MVŠO

MATEMATICKÁ ANALÝZA

STUDIJNÍ OPORA PRO KOMBINOVANÉ STUDIUM

MATEMATICKÁ ANALÝZA

RNDr. Vladimíra MÁDROVÁ, CSc.,

RNDr. Vratislava MOŠOVÁ, CSc.,

Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., 2018

Autor: RNDr. Vladimíra MÁDROVÁ, CSc.,
RNDr. Vratislava MOŠOVÁ, CSc.,

Olomouc 2018

Obsah

Úvod

Cílem předmětu je seznámení studentů s diferenciálním a integrálním počtem funkce jedné a více proměnných a jejich aplikacemi. Student po ukončení semestru správně chápe pojem funkce a uvědomuje si užitečnost funkcí pro popis vztahů mezi jednotlivými veličinami, rozpoznává a charakterizuje základní vlastnosti funkcí. Pro funkce jedné i více proměnných bezpečně určuje definiční obory funkcí, definuje limitu funkce, zná vlastnosti limit a umí počítat limity rozličných funkcí, rozumí pojmu spojitosti funkce. Chápe a umí definovat derivaci funkce, rutinně zvládá výpočet derivací rozmanitých funkcí, chápe geometrický význam derivace. Zvládá aplikaci všech vědomostí diferenciálního počtu. Pro funkci jedné proměnné definuje primitivní funkci a neurčitý integrál, má osvojeny základní integrační metody. Pro funkce jedné a více proměnných rozumí způsobu konstrukce určitého integrálu, ovládá jeho základní vlastnosti a výpočet. Je schopen využít vědomosti integrálního počtu při řešení základních geometrických a fyzikálních úloh

Kapitola 1

Funkce jedné proměnné

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat základní vlastnosti funkcí
- rozeznat typ a určit vlastnosti dané elementární funkce
- kreslit grafy elementárních funkcí

Klíčová slova:

Funkce, definiční obor, obor hodnot, restrikce, graf funkce, funkce sudé, liché, omezené, monotonní, periodické, prosté, inverzní, složené, polynom, obecná mocnina, goniometrické a cyklometrické funkce, funkce racionální lomená, exponenciální, logaritmická

Definice funkce

Definice 1.1 Nechť $I, J \subseteq \mathrm{R}$. Zobrazení $f : I \to \mathrm{R}$ nazveme (reálnou) **funkcí jedné** (reálné) **proměnné**. Množina I se nazývá **definiční obor** a množina $J = \{ f(x) \in \mathrm{R} \mid x \in I \}$ **obor hodnot** funkce f.

Příklad Dráha s je funkcí času t. Píšeme $s = s(t)$.

Objem krychle V je funkcí délky hrany a. Platí $V = a^3$.

Poznámka Možností, jak zadat funkci, je několik. Funkce může být dána analyticky (buď explicitně ve tvaru $y = f(x)$ nebo implicitně $F(x, y) = 0$), graficky nebo tabulkou.

Příklad Funkce $y = 10^x$ je zadaná explicitně. Funkce $y - 10^x = 0$ je zadaná implicitně.

Poznámka Poznamenejme, že každou funkci zadanou explicitně lze zapsat v implicitním tvaru. Opak však nemusí platit. Např. ze zápisu $y^2 - x = 0$ nemůžeme jednoznačně vyjádřit y jako funkci proměnné x. Je totiž $y = \pm\sqrt{x}$.

Poznámka Pro definiční obor budeme také používat označení Df nebo $\mathrm{Dom}f$ a pro obor hodnot Hf nebo $\mathrm{Im}f$.

Poznámka Pokud není uvedeno jinak, bereme za definiční obor ten interval, na němž lze příslušné operace provést. Pamatujte, že

- jmenovatel zlomku musí být nenulový,
- výraz pod druhou odmocninou musí být nezáporný,
- argument logaritmické funkce musí být kladný,
- argument funkce $\mathrm{tg}\, x$ musí být různý od lichých násobků $\frac{\pi}{2}$,
- argument funkce $\mathrm{cotg}\, x$ musí být různý od sudých násobků $\frac{\pi}{2}$.
- argument funkcí $\arcsin x$ a $\arccos x$ musí patřit do intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

Příklad Stanovte definiční obor a obor hodnot funkce

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Řešení Ve jmenovateli musí být výraz pod odmocninou kladný. Platí $4 - x^2 > 0$, když $-2 < x < 2$. Tzn. definiční obor zadané funkce $I = (-2, 2)$. Obor hodnot $J = (-\infty, \infty)$.

