určete rovnice všech asymptot grafu funkce.*
   - $f(x) = \frac{x^4+3x^3}{(x+1)^3}$

     [vertikální asymptota: $x = -1$
     asymptota se směrnicí: $y = x$]
   - $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$

     [vertikální asymptota: $x = 0$]
   - $f(x) = 9\frac{x^2-3}{x^3}$

     [vertikální asymptota: $x = 0$
     asymptota se směrnicí: $y = 0$]
   - $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

     [horizontální asymptota: $y = 1$]

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Kapitola 4

Výpočet derivací

Po prostudování kapitoly budete umět:

- zacházet s pravidly pro derivování elementárních funkcí;
- zacházet s pravidly pro derivování součtu, součinu a podílu,
- zacházet s pravidly pro derivování složené funkce,
- vysvětlit geometrický význam 1. derivace v bodě,
- spočítat vyšší derivace,
- určit hodnotu derivací ve zvoleném bodě.

Klíčová slova:

Derivace funkce v bodě, derivace funkce na intervalu, derivace součtu, derivace součinu, derivace podílu, derivace složené funkce, logaritmická derivace, derivace elementárních funkcí, derivace vyšších řádů.

Pro přípustná x vypočtěte k funkci $f(x)$ její první derivaci, tedy funkci $f'(x)$.

Užití základních vzorců a pravidla pro derivování součtu

Příklad 4.1 $f(x) = x^3 + e^x - \sin x + 3$

Řešení

$$f'(x) = 3x^2 + e^x - \cos x + 0 = 3x^2 + e^x - \cos x$$

■

Příklad 4.2 $f(x) = 2^x + \ln x - \log_5 x + \ln 6$

Řešení

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln 5} + 0 = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln 5}$$

■

Příklad 4.3 $f(x) = \sin x - \cos x + \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

Řešení

$$f'(x) = \cos x + \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

■

Příklad 4.4 $f(x) = \arcsin x + \operatorname{arctg} x + \arcsin 3$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + 0 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$$

■

Příklad 4.5 $f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

Řešení

Nejprve upravíme.

$$f(x) = x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2}$$

$$f'(x) = 2x + 1 + 0 + (-1) \cdot x^{-2} + (-2) \cdot x^{-3} = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

■

Příklad 4.6 $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$

Řešení

Nejprve upravíme.

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{3}{4}} + \sqrt[5]{2} - x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{5}{6}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + 0 - \left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} + \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot x^{-\frac{11}{6}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - \frac{5}{6\sqrt[6]{x^{11}}}$$

■

Příklad 4.7 $f(x) = \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2}$

Řešení

$$f(x) = \frac{x^5}{x^2} - \frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^3 - x + x^{-2}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 + (-2) \cdot x^{-3} = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x^3}$$

■

Příklad 4.8 $f(x) = x^2(x^3 - x^{-2} + x^{-5})$

Řešení

$$f(x) = x^5 - x^0 + x^{-3} = x^5 - 1 + x^{-3}$$

$$f'(x) = 5x^4 - 0 + (-3) \cdot x^{-4} = 5x^4 - \frac{3}{x^4}$$

■

Příklad 4.9 $f(x) = \sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}} + \frac{\sqrt{5\sqrt[3]{7}}}{\sqrt[4]{6}}$

Řešení

Nejprve upravíme.

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{12}} \cdot x^{\frac{1}{24}} + \frac{\sqrt{5\sqrt[3]{7}}}{\sqrt[4]{6}} = x^{\frac{23}{24}} + \frac{\sqrt{5\sqrt[3]{7}}}{\sqrt[4]{6}}$$

$$f'(x) = \frac{23}{24}x^{-\frac{1}{24}} + 0 = \frac{23}{24\sqrt[24]{x}}$$

■

Příklad 4.10 $f(x) = x^{\frac{5}{2}} - x^{-3,5} + x^{\sqrt{5}+1} + x^{1+\pi}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - (-3,5)x^{-4,5} + (\sqrt{5}+1) \cdot x^{\sqrt{5}} + (1+\pi)x^{\pi} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{x^3} + \frac{7}{2\sqrt{x^9}} + (\sqrt{5}+1) \cdot x^{\sqrt{5}} + (1+\pi)x^{\pi}$$

■

Derivace součinu

Příklad 4.11 $f(x) = \frac{7}{8} \cdot \arcsin x$

Řešení

$$f'(x) = 0 \cdot \arcsin x + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{7}{8\sqrt{1-x^2}}$$

■

Příklad 4.12 $f(x) = \frac{3x^3}{4} - \frac{5}{3x^2} + 16 - 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{2\sqrt[4]{x}}$

Řešení

Upravíme.

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot x^3 - \frac{5}{3} \cdot x^{-2} + 16 - 5 \cdot x^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{2} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot 3x^2 - \frac{5}{3} \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 0 - 5 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{9}{2} \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot x^{-\frac{5}{4}} =$$

$$= \frac{9}{4}x^2 + \frac{10}{3x^3} - \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{8\sqrt[4]{x^5}}$$

■

Příklad 4.13 $f(x) = 24 \cdot \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3}}}$

Řešení

Upravíme.

$$f(x) = 24 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{3}{24}} = 24x^{\frac{12+4+3}{24}} = 24x^{\frac{19}{24}}$$

$$f'(x) = 24 \cdot \frac{19}{24} \cdot x^{-\frac{5}{24}} = \frac{19}{\sqrt[24]{x^5}}$$

■

Příklad 4.14 $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 7x}{16}$

Řešení

Upravíme a vyhneme se tak derivaci podílu.

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^3 - 4x^2 + 7x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16}(3x^2 - 8x + 7)$$

■

Příklad 4.15 $f(x) = 3\,\mathrm{tg}\,x - \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{5}$

Řešení

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{5(1+x^2)}$$

■

Příklad 4.16 $f(x) = \frac{2\ln x}{5} - \frac{5\log 2}{3} - \frac{2\log_3 x}{7}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x} - 0 - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{x\ln 3} = \frac{2}{5x} - \frac{2}{7x\ln 3}$$

■

Příklad 4.17 $f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{2}} - \frac{6x}{5} + \frac{3x^4}{4} - \frac{7}{3x^2}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x} - \frac{6}{5} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 4x^3 - \frac{7}{3} \cdot (-2)x^{-3} = \frac{3}{x\sqrt{2}} - \frac{6}{5} + 3x^3 + \frac{14}{3x^3}$$

■

Příklad 4.18 $f(x) = 6x^4 \cdot \sin x$

Řešení

$$f'(x) = 6 \cdot 4x^3 \cdot \sin x + 6x^4 \cos x = 6x^3(4\sin x + x\cos x)$$

■

Příklad 4.19 $f(x) = (x + e^x) \cdot \mathrm{tg}\,x$

Řešení

$$f'(x) = (1 + e^x) \cdot \mathrm{tg}\,x + (x + e^x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

■

Příklad 4.20 $f(x) = \frac{2}{x^2} \cdot \arcsin x$

Řešení

$$f'(x) = 2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} \arcsin x + \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-4}{x^3} \arcsin x + \frac{2}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

■

Příklad 4.21 $f(x) = (x^2+1)\cdot \operatorname{arctg} x$

Řešení

$$f'(x) = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + (x^2+1)\cdot \frac{1}{x^2+1} = 2x \operatorname{arctg} x + 1$$

■

Příklad 4.22 $f(x) = 3^x \cdot \ln x - 2e^x \log_5 x$

Řešení

$$f'(x) = 3^x \ln 3 \cdot \ln x + 3^x \cdot \frac{1}{x} - 2\left[e^x \cdot \log_5 x + e^x \cdot \frac{1}{x \ln 5}\right] =$$
$$= 3^x \left(\ln 3 \cdot \ln x + \frac{1}{x}\right) - 2e^x \left(\log_5 x + \frac{1}{x \ln 5}\right)$$

■

Příklad 4.23 $f(x) = (2x-3)\cdot(x^2-6x+5)$

Řešení

$$f'(x) = 2(x^2-6x+5) + (2x-3)(2x-6) = 2x^2 - 12x + 10 + 4x^2 - 6x - 12x + 18 =$$
$$= 6x^2 - 30x + 28 = 2(3x^2 - 15x + 14)$$

■

Příklad 4.24 $f(x) = (x \sin\alpha + \cos\alpha)\cdot(x\cos\alpha - \sin\alpha)$

Řešení

$$f'(x) = \sin\alpha \cdot (x\cos\alpha - \sin\alpha) + (x\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot\cos\alpha =$$
$$= x\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha + x\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha =$$
$$= 2x\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

■

Příklad 4.25 $f(x) = 6\ln 5 \cdot \log_5 x - 3\ln x \cdot \log x$

Řešení

$$f'(x) = 6\ln 5 \cdot \frac{1}{x\ln 5} - 3\left[\frac{1}{x}\cdot \log x + \ln x \cdot \frac{1}{x \ln 10}\right] = \frac{6}{x} - \frac{3}{x}\left(\log x - \frac{\ln x}{\ln 10}\right)$$

■

Příklad 4.26 $f(x) = (1+x^2)\cdot \sin x \cdot \operatorname{arccotg} x$

Řešení

$$f'(x) = \left[2x\cdot\sin x + (1+x^2)\cdot\cos x\right]\cdot \operatorname{arccotg} x + (1+x^2)\cdot \sin x \cdot \frac{-1}{1+x^2} =$$
$$= \left[2x\sin x + (1+x^2)\cos x\right]\operatorname{arccotg} x - \sin x$$

■

Příklad 4.27 $f(x) = 2^3 e^x \cdot 5^x \cdot \ln x$

Řešení

$$f'(x) = 8\left\{[e^x \cdot 5^x + e^x \cdot 5^x \cdot \ln 5]\ln x + e^x \cdot 5^x \cdot \frac{1}{x}\right\} = 8e^x \cdot 5^x \left[(1+\ln 5)\ln x + \frac{1}{x}\right]$$

■

Derivace podílu

Příklad 4.28 $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$$

■

Příklad 4.29 $f(x) = \frac{\sin x - e^x}{\cos x}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{(\cos x - e^x)\cdot \cos x - (\sin x - e^x)\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - e^x \cos x + \sin^2 x - e^x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 - e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$$

■

Příklad 4.30 $f(x) = \frac{x^2-3x}{4x^2+8}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(4x^2+8) - (x^2-3x)\cdot 8x}{(4x^2+8)^2} = \frac{8x^3 - 12x^2 + 16x - 24 - 8x^3 + 24x^2}{(4x^2+8)^2}$$

$$= \frac{12x^2+16x-24}{(4x^2+8)^2} = \frac{4(3x^2+4x-6)}{4^2(x^2+2)^2} = \frac{3x^2+4x-6}{4(x^2+2)^2}$$

■

Příklad 4.31 $f(x) = \frac{4}{x^2+5x-1}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{0\cdot(x^2+5x-1) - 4(2x+5)}{(x^2+5x-1)^2} = \frac{-4(2x+5)}{(x^2+5x-1)^2}$$

■

Příklad 4.32 $f(x) = \frac{4}{x^2-5x^3}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{-4\cdot(2x-15x^2)}{(x^2-5x^3)^2} = \frac{-4x(2-15x)}{x^4(1-5x)^2} = \frac{-4(2-15x)}{x^3(1-5x)^2}$$

■

Příklad 4.33 $f(x) = \frac{6}{(2-x)(3-2x^2)}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{-6 \cdot [-1(3-2x^2) + (2-x) \cdot (-4x)]}{(2-x)^2(3-2x^2)^2} = \frac{-6\,[-3+2x^2-8x+4x^2]}{(2-x)^2(3-2x^2)^2} =$$
$$= \frac{-6(6x^2-8x-3)}{(2-x)^2(3-2x^2)^2}$$

■

Příklad 4.34 $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{-1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

■

Příklad 4.35 $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{15}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{(2x-3) \cdot 15 - (x^2-3x+4) \cdot 0}{15^2} = \frac{2x-3}{15}$$

Poznámka.
Není-li ve jmenovateli proměnná, je zbytečné derivovat funkci jako podíl. Funkci upravíme a derivujeme jako součin s jedním konstantním činitelem.

$$f(x) = \frac{1}{15}(x^2-3x+4)$$
$$f'(x) = \frac{1}{15}(2x-3) = \frac{2x-3}{15}$$

■

Derivace složené funkce

Příklad 4.36 $f(x) = (3x^2 - 4x + 5)^3$

Řešení

$$f'(x) = 3(3x^2 - 4x + 5)^2(6x - 4)$$

■

Příklad 4.37 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}}$

Řešení

Upravíme.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^{-1} - 2x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-1 \cdot x^{-2} - 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^2}}$$

■

Příklad 4.38 $f(x) = \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{cotg} 2x$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 2x}\right) \cdot 2 = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 2x} =$$
$$= \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} - \frac{1}{\sin^2 2x} =$$
$$= \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin^2 2x} = \frac{2\sin 2x - 1}{\sin^2 2x}$$

■

Příklad 4.39 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

■

Příklad 4.40 $f(x) = \ln\left(x + \frac{2}{x^2+1}\right)$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{x + \frac{2}{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{-2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^3+x+2}{x^2+1}} \cdot \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}{(x^3 + x + 2)(x^2 + 1)}$$

■

Příklad 4.41 $f(x) = e^{\cos^3 5x}$

Řešení

$$f'(x) = e^{\cos^3 5x} \cdot 3 \cdot \cos^2 5x \cdot (-\sin 5x) \cdot 5 = -15 \sin 5x \cdot \cos^2 5x \cdot e^{\cos^3 5x}$$

■

Příklad 4.42 $f(x) = 2^{\sqrt{3x^2-2}}$

Řešení

$$f'(x) = 2^{\sqrt{3x^2-2}} \ln 2 \cdot \frac{1}{2} \left(3x^2 - 2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}} 2^{\sqrt{3x^2-2}} \ln 2$$

■

Příklad 4.43 $f(x) = \ln \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$
$$= \frac{e^{2x} + e^0 + e^0 + e^{-2x} - (e^{2x} - e^0 - e^0 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}} =$$
$$\frac{4}{e^{2x} - e^{-2x}}$$

■

Příklad 4.44 $f(x) = \ln \sin x$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x$$

■

Příklad 4.45 $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2-1) \cdot \ln 3} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$$

■

Příklad 4.46 $f(x) = \ln\left[\ln(\ln x)\right]$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

■

Příklad 4.47 $f(x) = 2^{3^x}$

Řešení

$$f'(x) = 2^{3^x} \cdot \ln 2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = 3^x \cdot 2^{3^x} \cdot \ln 2 \cdot \ln 3$$

■

Příklad 4.48 $f(x) = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$

Řešení

$$f'(x) = e^x + e^{e^x} \cdot e^x + e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x = e^x \left[1 + e^{e^x}(1 + e^{e^{e^x}})\right]$$

■

Příklad 4.49 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} =$$
$$= \frac{1}{\frac{1-2x+x^2+1+2x+x^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{2+2x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

■

Příklad 4.50 $f(x) = 2^{\cos^2 x \cdot \sin x}$

Řešení

$$f'(x) = 2^{\cos^2 x \cdot \sin x} \cdot \ln 2 \cdot \left[2 \cos x \cdot (-\sin x) \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot \cos x\right] =$$
$$= 2^{\cos^2 x \cdot \sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x \left(\cos^2 x - 2\sin^2 x\right) = 2^{\cos^2 x \sin x} \sin x \cdot \ln 2 \cdot \cos x \cdot \left(1 - 3\sin^2 x\right)$$

■

Příklad 4.51 $f(x) = \frac{1}{4} \ln(2x^2 - 3)^4$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(2x^2-3)^4} \cdot 4(2x^2-3)^3 \cdot 4x = \frac{4x}{2x^2-3}$$

■

Příklad 4.52 $f(x) = e^{(3-\frac{2}{x})^3}$

Řešení

$$f'(x) = e^{\left(3-\frac{2}{x}\right)^3} \cdot 3\left(3 - \frac{2}{x}\right)^2 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{6}{x^2}\left(3 - \frac{2}{x}\right)^2 \cdot e^{\left(3-\frac{2}{x}\right)^3}$$

■

Příklad 4.53 $f(x) = \log^3 x^2$

Řešení

$$f'(x) = 3\log^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2 \ln 10} \cdot 2x = \frac{6\log^2 x^2}{x \ln 10}$$

■

Příklad 4.54 $f(x) = \left(\arcsin \frac{1}{x}\right)^4$

Řešení

$$f'(x) = 4\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 4\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{x\sqrt{x^2-1}}\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)^3$$

■

Příklad 4.55 $f(x) = \left(\sin \frac{x^2}{4}\right)^3$

Řešení

$$f'(x) = 3\left(\sin \frac{x^2}{4}\right)^2 \cdot \cos \frac{x^2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{3}{2}x \cos \frac{x^2}{4}\left(\sin \frac{x^2}{4}\right)^2$$

■

Příklad 4.56 $f(x) = \ln \frac{1}{x^3}$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^3}} \cdot \frac{-3}{x^4} = x^3 \cdot \frac{-3}{x^4} = -\frac{3}{x}$$

■

Příklad 4.57 $f(x) = \log_3(x^2-1)$

Řešení

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2-1)\cdot \ln 3} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$$

■

Logaritmická derivace

Při výpočtu derivace funkcí tvaru $f(x)^{g(x)},\ x \in \{x \in R, f(x) > 0\}$, využijeme identitu $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$ a vzorec pro derivování složené funkce.