Definice1.2 Dvě **funkce se rovnají**, když mají stejné definiční obory a když pro všechna x ze společného definičního oboru platí $f(x) = g(x)$.

Příklad Rozhodněte, zda se funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ a $g(x) = x+1$ rovnají.

Řešení: Definiční obory daných funkcí jsou různé: $Df = (-\infty,1) \cup (1,\infty)$, $Dg = (-\infty,\infty)$. A tak, přestože pro $x \neq 1$ je $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, funkce f a g se nerovnají.

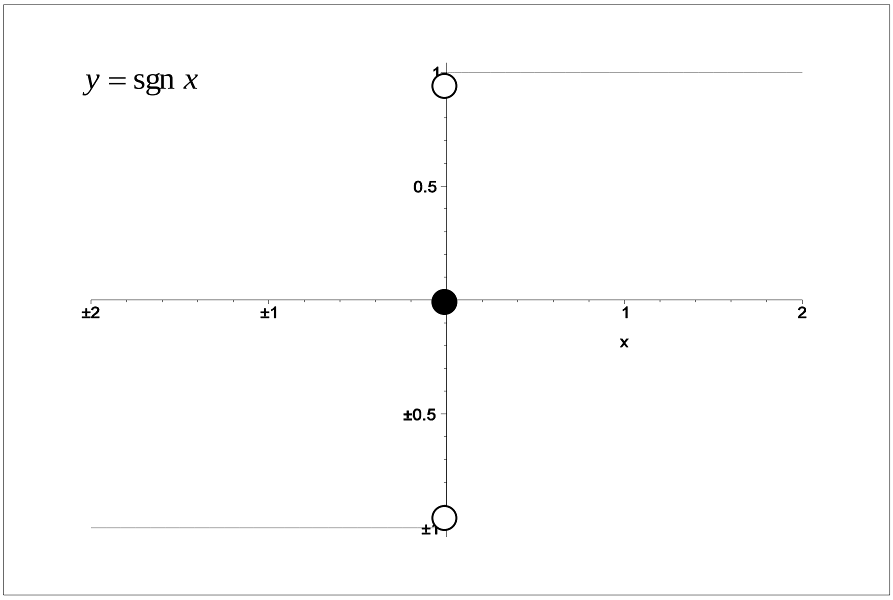
Definice 1.3 Nechť $f : I \to$ R a $I \supset I_1$. Funkci $g : I_1 \to$ R takovou, že $g(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I_1$, nazveme **restrikcí funkce** f na množinu I_1. Píšeme $g(x) = f(x)|_{I_1}$.

Příklad Funkce f z předchozího příkladu je restrikcí funkce g na interval $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$.

Definice 1.4 **Grafem funkce** $f : I \to J$ nazveme množinu všech bodů v rovině, o souřadnicích $(x, f(x)), x \in I$.

Příklad Nakreslete graf funkce $y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Řešení

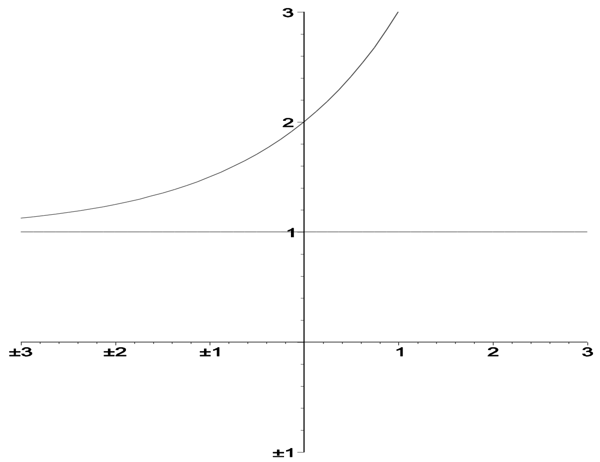


Vlastnosti funkcí

Definice 1.5 Nechť množina I obsahuje alespoň dva body. Řekneme, že funkce $f: I \to$ R je na intervalu I

- **omezená zdola**, když existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$, tak že $f(x) \geq K, \ \forall x \in I$,
- **omezená shora**, když existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$, tak že $f(x) \leq K, \ \forall x \in I$,
- **omezená**, když existuje konstanta $K > 0$, $K \in \mathbb{R}$, tak že $|f(x)| \leq K, \ \forall x \in I$.

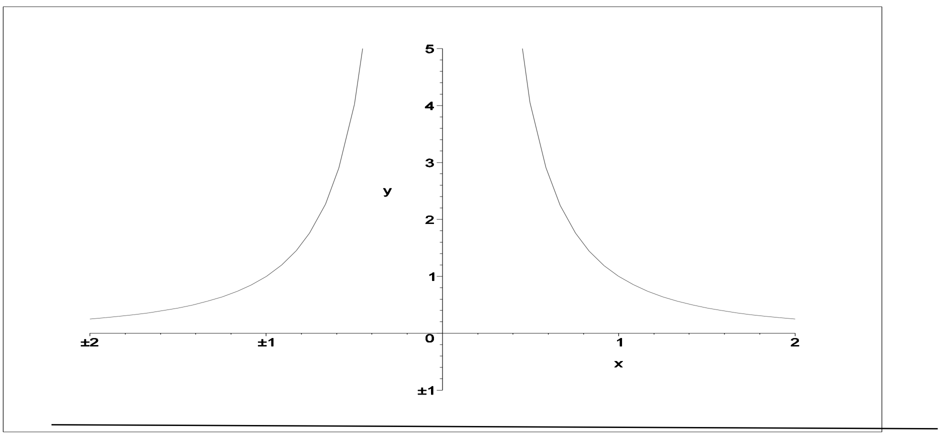
Příklad Funkce $y = 1 + 2^x$ je zdola omezená. Její graf je zdola ohraničený přímkou $y = 1$.



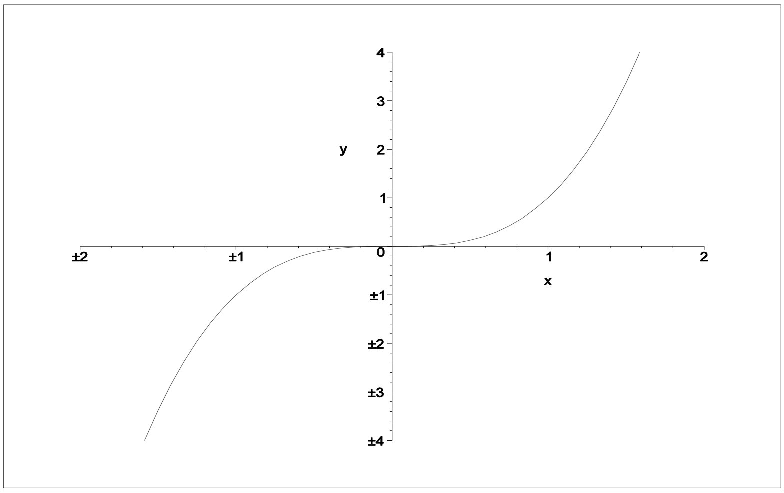
Definice 1.6 Nechť I je symetrická množina, tj. $x \in I \Rightarrow -x \in I$. Řekneme, že funkce $f: I \to$ R je na intervalu I

- **sudá**, když pro všechna $x \in I$ platí $f(-x) = f(x)$,
- **lichá**, když pro všechna $x \in I$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Příklad Funkce $y = \frac{1}{x^2}$ je sudá. Její graf je souměrný podle osy y.