Příklad 4.58 $f(x) = x^{x^2}$

Řešení

$$f'(x) = \left(x^{x^2}\right)' = \left(e^{x^2 \ln x}\right)' = e^{x^2 \ln x}\left(2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{x^2} \cdot x(2\ln x + 1) =$$
$$= x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$$

■

Příklad 4.59 $f(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^{2x}$

Řešení

$$f'(x) = \left[\left(\frac{x}{2-x}\right)^{2x}\right]' = \left(e^{2x \cdot \ln \frac{x}{2-x}}\right)' =$$
$$= e^{2x \cdot \ln \frac{x}{2-x}} \cdot \left(2\ln \frac{x}{2-x} + 2x \cdot \frac{2-x}{x} \cdot \frac{2-x-x\cdot(-1)}{(2-x)^2}\right) =$$
$$= \left(\frac{x}{2-x}\right)^{2x} \cdot \left(2\ln \frac{x}{2-x} + \frac{4}{2-x}\right)$$

■

Příklad 4.60 $f(x) = \sqrt[x]{(2-x^2)^3}$

Řešení

$$f'(x) = \left[(2-x^2)^{\frac{3}{x}}\right]' = \left(e^{\frac{3}{x}\cdot\ln(2-x^2)}\right)' = e^{\frac{3}{x}\cdot\ln(2-x^2)}\left[-\frac{3}{x^2}\ln(2-x^2) + \frac{3}{x}\cdot\frac{-2x}{2-x^2}\right] =$$
$$= (2-x^2)^{\frac{3}{x}} \cdot (-3)\left(\frac{\ln(2-x^2)}{x^2} + \frac{2}{2-x^2}\right) = -3\sqrt[x]{(2-x^2)^3}\left(\frac{\ln(2-x^2)}{x^2} + \frac{2}{2-x^2}\right)$$

■

Příklad 4.61 $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

Řešení

$$f'(x) = \left(e^{\cos x \ln \sin x}\right)' = e^{\cos x \ln \sin x}\left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right) =$$
$$= (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right)$$

■

Příklad 4.62 $f(x) = x^{\ln x}$

Řešení

$$f'(x) = \left(e^{\ln x \cdot \ln x}\right)' = e^{\ln x \cdot \ln x}\left(\frac{1}{x} \cdot \ln x + \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2\ln x = x^{\ln x - 1}\ln x^2$$

■

Příklad 4.63 $f(x) = (\ln x)^x$

Řešení

$$f'(x) = \left(e^{x\ln(\ln x)}\right)' = e^{x\ln(\ln x)}\left[\ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\right] = (\ln x)^x\left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right]$$

■

Příklad 4.64 $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

Řešení

$$f'(x) = \left(e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)}\right)' = e^{\ln x \cdot \ln(\ln x)}\left[\frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x) + \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\right] =$$
$$= (\ln x)^{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\left[\ln(\ln x) + 1\right] = \frac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}\ln(e\ln x)$$

■

Σ

Derivace funkce v bodě x_0 je definována vztahem $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Ve všech bodech, kde jsou uvedené elementární funkce definovány, platí

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= nx^{n-1}, & c' &= 0 \\
(a^x)' &= a^x \ln a, & (e^x)' &= e^x \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, & (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\
(\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & (\operatorname{arccotg} x) &= -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Pro derivování součtu, součinu a podílu platí

$$\begin{aligned}
(cf(x))'_{x=x_0} &= cf'(x_0) \\
(f(x) \pm g(x))'_{x=x_0} &= f'(x_0) \pm g'(x_0) \\
(f(x)\, g(x))'_{x=x_0} &= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} &= \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}$$

Derivace složené funkce je rovna součinu derivací jednotlivých složek

$$(g(f(x)))'_{x=x_0} = g'(y_0)\, f'(x_0)\,.$$

V logaritmické derivaci se využívá složení exponenciální funkce s logaritmickou a pravidla pro derivování složené funkce: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

1. *K dané funkci f určete její první derivaci, tj. f′.*

- $f(x) = 3x^4 \cos x$

  $[f'(x) = 3x^3 (4\cos x - x \sin x)]$
- $f(x) = \frac{2e^x}{x^2-4}$

  $\left[f'(x) = \frac{2e^x\left(x^2-4-2x\right)}{\left(x^2-4\right)^2}\right]$
- $f(x) = \frac{6}{\left(x^3-5\right)^2}$

  $\left[f'(x) = \frac{-36x^2}{\left(x^3-5\right)^3}\right]$
- $f(x) = \left(\operatorname{tg}\frac{2}{x}\right)^4$

  $\left[f'(x) = -8\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{2}{x}\right)^3}{x^2 \cdot \cos^2\frac{2}{x}}\right]$
- $f(x) = \sqrt{1+\ln^2 x}$

  $\left[f'(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}\right]$
- $f(x) = (\sin x)^{x^2}$

  $\left[f'(x) = x\,(\sin x)^{x^2}\,(2\ln \sin x + x \operatorname{cotg} x)\right]$
- $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$

  $\left[f'(x) = \frac{x}{x^4-1}\right]$
- Určete $f'''(-1)$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x} + 3x^3$.

  $[f'''(-1) = 12]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Kapitola 5

Tečna a normála

Po prostudování kapitoly budete umět:

- k dané funkci napsat rovnici tečny;
- k dané funkci napsat rovnici normály.

Klíčová slova:

Derivace funkce v bodě, směrnice přímky, sečna, tečna, normála, rovnice přímky určené bodem a směrnicí.

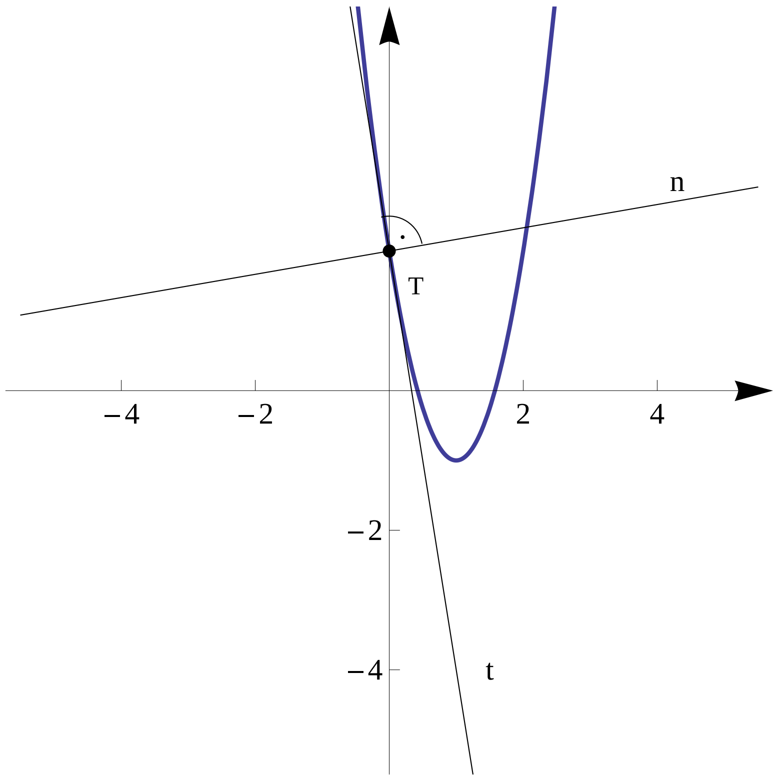
Příklad 5.1 *Určete rovnici tečny* t *a normály* n *funkce* $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ *v bodě* $T = [0; ?]$.

Řešení

Nejprve určíme $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2$, tedy dotykový bod $T = [0; 2]$.
$T = [x_0, f(x_0)]$, tedy $x_0 = 0$, $f(x_0) = 2$.
Dále určíme $f'(x) = 6x - 6$ a hodnotu derivace v dotykovém bodě,
tj. $f'(x_0) = f'(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6$. Dosadíme získané hodnoty do rovnice tečny a normály:

$$\begin{aligned} t: y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - 2 &= -6(x - 0) \\ y &= -6x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n: y - f(x_0) &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \\ y - 2 &= -\frac{1}{-6}(x - 0) \\ y &= \frac{1}{6}x + 2 \end{aligned}$$



Obr. 5.1 Tečna a normála ke grafu funkce $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 5.2 *Určete rovnici tečny t a normály n funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$ v bodě $T = [-1; ?]$.*

Řešení

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2 \qquad x_0 = -1,\ f(x_0) = -2,\ T = [-1; -2]$$
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2},\ f'(-1) = 1 - \frac{1}{(-1)^2} = 1 - 1 = 0$$

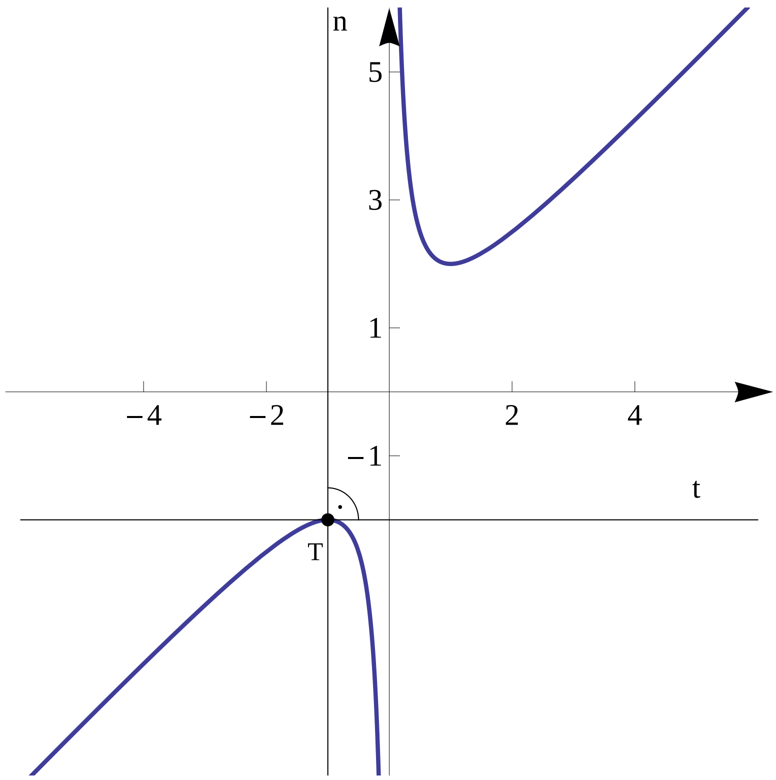
Úvaha: Víme, že $f'(x_0) = k_t = 0$ je směrnice tečny, z toho vyplývá, že tečna bude rovnoběžná s osou x a prochází bodem $T = [-1; -2]$. Rovnice tečny bude $t : y = -2$.
Určení rovnice výpočtem:

$$\begin{aligned} t : y - (-2) &= 0(x - (-1)) \\ y + 2 &= 0 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Normála n je kolmá na tečnu t : $n \perp t$, $t \parallel x \implies n \parallel y$, normála bude rovnoběžná s osou y a prochází bodem $T = [-1; -2]$, rovnice normály je

$$n : x = -1$$

Kdybychom dosazovali do rovnice normály, pak obdržíme $y + 2 = \frac{-1}{0}(x + 1)$, kde $\left[\frac{-1}{0}\right]$ je nedefinovaný výraz a normála svírá s osou x úhel $90°$.



Obr. 5.2 Tečna a normála ke grafu funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 5.3 *Určete rovnici tečny t a normály n funkce $f(x) = \frac{3}{x-2} + 5x$ v bodě $T = [-1; ?]$.*

Řešení

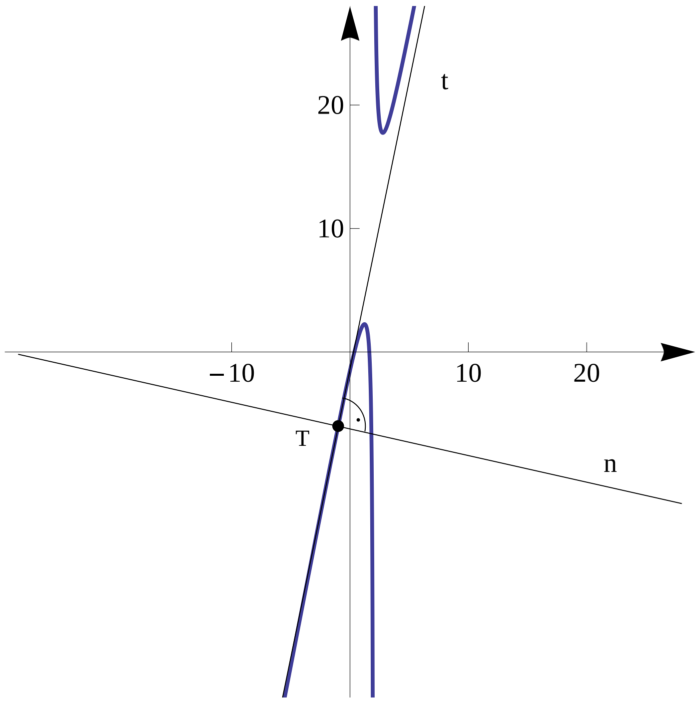
$f(-1) = \dfrac{3}{-3} + 5(-1) = -1 - 5 = -6; \qquad x_0 = -1,\ f(x_0) = -6,\ T = [-1; -6]$

$f'(x) = \dfrac{-3 \cdot 1}{(x-2)^2} + 5$

$f'(-1) = \dfrac{-3}{(-3)^2} + 5 = \dfrac{-1}{3} + 5 = \dfrac{-1+15}{3} = \dfrac{14}{3} = k_t \cdots$ směrnice tečny

$$
\begin{aligned}
t : y + 6 &= \frac{14}{3}(x+1) \\
y &= \frac{14}{3}x + \frac{14}{3} - 6 \\
y &= \frac{14}{3}x - \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n : y + 6 &= -\frac{1}{\frac{14}{3}}(x+1) \\
y + 6 &= -\frac{3}{14}(x+1) \\
y &= -\frac{3}{14}x - \frac{3}{14} - 6 \\
y &= -\frac{3}{14}x - \frac{87}{14}
\end{aligned}
$$



Obr. 5.3 Tečna a normála ke grafu funkce $f(x) = \frac{3}{x-2} + 5x$

Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 5.4 *Určete rovnici tečny t a normály n funkce $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ v bodě $T = [3; ?]$.*

Řešení

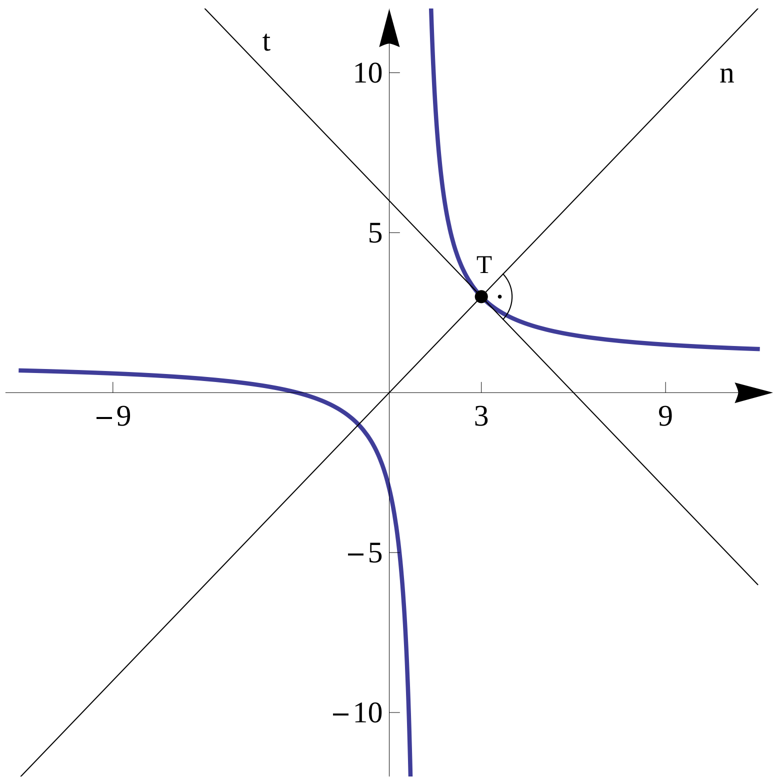
$$f(3) = \frac{3+3}{3-1} = \frac{6}{2} = 3; \qquad x_0 = 3,\ f(x_0) = 3,\ T = [3; 3]$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+3) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$f'(3) = \frac{-4}{(3-1)^2} = \frac{-4}{4} = -1 = k_t \cdots \text{směrnice tečny}$$

$$\begin{aligned} t: y - 3 &= -1(x-3) \\ y &= -x + 3 + 3 \\ y &= -x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n: y - 3 &= -\left(\frac{1}{-1}\right)(x-3) \\ y - 3 &= x - 3 \\ y &= x \end{aligned}$$



Obr. 5.4 Tečna a normála ke grafu funkce $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 5.5 *Určete rovnici tečny t a normály n funkce $f(x) = \sqrt[3]{3-x}$ v bodě $T = [3; ?]$.*

Řešení

$$f(3) = \sqrt[3]{3-3} = \sqrt[3]{0} = 0; \qquad x_0 = 3,\ f(x_0) = 0,\ T = [3; 0]$$

$$f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}$$

$$f'(3) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(3-3)^2}} = \left[\frac{-1}{0}\right] \cdots \text{tento výraz není definován}$$

Hodnotu $f'(3)$ vypočteme podle definice derivace funkce v bodě.

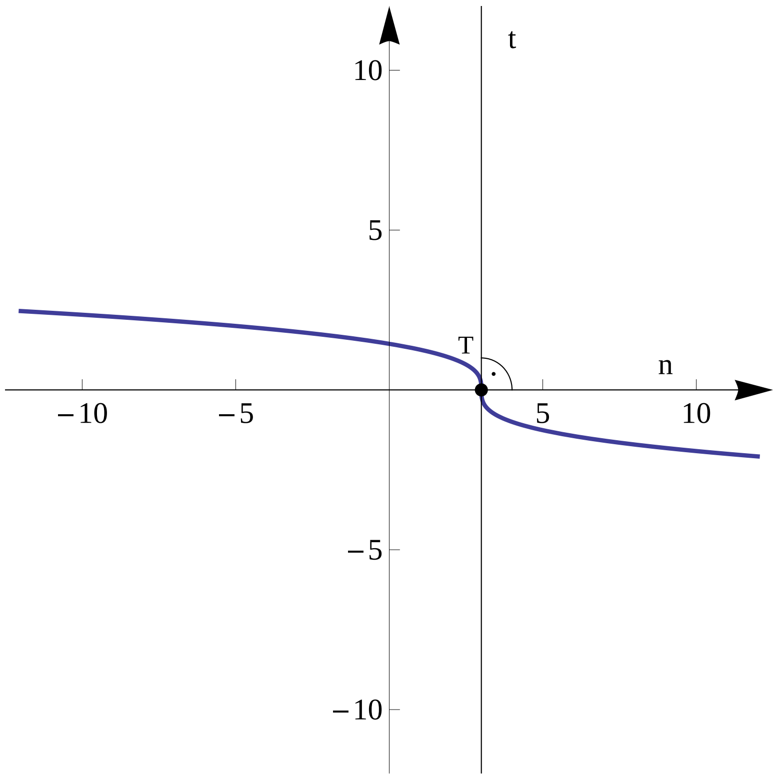
$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{3-(3+h)} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{-h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt[3]{h^2}} = -\infty$$

Znamená to, že tečna je rovnoběžná s osou y, prochází bodem $T = [3; 0]$ a má rovnici

$$t : x = 3$$

Potom normála n, která je kolmá na tečnu a prochází též bodem $T = [3; 0]$ má rovnici

$$n : y = 0$$



Obr. 5.5 Tečna a normála ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[3]{3-x}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Derivaci funkce v bodě x_0 lze geometricky interpretovat jako směrnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$, která prochází bodem $(x_0, f(x_0))$.
Rovnice tečny má pak tvar $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Rovnice normály (tj. přímky kolmé na tečnu) je $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

1. *Určete rovnici tečny t a normály n grafu funkce f v bodě T.*
   - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{x};\ T = [1; ?]$

     $\left[\begin{array}{l} t:\ y = 3x - \frac{7}{2} \\ n:\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} \end{array}\right]$
   - $f(x) = x^2 - 4;\ T = [0; ?]$

     $\left[\begin{array}{l} t:\ y = -4 \\ n:\ x = 0 \end{array}\right]$
   - $f(x) = x^2 - x;\ T = [3; ?]$

     $\left[\begin{array}{l} t:\ y = 5x - 9 \\ n:\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{33}{5} \end{array}\right]$
   - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2;\ T = [2; ?]$

     $\left[\begin{array}{l} t:\ y = -4x \\ n:\ y = \frac{1}{4}x - \frac{17}{2} \end{array}\right]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Kapitola 6

L' Hospitalovo pravidlo

Po prostudování kapitoly budete umět:

- spočítat limitu neurčitých výrazů typu ”$\frac{0}{0}$”nebo ”$\frac{\infty}{\infty}$”;
- spočítat limitu neurčitých výrazů typu ”$0 \cdot \infty$”, ”$\infty - \infty$”, ”0^0”.

Klíčová slova:

Neurčité výrazy, typ neurčitého výrazu, derivace, l’Hospitalovo pravidlo.

Příklad 6.1 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

■

Příklad 6.2 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.

Řešení

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to e} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}$$

■

Příklad 6.3 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x+3} = \frac{4}{7}$$

■

Příklad 6.4 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}}{1} = \frac{2}{3}$$

■

Příklad 6.5 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 3\sin 3x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$$

■

Příklad 6.6 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x+3}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x+3}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{\frac{-1}{(x+3)^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2(x+3)^2}{x^2-1} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{4(x+3)}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{2} = 2$$

■

Příklad 6.7 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

■

Příklad 6.8 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - 6x}{4x - 8}$.

Řešení

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - 6x}{4x - 8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{6x - 6}{4} = \frac{+\infty}{4} = +\infty$$

■

Příklad 6.9 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x \cdot \ln x}{x^2 - 1}$.

Řešení

$$\lim_{x\to 1} \frac{x \cdot \ln x}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

■

Příklad 6.10 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$.

Řešení

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2 \cdot e^{2x}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{2x}}{1} = +\infty$$

■

Příklad 6.11 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{1+e^x} \cdot e^x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{e^x} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} 1 = 1$$

■

Příklad 6.12 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{4^x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{4^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{10x}{4^x \ln 4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{10}{4^x \ln^2 4} = \left[\frac{10}{+\infty}\right] = 0$$

■

Příklad 6.13 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0$$

■

Příklad 6.14 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\ln x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$$

■

Příklad 6.15 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

Řešení

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} x = 0$$

■

Příklad 6.16 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{4x^3}{x^2-5} - \frac{3}{x}\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x^3}{x^2-5} - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{x^2-5} - \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{x^2-5} - 0 =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{x^2-5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} 6x = +\infty$$

■

Příklad 6.17 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}$.

Řešení

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{1}=\left[\frac{-1}{+\infty}\right]=0$$

■

V následujících příkladech je nutné nejdříve limitovaný výraz upravit tak, aby byly splněny předpoklady l'Hospitalova pravidla.

Příklad 6.18 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt[3]{x}\cdot\ln x\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt[3]{x}\cdot\ln x\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}}=-3\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}=0$$

■

Příklad 6.19 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to0}(x\cdot\operatorname{cotg}2x)$.

Řešení

$$\lim_{x\to0}(x\cdot\operatorname{cotg}2x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{tg}2x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{2}{\cos^2 2x}}=\frac{1}{2}$$

■

Příklad 6.20 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to1^-}\left[\ln x\cdot\ln(1-x)\right]$.

Řešení

$$\lim_{x\to1^-}\left[\ln x\cdot\ln(1-x)\right]=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}}=$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x\cdot\ln^2 x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\ln^2 x+x\cdot2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-1}=0$$

■

Příklad 6.21 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x-1}{2}\cdot\ln\frac{x-9}{x+3}\right]$.

Řešení

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-1}{2}\cdot\ln\frac{x-9}{x+3}\right]=(\infty\cdot0)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x-9}{x+3}}{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{l'H}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+3}{x-9}\cdot\frac{x+3-x+9}{(x+3)^2}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2\cdot12}{(x-9)(x+3)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{l'H}}{=}-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2(x-1)\cdot12}{x+3+x-9}=$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{24x-24}{2x-6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{l'H}}{=}-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{24}{2}=-\frac{1}{2}\cdot12=-6$$

■

Příklad 6.22 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{l'H}{=}\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\cdot\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{l'H}{=}\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{2}$$

■

Příklad 6.23 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{l'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}=$$
$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{l'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

■

Příklad 6.24 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x\operatorname{tg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{l'H}{=}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2x}}{\operatorname{tg}x+x\cdot\frac{1}{\cos^2x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos^2x-1}{\cos^2x}}{\frac{\sin x\cdot\cos x+x}{\cos^2x}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{\sin x\cdot\cos x+x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{l'H}{=}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\cos x\sin x}{\cos^2x-\sin^2x+1}=\frac{0}{2}=0$$

■

Příklad 6.25 *Spočítejte* $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$.

Řešení

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to2}\frac{4-x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{l'H}{=}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{4}$$

■

Poznámka.
Některé z příkladů 6. kapitoly lze spočítat úpravami limitované funkce jako v kapitole 1 a naopak - mnohé limity uvedené v kapitole 1 lze určit pomocí l'Hospitalova pravidla.

L'Hospitalovo pravidlo se užívá k určování limit výrazů typu "$\frac{0}{0}$"nebo "$\frac{\infty}{\infty}$". L'Hospitalovo pravidlo můžeme také použít při určování limit výrazů typu "$0\cdot\infty$", "$\infty-\infty$", "0^0", "∞^0"nebo "1^∞"ovšem až po úpravě, která výraz převede na typ "$\frac{0}{0}$"nebo "$\frac{\infty}{\infty}$".:

- "$0\cdot\infty$"upravíme takto $u\cdot v=\frac{u}{\frac{1}{v}}$ na typ "$\frac{0}{0}$",
- "$\infty-\infty$"upravíme takto $u-v=\frac{1}{\frac{1}{u}}-\frac{1}{\frac{1}{v}}=\frac{\frac{1}{v}-\frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}}$ na typ "$\frac{0}{0}$",
- "0^0", "∞^0", "1^∞"pomocí úpravy $u^v=e^{v\ln u}$ převedeme na typ "$e^{0\cdot\infty}$".

1. *Užitím l'Hospitalova pravidla spočtěte dané limity.*

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1+\sin x}{x\cdot cosx}$ $[2]$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{5\ln(x-1)}{\ln(2x-2)}$ $[5]$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ $[2]$
- $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-x^2-20x}{2x^2-10x}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x^2+6}{2x^2+x}$ $[+\infty]$
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{3}{5}}-1}$ $\left[\frac{10}{9}\right]$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\arcsin x-x}$ $[-1]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Kapitola 7

Extrémy

Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozhodnout, kdy je funkce rostoucí a kdy je klesající,
- najít body lokálního maxima a lokálního minima, pokud existují,
- najít body, ve kterých má funkce lokální maximum a lokální minimum.

Klíčová slova:

První derivace, stacionární bod, lokální maximum, lokální minimum, Weierstrassova věta, globální maximum, globální minimum.

a) Lokální extrémy a intervaly monotónnosti

Příklad 7.1 *Určete lokální extrémy a intervaly monotónnosti funkce* $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$.

Řešení

$D(f) = R.$

$f'(x) = \dfrac{1}{4}4x^3 - \dfrac{1}{3}3x^2 - 2x = x^3 - x^2 - 2x;\ D(f') = R.$

Body podezřelé z lokálního extrému:

(A) z nutné podmínky: $f'(x) = 0$

$x^3 - x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2)(x+1) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$

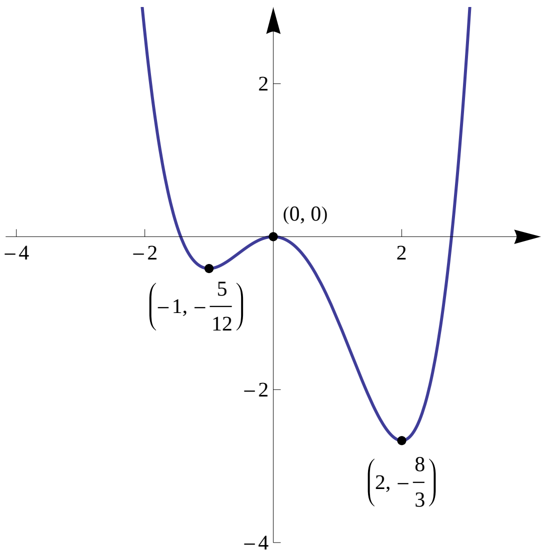
(B) z $D(f')$: $\emptyset$ (žádné nejsou)

$x \in$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{8}{3}$	$\nearrow$
		o. l. min.		o. l. max.		o. l. min.	

$f(-1) = \dfrac{(-1)^4}{4} - \dfrac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - 1 = \dfrac{3+4-12}{12} = -\dfrac{5}{12} \quad f(0) = 0$

$f(2) = \dfrac{2^4}{4} - \dfrac{2^3}{3} - 2^2 = \dfrac{16}{4} - \dfrac{8}{3} - 4 = -\dfrac{8}{3}$

Funkce je rostoucí na intervalech $(-1, 0)$ a $(2, \infty)$ a klesající na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, 2)$. Funkce má ostré lokální minimum $-\frac{5}{12}$ v bodě -1 a $-\frac{8}{3}$ v bodě 2 a ostré lokální maximum 0 v bodě 0.