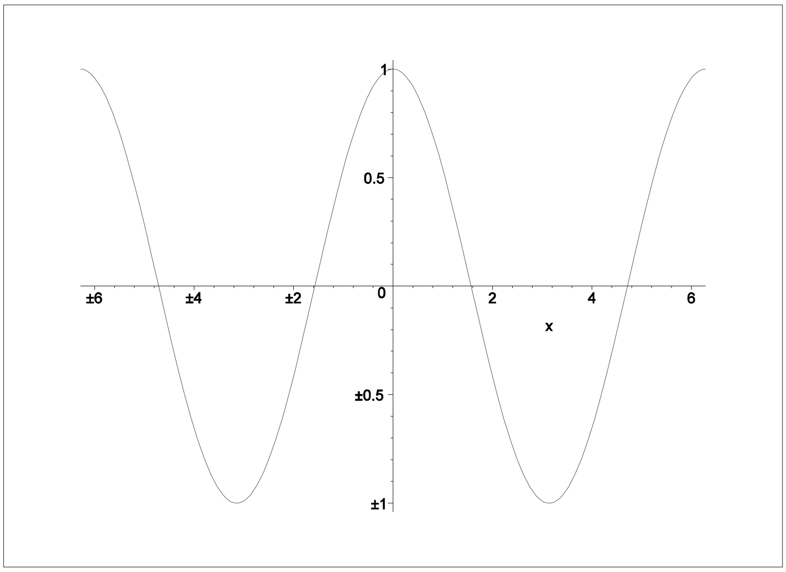


Příklad Funkce $y = x^3$ je lichá. Její graf je souměrný podle počátku.



Definice 1.7 Nechť $p \in \mathrm{R}$ a množina $I \subset \mathrm{R}$ s každým bodem x obsahuje také bod $x + p$. Řekneme, že funkce $f : I \to$ R je na intervalu I **periodická**, když pro všechna $x \in I$ platí $f(x + p) = f(x)$.

Příklad Funkce $y = \cos x$ je periodická. Její graf se v intervalech délky 2π opakuje.

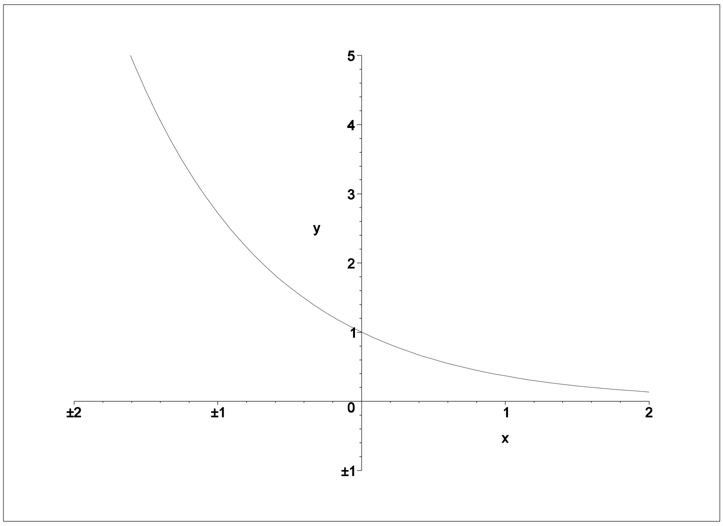


Definice 1.8 Řekneme, že funkce $f : I \to$ R je na intervalu I

- **(ostře) rostoucí**, když pro všechna $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **(ostře) klesající**, když pro všechna $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,$ platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- **nerostoucí**, když pro všechna $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **neklesající**, když pro všechna $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkcím (ostře) rostoucím a (ostře) klesajícím říkáme souhrnně (ostře) **monotonní funkce**.

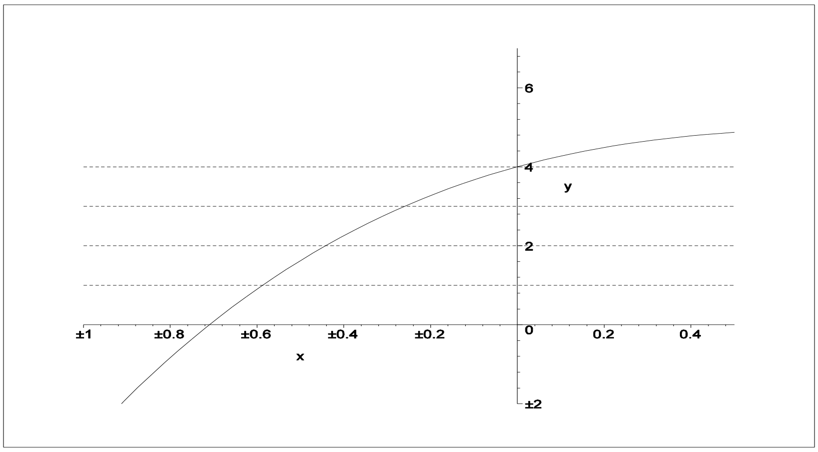
Příklad Funkce $y = (\frac{1}{e})^x$ je klesající



Definice 1.9 Nechť množina I obsahuje alespoň dva body. Řekneme, že funkce $f : I \to$ R je na intervalu I **prostá**, když pro každé $x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Poznámka Každá ostře monotonní funkce je i prostá.