Obr. 7.1 Lokální extrémy funkce $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$

Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 7.2 *Určete lokální extrémy a intervaly monotónnosti funkce* $f(x) = \frac{x^4+4x^3-8x^2}{4}$.

Řešení

$D(f) = R.$

$f'(x) = \dfrac{1}{4}(4x^3 + 12x^2 - 16x) = x^3 + 3x^2 - 4x;\ D(f') = R.$

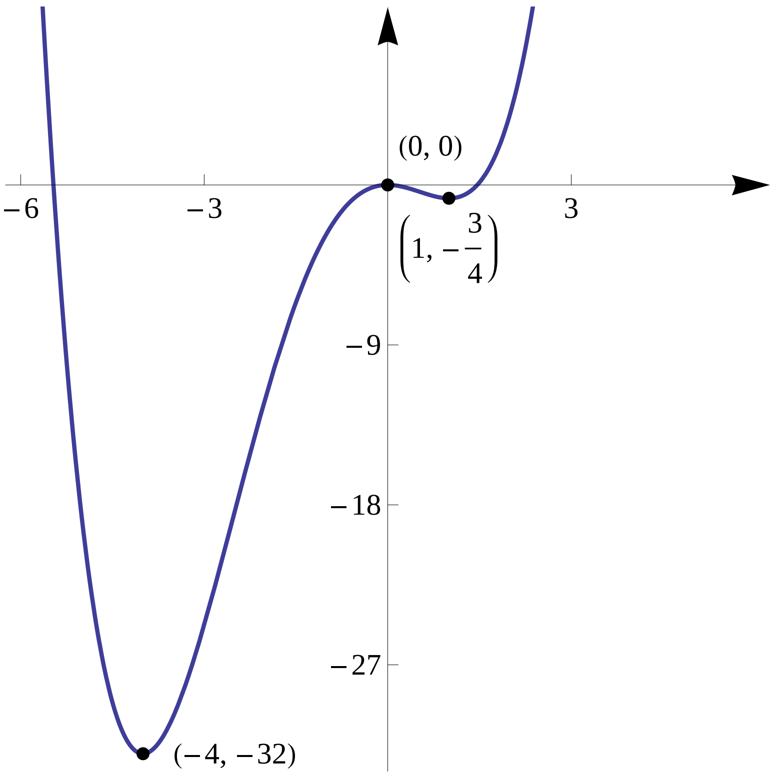
Body podezřelé z lokálního extrému:

(A) z nutné podmínky: $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+4) = 0$
$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -4$

(B) z $D(f')$: $\emptyset$

$x \in$	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-32	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$
		o. l. min.		o. l. max.		o. l. min.	

Funkce je klesající na intervalech $(-\infty, -4)$ a $(0, 1)$ a rostoucí na intervalech $(-4, 0)$ a $(1, \infty)$.
Funkce má ostré lokální minimum -32 v bodě -4 a $-\frac{3}{4}$ v bodě 1.
Funkce má ostré lokální maximum 0 v bodě 0.



Obr. 7.2 Lokální extrémy funkce $f(x) = \frac{x^4+4x^3-8x^2}{4}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 7.3 *Určete lokální extrémy a intervaly monotónnosti funkce* $f(x) = 10x^3 - 6x^5$.

Řešení

$D(f) = R.$

$f'(x) = 30x^2 - 30x^4;\ D(f') = R.$

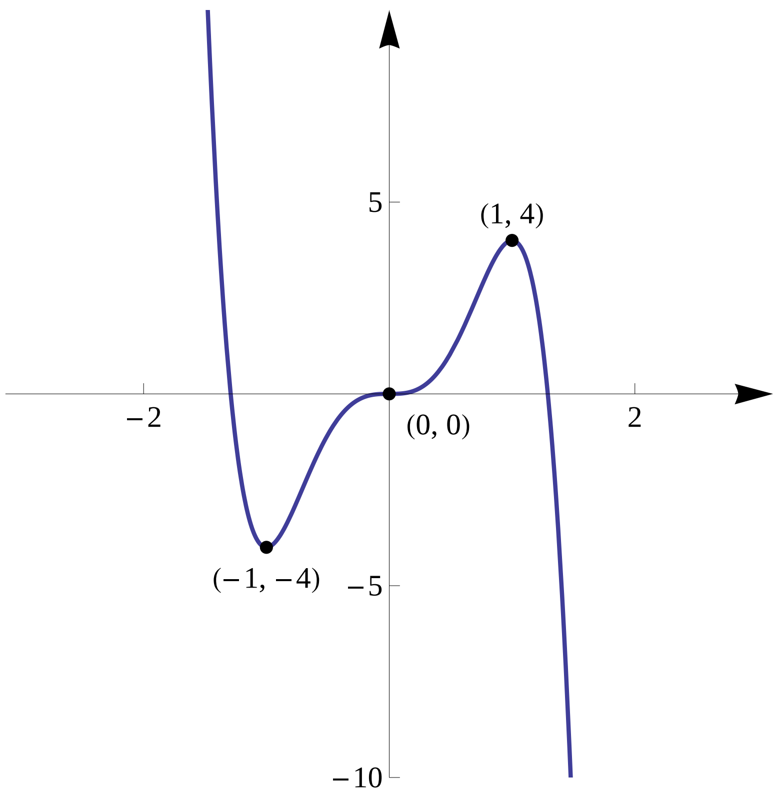
Body podezřelé z lokálního extrému:

(A) z nutné podmínky: $f'(x) = 0 \iff 30(x^2 - x^4) = 0 \Rightarrow 30x^2(1 - x^2) = 0$
$x = 0$, $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

(B) z $D(f') : \emptyset$

$x \in$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$
		o. l. min.		extrém nenastane		o. l. max.	

Funke je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$ a klesající na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$.
Funkce má ostré lokální minimum -4 v bodě -1 a ostré lokální maximum 4 v bodě 1.



Obr. 7.3 Lokální extrémy funkce $f(x) = 10x^3 - 6x^5$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 7.4 *Určete lokální extrémy a intervaly monotónnosti funkce* $f(x) = x - \frac{1}{2x^2}$.

Řešení

$D(f) = R\setminus\{0\}$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = 1 + \dfrac{1}{x^3};\ D(f') = R\setminus\{0\}$.

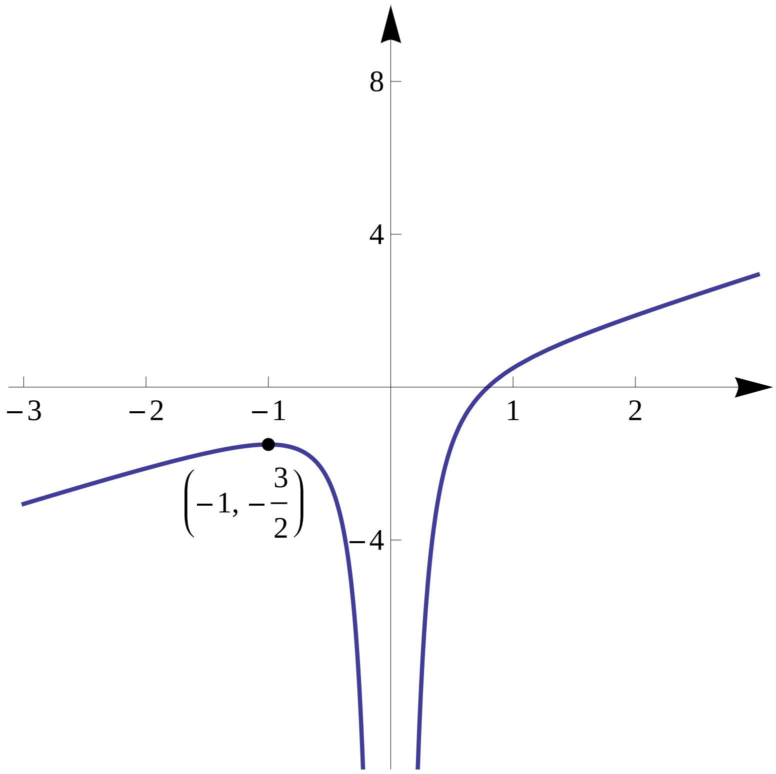
Body podezřelé z lokálního extrému:

(A) z nutné podmínky: $f'(x) = 0 \iff 1 + \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{x^3+1}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

(B) z $D(f')$: $x = 0$, ale $0 \notin D(f)$, proto extrém nemůže v tomto bodě nastat

$x \in$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\neg\exists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\neg\exists$	$\nearrow$
		o. l. max.		extrém nenastane	

Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, \infty)$ a klesající na intervalu $(-1, 0)$.
Funkce má ostré lokální maximum $-\frac{3}{2}$ v bodě -1.



Obr. 7.4 Lokální extrémy funkce $f(x) = x - \frac{1}{2x^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 7.5 *Určete lokální extrémy a intervaly monotónnosti funkce* $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Řešení

$D(f) = R.$
$f'(x) = 3x^2 - 3;\ D(f') = R.$

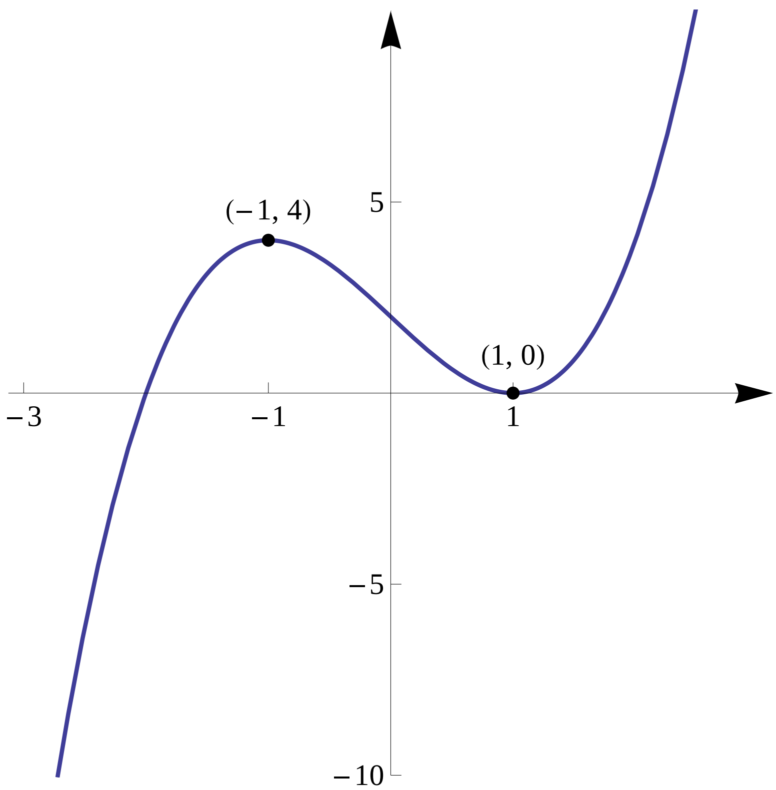
Body podezřelé z lokálního extrému:

(A) z nutné podmínky: $f'(x) = 0 \iff 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

(B) z $D(f')$: $\emptyset$

$x \in$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$
		o. l. max.		o. l. min.	

Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a klesající na intervalu $(-1, 1)$.
Funkce má ostré lokální maximum 4 v bodě -1 a ostré lokální minimum 0 v bodě 1.



Obr. 7.5 Lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 7.6 *Určete lokální extrémy a intervaly monotónnosti funkce* $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4x)^2}$.

$D(f) = R.$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-4x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x-4) = \frac{4}{3}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x}};\ D(f') = R \setminus \{0, 4\}.$$

Body podezřelé z lokálního extrému:

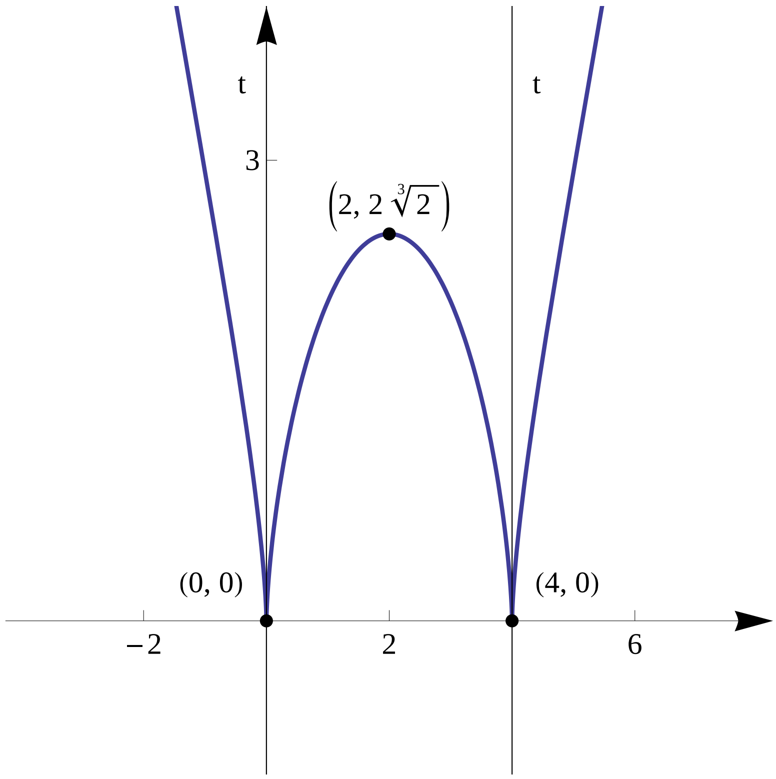
(A) z nutné podmínky: $f'(x) = 0 \iff \frac{4}{3}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x}} = 0 \Rightarrow x = 2$

(B) z $D(f') : x = 0, x = 4$

$x \in$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$\neg\exists$	$+$	0	$-$	$\neg\exists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

o. l. min. o. l. max. o.l.min

Funkce je rostoucí na intervalech $(0, 2)$ a $(4, \infty)$ a klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, 4)$. Funkce má ostré lokální maximum $2\sqrt[3]{2}$ v bodě 2 a ostré lokální minimum 0 v bodech 0 a 4.



Obr. 7.6 Lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4x)^2}$

Zdroj: Vlastní zpracování

Poznámka.

Vypočítáme limitu $f'(x)$ v bodech 0 a 4.

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x}} = \left[\frac{-2}{0}\right] \text{ a } \lim_{x\to 4} f'(x) = \frac{4}{3}\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x-4x}} = \left[\frac{2}{0}\right]$$

Výpočtem jednostranných limit v bodech 4 a 0 zjistíme, že $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ani $\lim_{x\to 4} f'(x)$ neexistuje. Jednostranné limity jsou totiž nevlastní a různé. Znamená to, že jednostranné tečny v bodech $[0,0]$ a $[4,0]$ splývají, jsou rovnoběžné s osou y a mají rovnice $x=0$ a $x=4$, přičemž $y \geq 0$.

■

b) Globální extrémy

Příklad 7.7 *Najděte globální extrémy (tedy největší a nejmenší hodnotu) funkce* $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$ *na intervalech* $\alpha)\ \langle -2, 2\rangle$, $\beta)\ \langle -1, 3\rangle$, $\gamma)\ \langle 2, 4\rangle$.

Řešení

$\alpha)$ Interval $\langle -2, 2\rangle$.

1) Vyhledáme všechny body podezřelé z globálního extrému.

a) Body podezřelé z lokálního extrému na intervalu $(-2, 2)$.

$$f'(x) = \frac{4x^3}{4} - 2x = x^3 - 2x;\ D(f') = R$$

(A) $f'(x) = 0$
$x^3 - 2x = 0$
$x(x^2 - 2) = 0$
$x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

(B) z $D(f') \cdots \emptyset$

Zjistíme, zda vyhledané body patří do intervalu $(-2, 2)$.
Body $0, -\sqrt{2}, \sqrt{2} \in (-2, 2)$.

b) Krajní body intervalu: -2 a 2.

2) Vypočteme funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech.

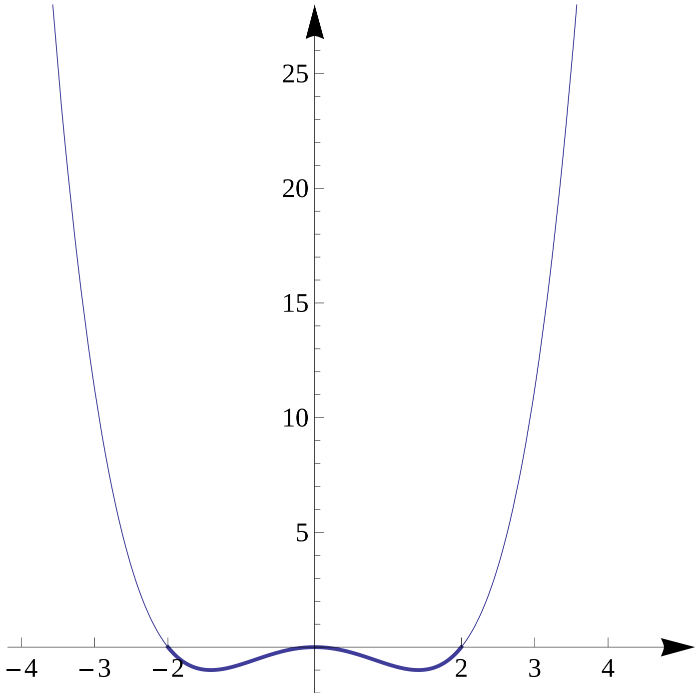
$$f(-2) = \frac{(-2)^4}{4} - (-2)^2 = 0 \quad f(-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2})^4}{4} - (-\sqrt{2})^2 = \frac{4}{4} - 2 = -1$$

$$f(2) = \frac{2^4}{4} - 2^2 = 0 \quad f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^4}{4} - (\sqrt{2})^2 = -1$$

$$f(0) = 0$$

3) Vyhledáme největší funkční hodnotu, to je 0, a nejmenší funkční hodnotu, to je -1.

Závěr: Funkce má globální maximum 0 v bodech $-2, 0, 2$.
Funkce má globální minimum -1 v bodech $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}$.



Obr. 7.7 Graf funkce $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$
Zdroj: Vlastní zpracování

$\beta)$ Interval $\langle -1, 3\rangle$.

1) Vyhledáme všechny body podezřelé z globálního extrému.
   a) Body podezřelé z lokálního extrému na intervalu $(-1, 3)$.

      (A) $x_1 = 0$
      $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

      (B) $\emptyset$

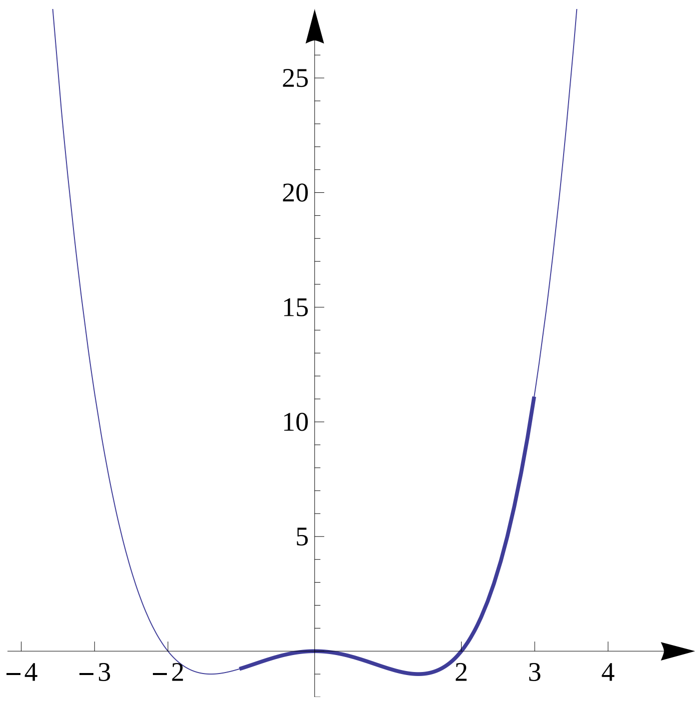
      Pozor**!** Bod $-\sqrt{2} \notin (-1, 3)$, proto jej z dalších úvah vypustíme.
   b) Krajní body intervalu: -1 a 3.
2) Vypočteme funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech.

$$f(-1) = \frac{(-1)^4}{4} - (-1)^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \qquad f(0) = 0$$

$$f(3) = \frac{3^4}{4} - 3^2 = \frac{81}{4} - 9 = \frac{45}{4} \qquad f(\sqrt{2}) = -1$$

3) Vyhledáme největší funkční hodnotu, to je $\frac{45}{4}$ a nejmenší funkční hodnotu, to je -1.

   Závěr: Funkce má globální maximum $\frac{45}{4}$ v bodě 3.
   Funkce má globální minimum -1 v bodě $\sqrt{2}$.



Obr. 7.8 Graf funkce $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$ na intervalu $\langle -1, 3 \rangle$
Zdroj: Vlastní zpracování

$\gamma)$ Interval $\left\langle 2, \frac{7}{2} \right\rangle$.

1) Vyhledáme všechny body podezřelé z globálního extrému.
   a) Body podezřelé z lokálního extrému na intervalu $\left(2, \frac{7}{2}\right)$.

      (A) $x_1 = 0$
      $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

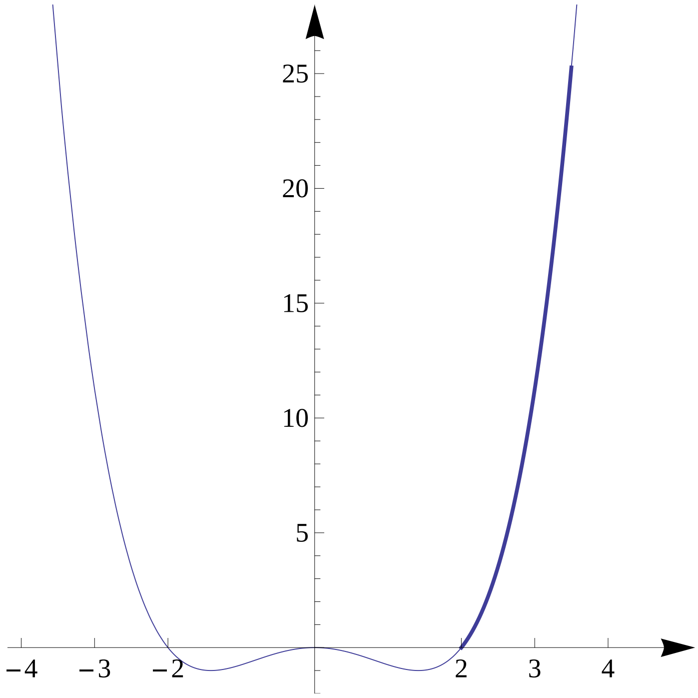
      (B) $\emptyset$

      Pozor**!** Body $0, -\sqrt{2}, \sqrt{2} \notin \left(2, \frac{7}{2}\right)$, proto je z dalších úvah vypouštíme.
   b) Krajní body intervalu: 2 a $\frac{7}{2}$.
2) Vypočteme funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech.

$$f(2) = 0 \quad f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^4}{4} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1617}{64} \doteq 25,26$$

3) Vyhledáme největší funkční hodnotu, to je $25,26$ a nejmenší funkční hodnotu, to je 0.

   Závěr: Funkce má globální maximum $25,26$ v bodě $\frac{7}{2}$.
   Funkce má globální minimum 0 v bodě 2.



Obr. 7.9 Graf funkce $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$ na intervalu $\left\langle 2, \frac{7}{2} \right\rangle$
Zdroj: Vlastní zpracování

Poznámka.
Všimněte si, že funkce má na svém $D(f)$ globální minimum -1 v bodech $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}$, globální maximum nemá.
Srovnejte grafy pro jednotlivé intervaly a uvědomte si, kdy nastává globální extrém v bodě lokálního extrému a kdy nastává v krajním bodě zadaného intervalu. Je zřejmé, že hodnota globálního extrému závisí na zadaném intervalu.

■

Pomocí 1. derivace funkce lze rozhodnout o monotonii funkce. V bodě x_0, v němž $f'(x_0) > 0$ je funkce f rostoucí. V bodě x_0, v němž $f'(x_0) < 0$ je funkce f klesající.
Bod, ve kterém první derivace funkce f nabývá nulové hodnoty se nazývá stacionární bod. V tomto bodě může mít funkce lokální extrém. Pokud je funkce ve stacionárním bodě spojitá, v levém okolí stacionárního bodu je rostoucí a v pravém okolí stacionárního bodu je klesající, pak tento bod je bodem lokální maxima funkce. Pokud je funkce je funkce ve stacionárním bodě spojitá, v levém okolí stacionárního bodu klesající a v pravém okolí stacionárního bodu rostoucí, pak funkce má v tomto stacionárním bodě lokální minimum.
Na základě Weierstrassovy věty má každá funkce spojitá na uzavřeném intervalu globální minimum i globální maximum. Tyto extrémy se nacházejí buď v bodech lokálních extrémů uvnitř nebo v krajních bodech zadaného intervalu. Vybíráme je v závislosti na funkčních hodnotách v těchto bodech.

1. *Najděte intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce.*
   - $f(x) = \frac{x^4-8x^2}{4}$

     [o. l. min. -4 v bodech -2 a 2
     o. l. max. 0 v bodě 0
     f je rostoucí na $(-2,0)$ a $(2,\infty)$
     f je klesající na $(-\infty,-2)$ a $(0,2)$]
   - $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

     [o. l. min. -1 v bodě 0
     f je rostoucí na $(0,\infty)$
     f je klesající na $(-\infty,0)$]
2. *Najděte globální extrémy funkce* $f(x) = \frac{4x^3-x^4}{5}$ *na intervalu*
   - $\langle 2,4\rangle$

     [globální minimum $-\frac{48}{5}$ v bodě -2
     globální maximum $\frac{27}{5}$ v bodě 3]
   - $\langle -1,2\rangle$

     [globální minimum -1 v bodě -1
     globální maximum $\frac{16}{5}$ v bodě 2]

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Kapitola 8

Inflexní body, intervaly konvexity a konkávity

Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozhodnout, kdy je funkce konvexní a kdy je konkávní;
- najít inflexní body.

Klíčová slova:

Druhá derivace, inflexní bod, konvexní funkce, konkávní funkce.

Příklad 8.1 *Určete inflexní body a intervaly ryzí konvexity a ryzí konkávity pro funkci* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

Řešení

$D(f) = R.$
$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x;\ D(f') = R.$
$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24;\ D(f'') = R.$

Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x) = 0 \iff 12(x^2 - 3x + 2) = 0$

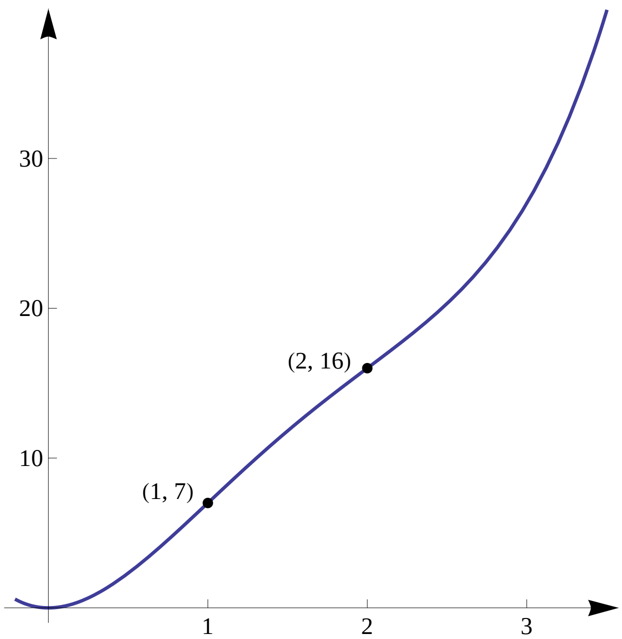
$$(x-1)(x-2) = 0$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

(B) z $D(f'')$: $\emptyset$

$x \in$	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	7	$\cap$	16	$\cup$
		inf. bod		inf. bod	

$f(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 = 7$
$f(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 = 16 - 48 + 48 = 16$

Funkce je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(2, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(1, 2)$.
Funkce má 2 inflexní body: $I_1 = [1, 7]$ a $I_2 = [2, 16]$.



Obr. 8.1 Inflexní body funkce $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 8.2 *Určete inflexní body a intervaly ryzí konvexity a ryzí konkávity funkce* $f(x) = \frac{x^4}{12} - 2x^2$.

Řešení

$D(f) = R.$

$f'(x) = \dfrac{1}{12} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x;\ D(f') = R.$

$f''(x) = \dfrac{3}{3}x^2 - 4 = x^2 - 4;\ D(f'') = R.$

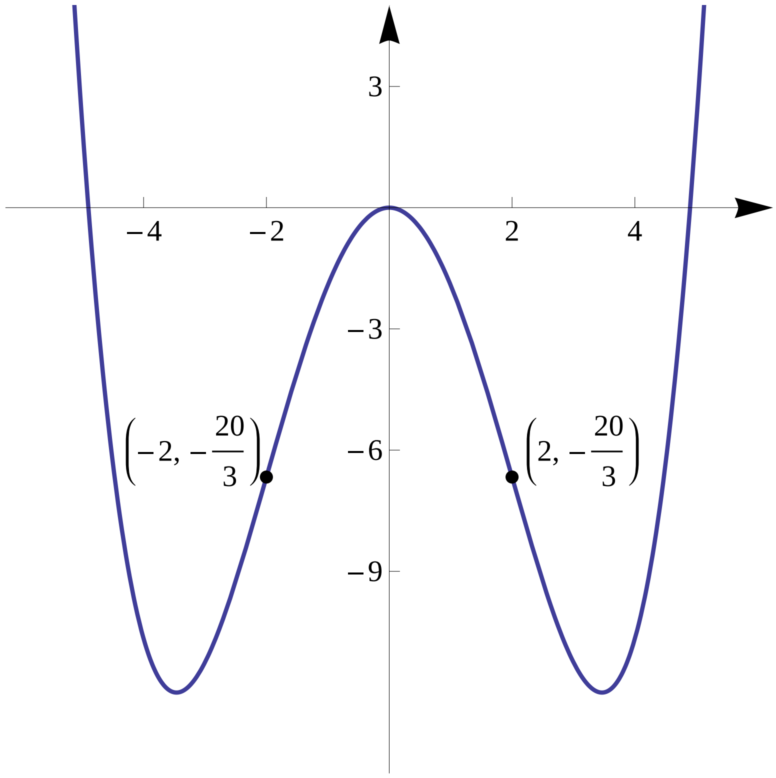
Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

(B) z $D(f'') : \emptyset$

$x \in$	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$-\frac{20}{3}$	$\cap$	$-\frac{20}{3}$	$\cup$
		inf. bod		inf. bod	

Funkce je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-2, 2)$. Funkce má 2 inflexní body: $I_1 = \left[-2, -\frac{20}{3}\right]$ a $I_2 = \left[2, -\frac{20}{3}\right]$.