Příklad Funkce $y = f(x)$ je prostá. Graf této funkce protínají všechny rovnoběžky s osou x vždy jen v jediném bodě.



Definice 1.10 Jsou dány funkce $f : I_1 \to J_1, g : I_2 \to J_2$ a $J_1 \subset I_2$. Funkci $h : I_1 \to J_2$ definovanou vztahem $h(x) = g(f(x))$ pak nazveme **složenou funkcí**. Funkce g je její vnější a f její vnitřní složka.

Poznámka Někdy místo pojmu skládání funkcí používáme termín superpozice a píšeme $h = g \circ f$.

Příklad Z funkcí $u = f(x) = \ln(x-2),\ g(u) = \frac{1}{u}$ sestavte funkci složenou a určete definiční obor a obor hodnot zadaných složek.

Řešení

$$f(x) = \ln(x-2): \quad x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow \mathrm{Dom}f = (2,\infty),\ \mathrm{Im}f = (-\infty,\infty).$$

$$g(u) = \frac{1}{u}: \ \mathrm{u} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom}g = (-\infty,0)\cup(0,\infty),\ \mathrm{Im}g = (-\infty,\infty).$$

$$h(x) = g(u(x)) = \frac{1}{\ln(x-2)}:$$
$$\ln(\mathrm{x}\text{-}2) \neq 0 \wedge \mathrm{x}\text{-}2>0 \Rightarrow \mathrm{x}\text{-}2 \neq 1 \wedge \mathrm{x}>2 \Rightarrow \mathrm{Dom}h = (2,3)\cup(3,\infty),\ \mathrm{Im}\,h = (-\infty,\infty)$$

Definice 1.11 Jestliže funkce $f: I \to J$ je prostá, pak funkci f^{-1}, která každému $y \in J$ přiřazuje to jediné $x \in J$, pro které $f(x) = y,$ nazveme **inverzní funkcí** k zadané funkci f.

Příklad K funkci $y = 1-x^3$ utvořte funkci inverzní.

Řešení Zadaná funkce je prostá pro všechna $x \in \mathrm{R}$ a můžeme k ní utvořit funkci inverzní, která má tvar $y = \sqrt[3]{1-x}.$

Poznámka Role definičního oboru a oboru hodnot se u navzájem inverzních funkcí zaměňují.

Pokud v inverzní funkci provedeme symbolickou záměnu proměnných, jsou grafy dané funkce a funkce k ní inverzní symetrické podle osy 1. a 3. kvadrantu.

Poznámka Inverzní funkce k funkci ostře monotonní je opět ostře monotonní.

Poznámka Složením navzájem inverzních funkcí obdržíme identitu:

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ f(f^{-1}(y)) = y.$$

Příklad Funkce $f(x) = \ln x$ a $g(x) = e^x$ jsou navzájem inverzní. To znamená např. že

$$\ln(e^{(2x+5)}) = 2x+5,$$

$$e^{\ln((1-x^2)} = 1-x^2.$$

Elementární funkce

Polynomy

Definice 1.12 Nechť $a_n,\dots,a_0 \in$ R. Funkci tvaru $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$

nazveme **polynomem** n-tého stupně. Konstanty $a_n,\dots,a_0$ jsou tzv. koeficienty polynomu.

Příklad $P(x) = x^5 + 3x^2 + x$ je polynom 5. stupně s koeficienty $a_5 = 1,\ a_4 = 0,\ a_3 = 0,\ a_2 = 3,\ a_1 = 1,$ $a_0 = 0.$

Věta 1.1 Dva polynomy se rovnají, když se rovnají jejich koeficienty u příslušných mocnin.

Definice 1.13 Číslo $\alpha \in \mathrm{C},$ pro které platí $P(\alpha) = 0,$ se nazývá kořenem polynomu P a výraz $(x-\alpha)$ **kořenovým činitelem** uvažovaného polynomu.

Poznámka Najít kořen polynomu $P,$ který má reálné koeficienty, znamená řešit algebraickou rovnici $P(x) = 0.$ Řešením této rovnice mohou být jak reálná, tak komplexní čísla.