Obr. 8.2 Inflexní body funkce $f(x) = \frac{x^4}{12} - 2x^2$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 8.3 *Určete inflexní body a intervaly ryzí konvexity a ryzí konkávity pro funkci* $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 10x + 15$.

Řešení

$D(f) = R.$
$f'(x) = 15x^4 - 30x^2 + 10;\ D(f') = R.$
$f''(x) = 60x^3 - 60x;\ D(f'') = R.$

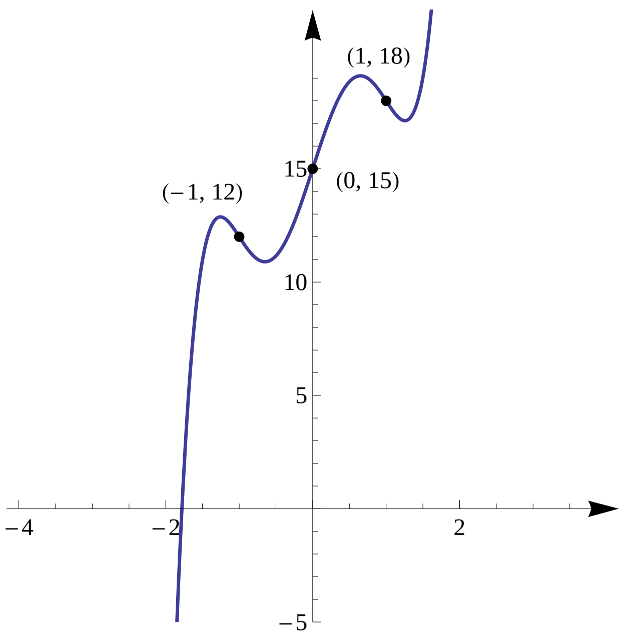
Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x) = 0 \iff$
$$\begin{aligned} &60x^3 - 60x = 0 /:60 \\ &x^3 - x = 0 \\ &x(x^2 - 1) = 0 \\ &x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1 \end{aligned}$$

(B) z $D(f'') : \emptyset$

$x \in$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	12	$\cup$	15	$\cap$	18	$\cup$
		inf. bod		inf. bod		inf. bod	

Funkce je ryze konkávní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$ a ryze konvexní na intervalech $(-1, 0)$ a $(1, \infty)$.
Funkce má 3 inflexní body: $I_1 = [-1, 12]$, $I_2 = [0, 15]$ a $I_3 = [1, 18]$.



Obr. 8.3 Inflexní body funkce $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 10x + 15$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 8.4 *Určete inflexní body a intervaly ryzí konvexity a ryzí konkávity funkce* $f(x) = 12\frac{x+2}{x^2}$.

Řešení

$D(f) = R\setminus\{0\}$.

$$f'(x) = 12 \cdot \frac{1 \cdot x^2 - (x+2)\cdot 2x}{(x^2)^2} = 12\frac{x^2 - 2x^2 - 4x}{x^4} = -12\frac{x(x+4)}{x^4} =$$

$$= -12\frac{x+4}{x^3};\ D(f') = R\setminus\{0\}.$$

$$f''(x) = -12\frac{1 \cdot x^3 - (x+4)\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = -12\frac{x^3 - 3x^3 - 12x^2}{x^6} = 24\frac{x+6}{x^4};\ D(f'') = R\setminus\{0\}.$$

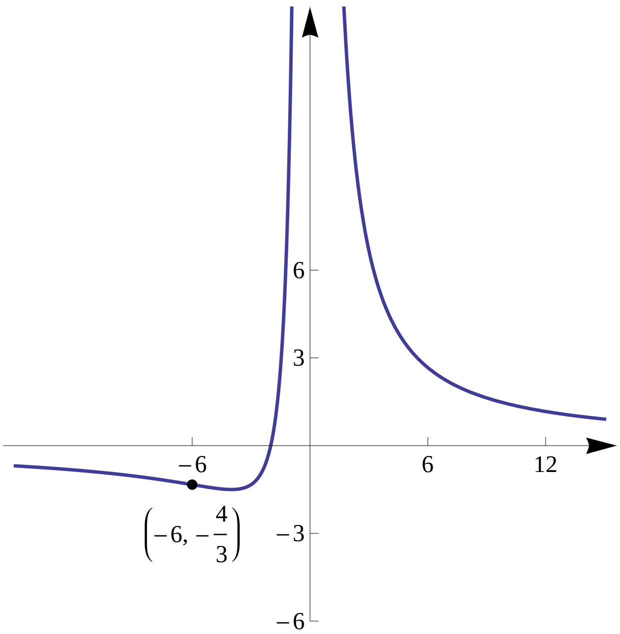
Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 24\frac{x+6}{x^4} = 0 \Rightarrow x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

(B) z $D(f'') : x = 0$, protože $0 \notin D(f)$, inflexe v tomto bodě nemůže nastat

$x \in$	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\neg\exists$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$-\frac{4}{3}$	$\cup$	$\neg\exists$	$\cup$
		inf. bod		inflexe neexistuje	

Funkce je ryze konkávní na intervalu $(-\infty, -6)$ a ryze konvexní na intervalech $(-6, 0)$ a $(0, \infty)$. Funkce má 1 inflexní bod $I = \left[-6, -\frac{4}{3}\right]$.



Obr. 8.4 Inflexní bod funkce $f(x) = 12\frac{x+2}{x^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 8.5 *Určete inflexní body a intervaly ryzí konvexity a ryzí konkávity pro funkci* $f(x) = \frac{x^4}{12} - 2x^2 + 3x - 1$.

Řešení

$D(f) = R$.

$f'(x) = \dfrac{1}{12} \cdot 4x^3 - 4x + 3 = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x + 3;\ D(f') = R$.

$f''(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 - 4 = x^2 - 4;\ D(f'') = R$.

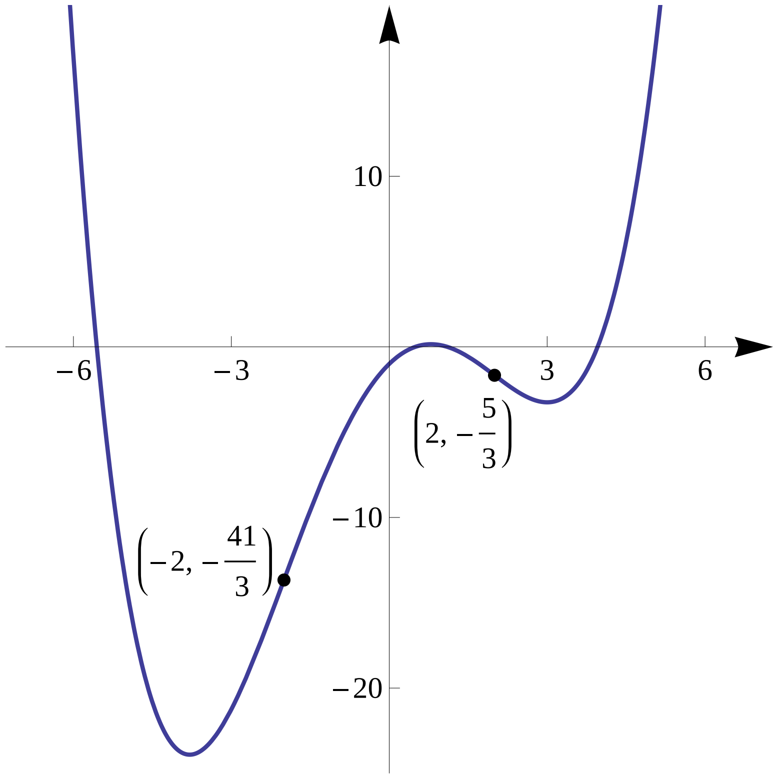
Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

(B) z $D\left(f''\right) : \emptyset$

$x \in$	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$-\frac{41}{3}$	$\cap$	$-\frac{5}{3}$	$\cup$
		inf. bod		inf. bod	

Funkce je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-2, 2)$. Funkce má 2 inflexní body: $I_1 = \left[-2, -\frac{41}{3}\right]$ a $I_2 = \left[2, -\frac{5}{3}\right]$.



Obr. 8.5 Inflexní body funkce $f(x) = \frac{x^4}{12} - 2x^2 + 3x - 1$
Zdroj: Vlastní zpracování

■

Příklad 8.6 *Určete inflexní body a intervaly ryzí konvexity a ryzí konkávity funkce* $f(x) = x^4 + 4x^3$.

Řešení

$D(f) = R.$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2;\ D(f') = R.$

$f''(x) = 12x^2 + 24x;\ D(f'') = R.$

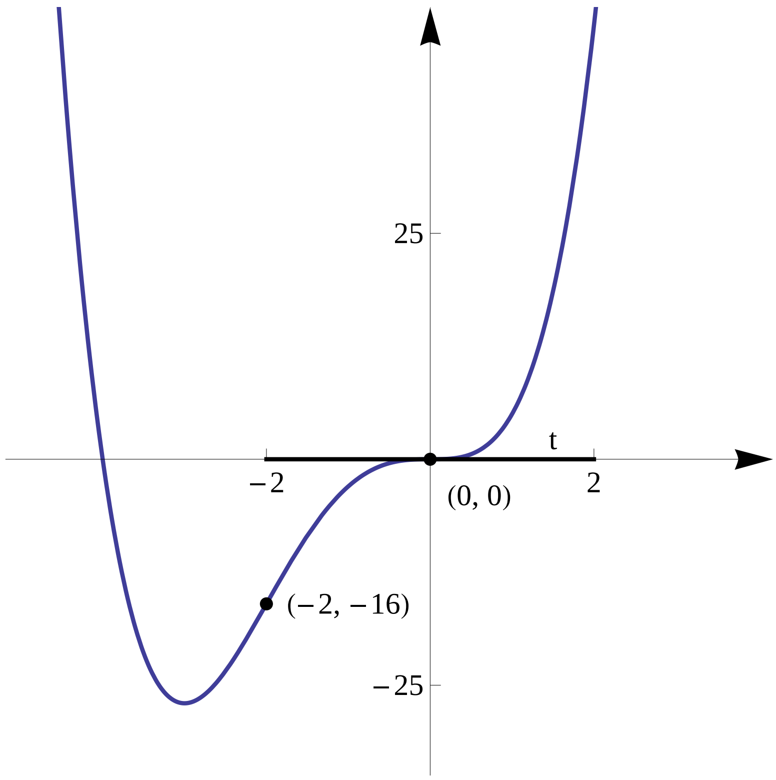
Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x) = 0 \iff 12x(x+2) = 0$
$x_1 = 0,\ x_2 = -2$

(B) z $D(f'') : \emptyset$

$x \in$	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	-16	$\cap$	0	$\cup$
		inf. bod		inf. bod	

Funkce je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(0, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-2, 0)$. Funkce má 2 inflexní body: $I_1 = [-2, -16]$ a $I_2 = [0, 0]$.



Obr. 8.6 Inflexní body funkce $f(x) = x^4 + 4x^3$
Zdroj: Vlastní zpracování

Poznámka.
Inflexní tečna t v bodě I_2 má rovnici $y = 0$, protože $f'(0) = 0$, a splývá tedy s osou x.

■

Příklad 8.7 *Určete inflexní body a intervaly ryzí konvexity a ryzí konkávity funkce* $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$.

Řešení

$D(f) = R.$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}};\ D(f') = R\backslash\{-2\}.$

$f''(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(x+2)^{\frac{-5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}};\ D(f'') = R\backslash\{-2\}.$

Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}} = 0 \Rightarrow -2 = 0$, což neplatí.

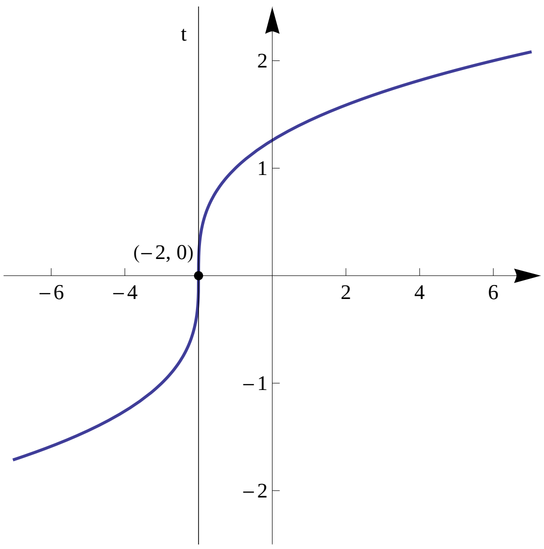
Pro žádné $x \in R$ není $f''(x) = 0$.

(B) z $D(f'') : x = -2$ a přitom $-2 \in D(f)$.

Tedy inflexe v bodě -2 může nastat

$x \in$	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$\neg\exists$	$-$
$f(x)$	$\cup$	0	$\cap$
		inf. bod	

Funkce je ryze konvexní na intervalu $(-\infty, -2)$ a ryze konkávní na intervalu $(-2, \infty)$.
Funkce má 1 inflexní bod: $I = [-2, 0]$.



Obr. 8.7 Inflexní bod funkce $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Poznámka.
Vypočteme $\lim\limits_{x\to -2} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} = +\infty$.

Znamená to, že inflexní tečna t je rovnoběžná s osou y a má rovnici $x = -2$.

Všimněte si, že inflexní tečna přechází v bodě dotyku z jedné strany grafu funkce (křivky) na druhou. Pamatujte si, že tuto vlastnost mají všechny inflexní tečny.

■

Pomocí 2. derivace funkce lze rozhodnout o tom, kdy je funkce konvexní (tzn. její graf je nad tečnou) a kdy je funkce konkávní (tzn. Její graf je pod tečnou). Pokud má funkce f v bodě x_0 nenulovou druhou derivaci a pokud $f''(x_0) > 0$ je funkce f v bodě x_0 konvexní. Jestliže ale $f''(x_0) < 0$ je funkce f v bodě x_0 konkávní. Bod, ve kterém je funkce f definovaná a ve kterém se funkce f se mění z konvexní na konkávní, se nazývá inflexní bod.

1. *Určete inflexní body a intervaly konvexity a konkávity.*
   - $f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{5}$

     [inflexní body: $I_1 = [0, 0]$, $I_2 = \left[2, \frac{16}{5}\right]$
     f je konvexní na $(0, 2)$
     f je konkávní na $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$]
   - $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$

     [inflexní bod $I = [0, 0]$
     f je konvexní na $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$
     f je konkávní na $(-1, 0)$ a $(1, \infty)$]

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Kapitola 9

Průběh funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- analyzovat průběh libovolné reálné funkce jedné proměnné;
- graficky znázornit zadanou funkci.

Klíčová slova:

Definiční obor, obor hodnot, periodicita funkce, monotonie funkce, stacionární bod, extrémy funkce, konvexní funkce, konkávní funkce, inflexní bod, asymptota bez směrnice, asymptota se směrnicí.

Příklad 9.1 *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$.

Řešení

1. $D(f) = R$.

   Parita: $f(-x) = \frac{(-x)^4}{4} - (-x)^2 = \frac{x^4}{4} - x^2 = f(x) \cdots$ funkce je sudá, její graf je osově souměrný podle osy y.

   Průsečíky s osou x: $\frac{x^4}{4} - x^2 = 0$

   $$x^2\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 0$$

   $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$

   S osou x má graf 3 průsečíky: $P_1 = [0; 0]$ (je zároveň i průsečíkem s osou y), $P_2 = [2; 0]$, $P_3 = [-2; 0]$.

$x \in$	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
graf f	nad osou x	pod osou x	pod osou x	nad osou x

2. Funkce je spojitá, protože je rozdílem dvou spojitých funkcí, nemá vertikální asymptoty. Chování funkce v nevlastních bodech (v krajních bodech definičního oboru):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^4}{4} - x^2\right] = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x^2}\right)\right] =$$

$$= (\pm\infty)^4\left(\frac{1}{4} - 0\right) = +\infty$$

3. Vyšetříme monotónnost a lokální extrémy.

   $f'(x) = x^3 - 2x;\ D(f') = R.$

   Body podezřelé z lokálního extrému:

   (A) z nutné podmínky: $f'(x) = 0$

   $x(x^2 - 2) = 0$
   $x_1 = 0$
   $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

   (B) z $D(f') : D(f) = D(f')$; $\emptyset$

$x \in$	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 0)$	0	$(0, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$
		o. l. min.		o. l. max.		o. l. min.	

Funkce je rostoucí na intervalech $(-\sqrt{2}, 0)$ a $(\sqrt{2}, \infty)$.
Funkce je klesající na intervalech $(-\infty, -\sqrt{2})$ a $(0, \sqrt{2})$.
Funkce má ostré lokální maximum 0 v bodě 0 a ostré lokální minimum -1 v bodech $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}$.

4) Vyšetříme konvexitu, konkávitu a inflexní body.

$f''(x) = 3x^2 - 2;\ D(f'') = R.$

Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x) = 0 \iff 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

(B) z $D(f'') : D(f) = D(f'')$; $\emptyset$

$x \in$	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$-\frac{5}{9}$	$\cap$	$-\frac{5}{9}$	$\cup$

inf. bod inf. bod

Funkce je ryze konvexní na intervalech $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ a $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$.

Funkce je ryze konkávní na intervalu $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Funkce má 2 inflexní body: $I_1 = \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{5}{9}\right]$ a $I_2 = \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{5}{9}\right]$.

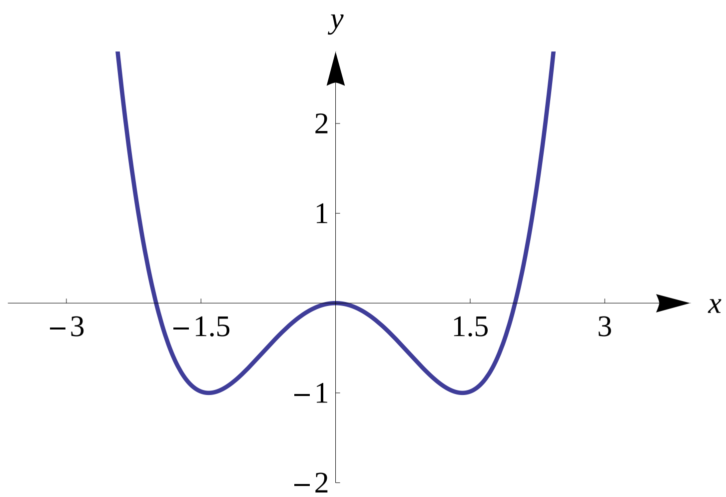
5) Zjistíme, zda má graf funkce asymptotu se směrnicí. Rovnice asymptoty se směrnicí má tvar $y = kx + q$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^4}{4} - x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{4} - x\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[x^3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x^2}\right)\right] = (\pm\infty)^3\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \pm\infty$$

Asymptota se směrnicí neexistuje.

6) Graf funkce.



Obr. 9.1 Graf funkce $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$

Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce není prostá a není omezená (je omezená pouze zdola).
Funkce má globální minimum -1 v bodech $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$, globální maximum nemá.

■

Příklad 9.2 *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Řešení

1 $D(f): x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x_{1,2} \neq \pm 1.$
$D(f) = R \setminus \{-1, 1\}.$

Parita: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x) \cdots$ funkce je lichá, její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.
Průsečíky s osou x: $\frac{x^3}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0$

Graf má 1 průsečík s osou x a to $P = [0; 0]$, což je zároveň i průsečík s osou y.

$x \in$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
graf f	pod osou x	nad osou x	pod osou x	nad osou x

2 Funkce není spojitá v bodech -1 a 1.
Výpočtem jednostranných limit v těchto bodech zjistíme, zda jimi prochází vertikální asymptota.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} &= \left[\frac{1}{\to 0^+}\right] = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} &= \left[\frac{1}{\to 0^-}\right] = -\infty \end{aligned}\right\}$$

Bod 1 je bod nespojitosti II. druhu.
Přímka $x = 1$ je vertikální asymptota.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} &= \left[\frac{-1}{\to 0^-}\right] = +\infty \\ \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} &= \left[\frac{-1}{\to 0^+}\right] = -\infty \end{aligned}\right\}$$

Bod -1 je bod nespojitosti II. druhu.
Přímka $x = -1$ je vertikální asymptota.

Vyšetříme chování funkce v nevlastních bodech.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}} = \pm\infty$$

3 Vyšetříme monotónnost a lokální extrémy.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2};\ D(f') = R \setminus \{-1, 1\}.$$

Body podezřelé z lokálního extrému:

(A) z nutné podmínky: $f'(x) = 0$

$$\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

(B) z $D(f')$:
-1 a $1 \notin D(f')$, ale -1 a 1 $\notin D(f)$, proto v nich extrém nemůže nastat.
Tedy z $D(f') \cdots \emptyset$.

$x \in$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\neg\exists$	$-$	0	$-$	$\neg\exists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-2,6$	$\searrow$	$\neg\exists$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\neg\exists$	$\searrow$	$2,6$	$\nearrow$
		o. l. max.				extrém nenastane				o. l. min.	

Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}, \infty)$.
Funkce je klesající na intervalech $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, \sqrt{3})$.
Funkce má ostré lokální maximum $-2,6$ v bodě $-\sqrt{3}$.
Funke má ostré lokální minimum $2,6$ v bodě $\sqrt{3}$.

4 Vyšetříme konvexitu, konkávitu a inflexní body.

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} =$$
$$= \frac{(x^2 - 1) \cdot (4x^5 - 6x^3 - 4x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

$D(f'') = R \setminus \{-1, 1\}$.

Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x) = 0$

$$\frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0$$
$$x = 0$$

(B) z $D(f'')$: -1 a 1 $\notin (D(f''))$, ale -1 a 1 $\notin D(f)$; tzn. žádný další inflexní bod nezískáme.

$x \in$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$\neg\exists$	$+$	0	$-$	$\neg\exists$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\neg\exists$	$\cup$	0	$\cap$	$\neg\exists$	$\cup$
				inf. bod			

Funkce je ryze konvexní na intervalech $(-1, 0)$ a $(1, \infty)$.
Funkce je ryze konkávní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$.
Funkce má 1 inflexní bod: $I \equiv P = [0, 0]$.

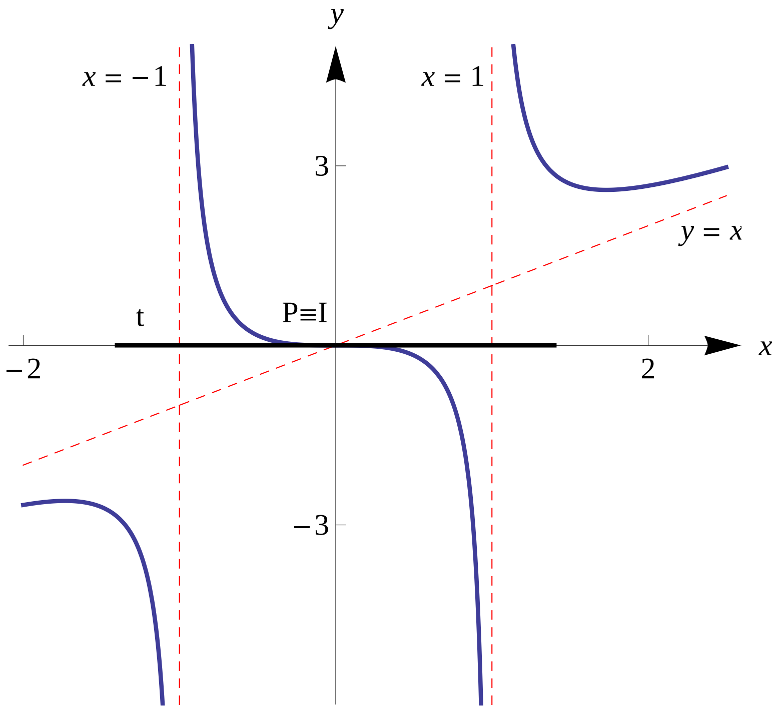
5 Zjistíme, zda má graf funkce asymptotu se směrnicí.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x}{6x} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 = 1$$
$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2x} = \left[\frac{1}{\pm\infty}\right] = 0$$

$$y = 1 \cdot x + 0$$

Přímka o rovnici $y = x$ je asymptotou se směrnicí.

(6) Graf funkce.



Obr. 9.2 Graf funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce není omezená, nemá globální extrémy, není prostá.

Poznámka.
Inflexní tečna t v bodě $P \equiv I$ splývá s osou x, protože $f'(0) = 0$.

■

Příklad 9.3 *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

Řešení

(1) $D(f) = R$.

Parita: $f(-x) = (-x-5)\sqrt[3]{(-x)^2} = (-x-5)\sqrt[3]{x^2}$
$f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) \neq -f(x) \cdots$ funkce není ani sudá, ani lichá

Průsečíky s osou x: $(x-5)\sqrt[3]{x^2} = 0$
$x_1 = 5$ a $x_2 = 0$

Graf funkce protíná osu x ve dvou bodech: $P_1 = [5,0]$ a $P_2 = [0,0]$, bod P_2 je zároveň průsečík s osou y.

$x \in$	$(-\infty,0)$	$(0,5)$	$(5,\infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$
graf f	pod osou x	pod osou x	nad osou x

2 Funkce je spojitá, je součinem dvou spojitých funkcí.
Graf funkce nemá vertikální asymptoty.

Vyšetříme chování funkce v nevlastních bodech.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x-5)\cdot\sqrt[3]{x^2}=(\pm\infty-5)\sqrt[3]{(\pm\infty)^2}=\pm\infty\cdot\infty=\pm\infty$$

3 Vyšetříme monotónnost a lokální extrémy.

$$f'(x)=1\cdot\sqrt[3]{x^2}+(x-5)\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{3x+2x-10}{3\sqrt[3]{x}}=$$
$$=\frac{5x-10}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$$
$$D(f')=R\setminus\{0\}.$$

Body podezřelé z lokálního extrému:

(A) z nutné podmínky: $f'(x)=0$

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}=0$$
$$x=2$$

(B) z $D(f'): 0\notin D(f')$ a $0\in D(f)$; $x=0$

$x\in$	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\neg\exists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$
		o. l. max.		o. l. min.	

Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty,0)$ a $(2,\infty)$.
Funkce je klesající na intervalu $(0,2)$.
Funkce má ostré lokální maximum 0 v bodě 0.
Funke má ostré lokální minimum $-3\sqrt[3]{4}$ v bodě 2.

4 Vyšetříme konvexitu, konkávitu a inflexní body.

$$f''(x)=\frac{5}{3}\cdot\frac{1\cdot\sqrt[3]{x}-(x-2)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-\frac{x-2}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\frac{3x-x+2}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}=$$
$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{2x+2}{3\sqrt[3]{x^4}}=\frac{10}{9}\cdot\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}}$$
$$D(f'')=R\setminus\{0\}.$$

Body podezřelé z inflexe:

(A) z nutné podmínky: $f''(x)=0$

$$\frac{10}{9}\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}}=0$$
$$x=-1$$

(B) z $D(f'') : 0 \notin (D(f''))$, ale 0 $\in D(f)$; $x = 0$

$x \in$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\neg\exists$	$+$
$f(x)$	$\cap$	-6	$\cup$	0	$\cup$
		inf. bod		inflexe nenastane	

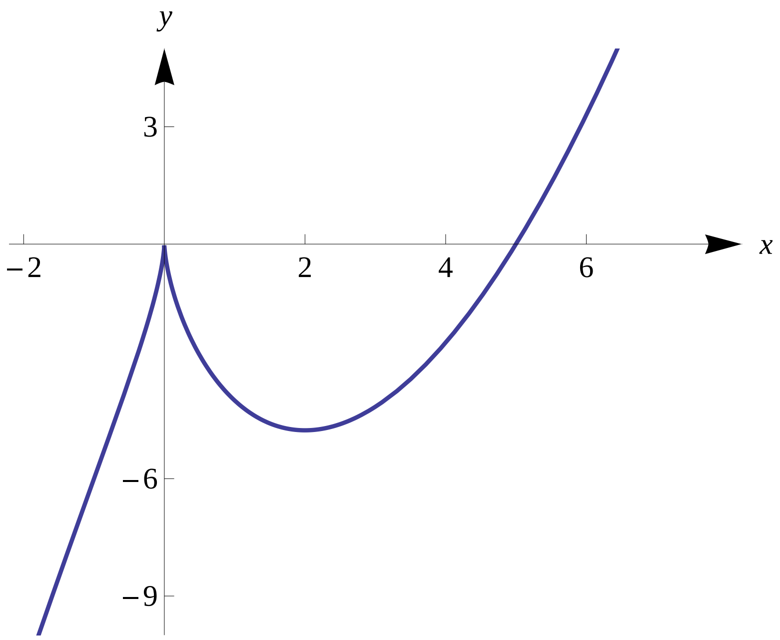
Funkce je ryze konvexní na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$.
Funkce je ryze konkávní na intervalu $(-\infty, -1)$.
Funkce má 1 inflexní bod: $I = [-1, -6]$.

5 Zjistíme, zda má graf funkce asymptotu se směrnicí.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-5) \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\left(1 - \frac{5}{x} \right) \sqrt[3]{x^2} \right] = +\infty$$

Asymptota se směrnicí neexistuje.

6 Graf funkce.



Obr. 9.3 Graf funkce $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce není prostá, není omezená, nemá globální extrémy.

Poznámka.
Tečna v bodě $P_2 = [0, 0]$ neexistuje, protože $f'(0)$ neexistuje. Existují pouze jednostranné tečny, které splývají s nekladnou částí osy y.

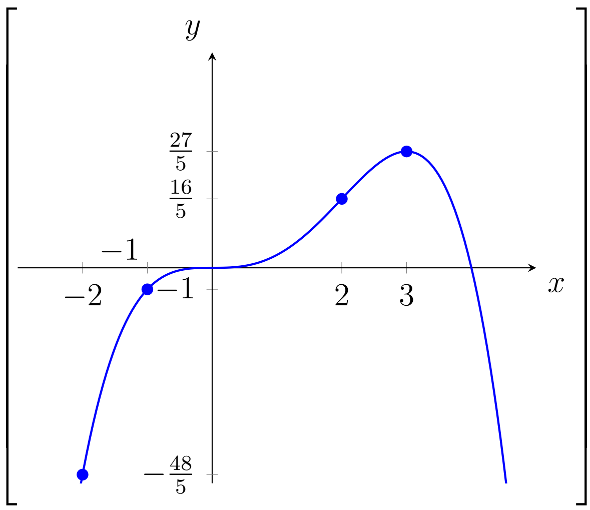
■

Σ

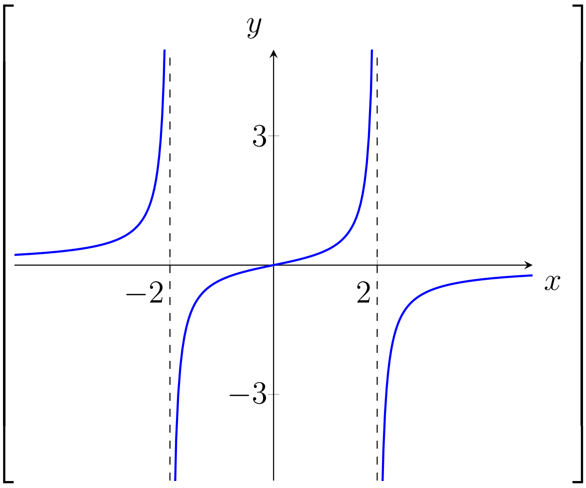
Na základě funkčního předpisu určíme definiční obor funkce a ověříme periodicitu a paritu funkce. Stanovíme nulové body funkce a body, v nichž funkce není definována. Ty nám rozdělí definiční obor na subintervaly, ve kterých funkce nabývá buď jen kladných nebo jen záporných hodnot.
Pomocí první derivace rozhodneme o monotonii funkce: Určíme body, ve kterých je 1. derivace nulová nebo v nichž neexistuje. Tyto body rozdělí číselnou osu na subintervaly, ve kterých je funkce buď jen rostoucí nebo jen klesající. Určíme lokální extrémy funkce.
Pomocí druhé derivace určíme, kde je funkce konvexní a kde konkávní: Určíme body, v nichž je druhá derivace nulová nebo v nichž druhá derivace není definována. Tyto body rozdělí číselnou osu na subintervaly, v nichž je funkce buď jen konvexní nebo jen konkávní. Určíme inflexní body.
Zjistíme, zda funkce má asymptoty bez směrnice nebo se směrnicí.
Spočteme některé funkční hodnoty ve významných bodech (např. v bodech extémů nebo v inflexních bodech).
Nakreslíme graf.