Příklad Určete kořeny polynomu $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1.$

Řešení: Polynom na levé straně kubické rovnice $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ rozložíme na součin

$$x^2(2x-1) + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+i)(x-i)(2x-1) = 0.$$

Součin je nulový, když některý z činitelů je nulový. Kořeny zadaného polynomu jsou tedy $x_1 = \frac{1}{2},$ $x_2 = i$ a $x_3 = -i.$

Věta 1.2 (Základní věta algebry.) *Algebraická rovnice* $P_n(x) = 0, n \geq 1,$ *má nad tělesem komplexních čísel alespoň jeden kořen* $\alpha.$

Poznámka Každý polynom n-tého stupně má (pokud počítáme každý k-násobný kořen za k kořenů a každou dvojici komplexně sdružených kořenů za dva kořeny) právě n kořenů.

Definice 1.14 Nechť polynom P_n má r reálných k_p-násobných kořenů $\alpha_p, (p = 1,\dots,r)$ a s dvojic komplexně sdružených l_j-násobných kořenů $a_j \pm i b_j, (j = 1,\dots,s).$ Součin

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots\dots(x-\alpha_r)^{k_r}[(x-a_1)^2+b_1^2]^{l_1}[(x-a_2)^2+b_2^2]^{l_2}\dots[(x-a_s)^2+b_s^2]^{l_s}$$

nazýváme **rozkladem** polynomu P_n **na součin kořenových činitelů** (v reálném oboru).

Příklad Polynomy a) x^3-2x^2-x+2, b) x^5+8x^3+16x rozložte v reálném oboru na součin kořenových činitelů.

Řešení

a) $x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x^2-1)(x-2)=(x-1)(x+1)(x-2).$

Zadaný polynom má reálné jednoduché kořeny $-1,1,2.$

b) $x^5+8x^3+16x=x(x^4+8x^2+16)=x(x^2+4)^2=$

$=(x-0)[(x-2i)(x+2i)]^2.$

Zadaný polynom má reálný jednoduchý kořen 0 a dvojici dvojnásobných komplexně sdružených kořenu $\pm 2i.$

Funkce racionální lomená

Definice 1. 15 Nechť P_n a Q_m jsou polynomy. Podíl

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \tag{5}$$

nazýváme racionální funkcí **neryze lomenou**, když $n\ge m$ a racionální funkcí **ryze lomenou** když $n<m.$ Definičním oborem funkce R jsou všechna reálná čísla s výjimkou reálných kořenů polynomu ve jmenovateli.

Poznámka V každé neryze lomené funkci lze provést naznačené dělení a rozepsat tuto funkci na součet polynomu a funkce racionální ryze lomené.

Příklad Určete definiční obor funkce $\frac{2x^2-5}{x^2-1}$ a rozložte ji na součet polynomu a funkce racionální ryze lomené.

Řešení Protože $x^2-1\neq 0,$ když $x\neq \pm 1,$ tvoří definiční obor zadané funkce sjednocení intervalů $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty).$ Dále

$$\frac{2x^2-5}{x^2-1}=\frac{2(x^2-1)-3}{x^2-1}=2-\frac{3}{x^2-1}.$$

Věta 1.3 *Nechť* $R(x)$ *je funkce racionální ryze lomená. Jestliže* α *je* k *-násobný reálný kořen jmenovatele funkce* $R(x),$ *pak v rozkladu na parciální zlomky tomuto kořenu přísluší* k *zlomků tvaru*

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

Příklad Funkci $\frac{x+1}{x^2-4}$ rozložte na parciální zlomky.

Řešení Polynom ve jmenovateli má dva reálné různé kořeny $x_{1,2}=\pm 2.$ Kořenu $x_1=2$ přísluší v rozkladu jeden zlomek tvaru $\frac{A}{x-2}$ a kořenu $x_2=-2$ přísluší jeden zlomek tvaru $\frac{B}{x+2}.$ Proto obecný tvar rozkladu je

$$\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}.$$

Po vynásobení celé rovnice jmenovatelem x^2-4 dostaneme

$$x+1=A(x+2)+B(x-2).$$

Odtud

$$\begin{aligned} x=2: &\quad 3=4A &&\Rightarrow\quad A=\frac{3}{4}.\\ x=-2: &\quad -1=-4B &&\Rightarrow\quad B=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Rozklad má tvar $\dfrac{x+1}{x^2-4}=\dfrac{3}{4(x-2)}+\dfrac{1}{4(x+2)}.$

Věta 1.4 *Nechť* $R(x)$ *je funkce racionální ryze lomená. Jestliže* $a\pm bi$ *je dvojice komplexně sdružených* l *-násobných kořenů jmenovatele funkce* $R(x),$ *pak v rozkladu na parciální zlomky těmto kořenům přísluší* l *zlomků tvaru*

$$\frac{B_1x+C_1}{(x-a)^2+b^2}+\frac{B_2x+C_2}{[(x-a)^2+b^2]^2}+\ldots+\frac{B_lx+C_l}{[(x-a)^2+b^2]^l}.$$

Příklad Funkci $\frac{x^3+2}{x^4+2x^2+1}$ rozložte na parciální zlomky.

Řešení Polynom ve jmenovateli $x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$ má kořeny $x_{1,2}=i, x_{3,4}=-i.$ Obecný tvar rozkladu pro dvojnásobné komplexně sdružené kořeny je

$$\frac{x^3+2}{x^4+2x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

Po vynásobení celé rovnice polynomem $(x^2+1)^2$ dostaneme

$$x^3+2=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D.$$
$$x^3+2=A(x^3+x)+B(x^2+1)+Cx+D.$$

Odtud porovnáním koeficientů u příslušných mocnin dostaneme

$$\begin{array}{cccl} x^3: & A & =1 & \\ x^2: & B & =0 & \\ x: & A+C & =0 & \Rightarrow C=-1 \\ x^0: & D & =2 & \end{array}$$

Rozklad má tvar

$$\frac{x^3+2}{x^4+2x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}+\frac{2-x}{(x^2+1)^2}.$$

Poznámka Pokud máme rozložit funkci racionální neryze lomenou, provedeme nejprve naznačené dělení, funkci zapíšeme jako součet polynomu a funkce racionální ryze lomené. Dále pak jmenovatele funkce racionální ryze lomené rozložíme na součin kořenových činitelů a podle věty 1.3 a věty 1.4 stanovíme obecný tvar rozkladu této funkce. Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin (tzv. metoda neurčitých koeficientů) určíme hodnotu konstant, které se vyskytují v obecném tvaru rozkladu.

Příklad Výraz $\frac{1}{x^3-8}$ rozložte na parciální zlomky.

Řešení Jmenovatel $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)=\ (x-2)((x+1)^2+3)$ má jeden jednoduchý reálný kořen a jednu dvojici komplexně sdružených jednoduchých kořenů. Obecný tvar rozkladu je pak

$$\frac{1}{x^3-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Odtud

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2), \\ 1 & = & A(x^2+2x+4)+B(x^2-2x)+C(x-2). \end{array}$$

Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin obdržíme

$$\begin{array}{lcccccc} x^2: & 0 & = & A & + & B & \\ x^1: & 0 & = & 2A & - & 2B & + & C \\ x^0: & 1 & = & 4A & & & - & 2C \end{array}$$

$$A = 1/12, B = -1/12, C = -1/3.$$

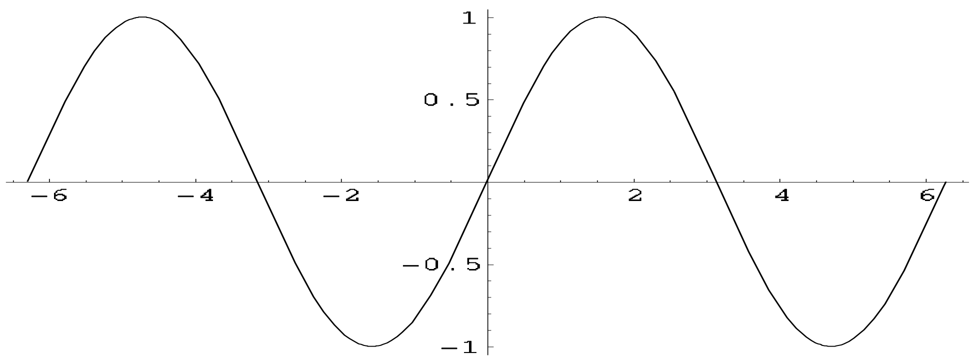
Po dosazení vypočtených konstant do obecného tvaru rozkladu obdržíme

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{12(x-2)} - \frac{x+4}{12(x^2+2x+4)}.$$