?

1. *Vyšetřete průběh funkce, načrtněte její graf a napište, zda je funkce omezená, prostá a zda má globální extrémy.*
   - $f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{5}$



- $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$



Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Kapitola 10

Využití diferenciálního počtu v praxi

Po prostudování kapitoly budete umět:

- zkonstruovat grafy funkcí, které popisují určitou reálnou situaci;
- určit z grafu, který popisuje určitý reálný proces, vlastnosti tohoto procesu.

Klíčová slova:

Graf, růst, pokles, maximální hodnota, minimální hodnota, limitní hodnota.

Příklad 10.1 *Číslo 1000 rozdělte na dva sčítance tak, aby součet jejich druhých mocnin byl minimální.*

Řešení

Označme x a y hledané sčítance.
Platí $x + y = 1000$, tedy $y = 1000 - x$.
Pro součet s druhých mocnin platí
$s = x^2 + y^2 = x^2 + (1000 - x)^2 = x^2 + 10^6 - 2 \cdot 10^3 x + x^2$, přičemž s závisí (je funkcí) x, tedy $s(x) = 2x^2 - 2 \cdot 10^3 x + 10^6$.

Určíme stacionární bod funkce s.

$$s'(x) = 4x - 2 \cdot 10^3 = 0$$
$$2x - 10^3 = 0$$
$$x = \frac{1000}{2} = 500$$

Potom $y = 1000 - 500 = 500$

Pomocí druhé derivace funkce s zjistíme, zda a jaký typ extrému v bodě 500 nastává.
$s''(x) = 4,\ s''(500) = 4 > 0 \Rightarrow$ lokální minimum

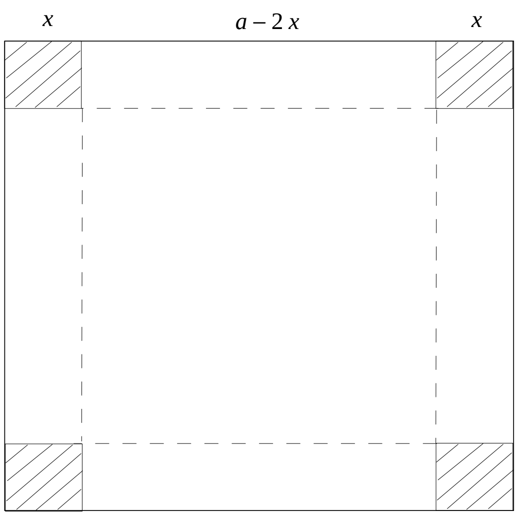
Číslo 1000 rozdělíme na dva stejné sčítance 500 a 500.

■

Příklad 10.2 *Z lepenky tvaru čtverce o straně a se mají v rozích vyříznout čtverce o straně x tak, aby vznikla krabice bez víka. Určete velikost x strany čtverce, aby objem krabice byl co největší. Určete objem vzniklé krabice.*

Řešení

Situace je zachycena na následujícím obrázku



Obr. 10.1 Podstava kvádru
Zdroj: Vlastní zpracování

Vzniklá krabice bude mít tvar kvádru, jehož podstava má plochu $(a-2x)^2$ a výška je x.

Objem kvádru

$$V(x) = (a-2x)^2 x$$
$$V(x) = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

Stacionární bod funkce V

$$V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \left\langle \begin{matrix} \frac{a}{2} \\ \\ \frac{a}{6} \end{matrix} \right.$$

Zjistíme zda a jaký druh extrému v bodech $x_1 = \frac{a}{2},\ x_2 = \frac{a}{6}$ nastává.

$$V''(x) = -8a + 24x$$
$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = -8a + \frac{24}{2}a = 4a > 0 \rightarrow \text{lokální minimum}$$
$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + \frac{24}{6}a = -4a < 0 \rightarrow \text{lokální maximum}$$

Objem krabice bude $V = \left(a - 2\frac{a}{6}\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a^3}{27}$

Aby objem krabice byl co největší, je třeba z lepenky vyříznout v rozích čtverce o straně $\frac{a}{6}$.
Objem zhotovené krabice bude $\frac{2a^3}{27}$ (j^3).

■

Příklad 10.3 *Určete rozměry odkrytého bazénu o objemu $V = 32\ m^3$ se čtvercovým dnem tak, aby na obložení jeho čtyř stěn a dna se spotřebovalo co nejméně materiálu. Určete obsah plochy na obložení.*

Řešení

Označme x délku strany dna a v výšku bazénu.
Bazén má tvar kvádru, kde x je délka hrany podstavy a v jeho výška.
Víme, že objem V bazénu je $V = 32\ m^3$ a objem V kvádru je $V = x^2v$.
Tedy $32 = x^2v$ a odtud $v = \frac{32}{x^2}$.
Označme S plochu stěn a dna bazénu.

$S = x^2 + 4xv = x^2 + 4x\frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$, přičemž S závisí (je funkcí) x.

Tedy $S(x) = x^2 + \frac{128}{x}$

Určíme stacionární bod funkce S

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 0$$
$$2x^3 - 128 = 0$$
$$x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$$

Zjistíme zda a jaký typ extrému v bodě 4 nastává.

$$S''(x) = 2 + \frac{256}{x^3}$$
$$S''(4) = 2 + \frac{256}{4^3} = 2 + \frac{256}{64} = 2 + 4 = 6 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum}$$

Potom $v = \frac{32}{4^2} = \frac{32}{16} = 2$
Obsah plochy na obložení $S = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 16 + 32 = 48$

Dno bazénu bude čtverec o straně $4\ m$ a výška bazénu bude $2\ m$. Obsah plochy na obložení bude $48\ m^2$.

■

Příklad 10.4 *Jaké rozměry bude mít konzerva tvaru válce, jejíž objem je $250\ cm^3$, aby se na její výrobu spotřebovalo co nejméně materiálu. Určete spotřebu materiálu.*

Řešení

Označme r poloměr a v výšku válce.
Objem V válce $V = \pi r^2 v$ a je roven $250\ cm^3$, tedy $250 = \pi r^2 v \Rightarrow v = \frac{250}{\pi r^2}$
Spotřebovaný materiál označíme S a je roven povrchu válce,
tedy $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r\,(r + v)$
Dosadíme za v

$S = 2\pi r \left(r + \frac{250}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{500}{r},$ S je funkcí $r,$ tedy $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{500}{r}$

Určíme stacionární bod funkce S

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{500}{r^2} = 0$$
$$\pi r - \frac{125}{r^2} = 0$$
$$\pi r^3 - 125 = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \doteq 3{,}41$$

Potom $v = \frac{250}{\pi r^2} = \frac{250}{\pi\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{250}{25\sqrt[3]{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \doteq 6{,}82$

Zjistíme zda a jaký typ extrému v bodě $\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ nastává.

$S''(r) = 4\pi + \frac{1000}{r^3};\ S''\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{1000}{\frac{125}{\pi}} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0 \Rightarrow$ lokální minimum

Spotřeba materiálu $S = 2\pi \cdot 3,41 \cdot (3,41 + 6,82) \doteq 219$

Konzerva bude mít tvar rovnostranného válce $(v = 2r)$, jenž má poloměr podstavy $3{,}41\ cm$ a výšku $6{,}82\ cm$. Spotřeba materiálu bude přibližně $219\ cm^2$.

■

Příklad 10.5 *Radnice dostala dotaci 60 000 Kč na oplocení dětského hřiště, které má tvar obdélníka. Když 1 m plotu stojí 750 Kč, určete rozměry hřiště tak, aby jeho plocha byla při daném rozpočtu co největší.*

Řešení

Označme délky stran hřiště jako x a y.
Z dotace lze pořídit $\frac{60\,000}{750} = 80$ [m] plotu.
Pro obvod hřiště, který je možné oplotit, platí

$$\begin{aligned} 80 = 2(x+y) \Longrightarrow\ \ & y = \tfrac{80}{2} - x \\ & y = 40 - x \end{aligned}$$

Plocha hřiště má být co největší, to znamená, že

$$\begin{aligned} &P = x \cdot y \rightarrow \text{max} \\ &P(x) = x(40-x) \rightarrow \text{max} \\ &P(x) = 40x - x^2 \rightarrow \text{max} \end{aligned}$$

Určíme stacionární bod funkce P (tj. bod, kde může nastat extrém).

$P'(x) = 40 - 2x$

$40 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 20$ a současně $y = 40 - 20 = 20$

Ověříme, zda ve stacionárním bodě $x = 20$ extrém skutečně nastává.

$P''(x) = -2$

$P''(20) = -2 < 0 \rightarrow$ lokální maximum obdržíme pro $x = 20.$

Plocha hřiště, která odpovídá rozměrům $x = 20,\ y = 20$ je

$P = 20 \cdot 20 = 400\ [m^2].$

Při daném rozpočtu lze oplotit čtvercové hřiště o straně $20\ m$. Jeho plocha pak bude $400\ m^2$.

■

Příklad 10.6 *Pro zabezpečení kontinuální výroby louhu je třeba mít k dispozici 10 000 t kamenné soli. Pořizovací cena včetně dopravy je 9 000 Kč/t. Náklady spojené s vyřízením a převzetím jedné dodávky jsou 8 500 Kč včetně vstupní kontroly. Náklady na udržení zásob se pohybovaly v loňském roce kolem 15% průměrné hodnoty zásob za rok. Určete, v jak velkých dodávkách je třeba zásobovat výrobu, aby náklady s tím spojené byly co nejnižší.*

Řešení

Ze zadání je vidět, že
požadované množství nakupované položky $s = 10\,000\ t$,
pořizovací cena $c = 9\,000$ *Kč/t*,
náklady na vyřízení jedné dodávky $n_j = 8\,500$ *Kč*,
náklady na udržení zásob $n_s = 15\%$ z průměrné hodnoty zásob po období $T = 1$ rok.

Označme Q - výši dodávky. Předpokládejme, že celkové náklady $N(Q)$ jsou součtem nákladů na pořízení zásob $\frac{Q}{2} T n_s c$ a nákladů na udržování zásob $\frac{s}{Q}\, uj$.
V našem případě celkové náklady

$$N(Q) = \frac{Q}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}15 \cdot 9\,000 + \frac{10\,000}{Q} \cdot 8\,500 = 675\,Q + \frac{85\,000\,000}{Q}$$

Určíme stacionární bod:

$$N'(Q) = 675 - \frac{85\,000\,000}{Q^2} = 0$$

Odtud $Q^2 = \frac{85\,000\,000}{675}$

Optimální velikost dodávek $Q = \sqrt{\frac{85\,000\,000}{675}} \doteq 355\ [t]$

Aby náklady na zásobování byly co nejnižší, je třeba výrobu zásobovat dodávkami o velikosti 355 t.

■

Příklad 10.7 *Kolik elektronických koloběžek má výrobce prodat, aby maximalizoval svůj příjem, když funkce příjmu je dána rovnicí $TR(Q) = -4Q^2 + 1280Q + 350$ a Q je počet prodaných koloběžek?*

Řešení

Určíme stacionární bod funkce příjmu.

$$\begin{aligned} TR'(Q) = &- 8Q + 1280 \\ &- 8Q + 1280 = 0 \end{aligned}$$

Stacionární bod $Q = 160$ [ks]

Zjistíme, zda pro $Q = 160$ funkce příjmu nabývá svého maxima.

$TR''(Q) = -8$

$TR''(160) = -8 < 0 \Rightarrow$ funkce příjmu nabývá pro $Q = 160$ svého maxima

Výrobce maximalizuje svůj příjem, když prodá 160 kusů koloběžek.

■

Příklad 10.8 *Zjistěte typ cenové elasticity poptávky v bodě $P = 4$, když funkce poptávky má tvar*
$Q = 150 - P^5 - 2{,}5P^3 - P.$

Řešení

Cenová elasticita ε je poměr procentuální změny poptávky Q po zboží a procentuální změny ceny P zboží. Spočteme ji pomocí vztahu

$$\varepsilon\ (p) = Q'(P)\frac{P}{Q(P)}.$$

Pokud má určité P $\varepsilon(p_0) > 1$, jedná se o cenově elastickou, pro $\varepsilon(p_0) = 1$ o jednotkově elastickou, a pro $\varepsilon(p_0) < 1$, cenově neelastickou kategorii cenové elasticity poptávky.

Pro danou funkci poptávky spočteme, že

$$Q' = -5P^4 - 2{,}5 \cdot 3P^2 - 1.$$

Pak

$$\varepsilon(P) = (-5P^4 - 7{,}5P^2 - 1) \cdot \frac{P}{150 - P^5 - 2{,}5P^3 - P}$$

$$\varepsilon(4) = (-5 \cdot 4^4 - 7{,}5 \cdot 4^2 - 1)\frac{4}{150 - 4^5 - 2{,}5 \cdot 4^3 - 4} = 5{,}398$$

Protože $\varepsilon(4) > 1$, jedná se o cenově elastickou kategorii cenové poptávky.

■

Řada ekonomických procesů má charakter deterministické závislosti a lze je formálně popsat prostřednictvím funkce. Diferenciální počet je exaktní nástroj, který nám umožní proniknout do vlastností funkcí popsaného procesu. Z věcné interpretace získaných výsledků je pak možné vyvodit závěry a opatření užitečné pro praxi.

1. Jaké rozměry bude mít vodní koryto obdélníkového průřezu nahoře otevřené, má-li být obvod průřezu co nejmenší a obsah průřezu $P = 24{,}5\ dm^2$.

   $[3{,}5\ dm$ a $7\ dm,$ obvod $14\ dm]$

2. *Průřez tunelu má tvar obdélníka zakončeného půlkružnicí; obvod průřezu je a metrů. Jaký musí být poloměr kružnice, aby plošný obsah průřezu byl největší?*

   $\left[\frac{a}{4+\pi}\ m\right]$

Literatura k tématu

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

Seznam literatury a použitých zdrojů

[1] BERMAN, G. N.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Moskva: Nauka, 1965, 443 s. (rusky)

[2] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Moskva: Nauka, 1977, 527 s. (rusky)

[3] DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[4] MÁDROVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, Olomouc: UP, 2001, 217 s., ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[5] Mádrová, V., Marek, J.: *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd., Olomouc: UP, 2013, 329 s., ISBN 978-80-244-3410-10 (skripta)

[6] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I.*, 1.vyd, Olomouc: UP, 2002. 126 s., ISBN 80-244-0464-8 (skripta)

[7] TOMICA, R.: *Cvičení z matematiky I*, Brno: VUT, 1970, 293 s.

Seznam obrázků