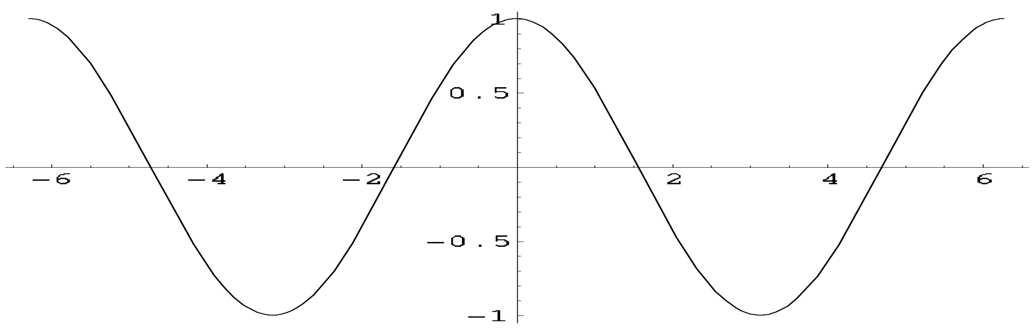
Goniometrické funkce

Z grafů goniometrických funkcí můžeme číst jejich vlastnosti.

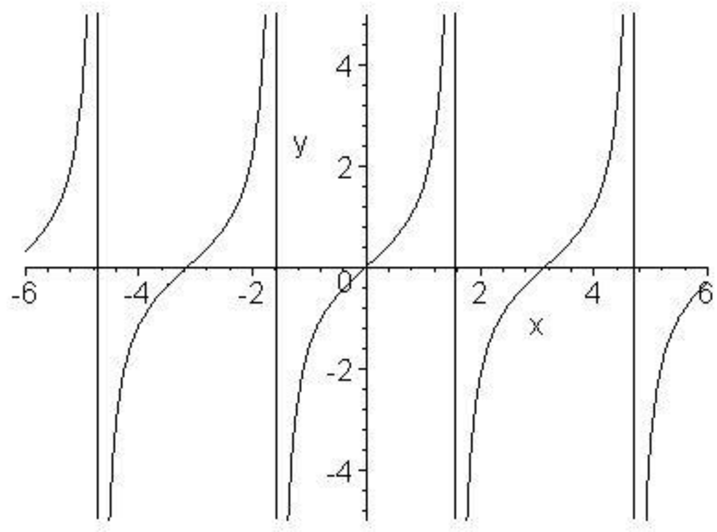
$y = \sin x$



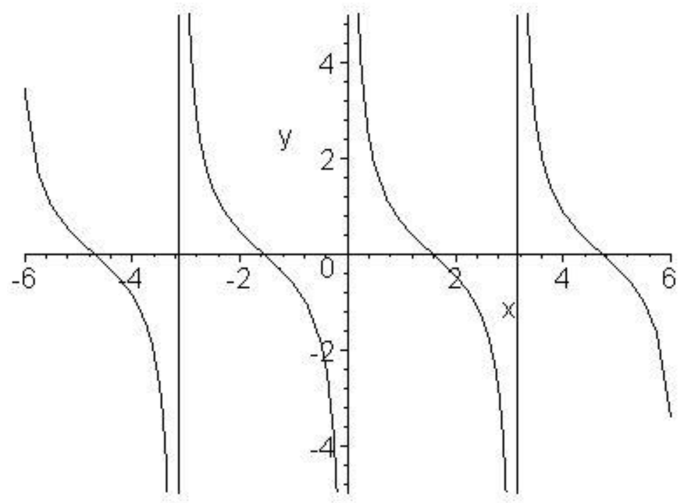
$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$



$y = \operatorname{cotg} x$



Z grafů je vidět, že funkce

- $\sin x$ je lichá, periodická s periodou 2π,
- $\cos x$ je sudá, periodická s periodou 2π,
- $\operatorname{tg} x$ je lichá, periodická s periodou π,
- $\operatorname{cotg} x$ je lichá, periodická s periodou π.

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty goniometrických funkcí pro vybrané argumenty $x \in < 0, \frac{\pi}{2} >$:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{cotg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pro výpočet hodnot goniometrických funkcí pro argument $x > \frac{\pi}{2}$ využijeme toho, že funkce je lichá nebo sudá a periodicity funkce.

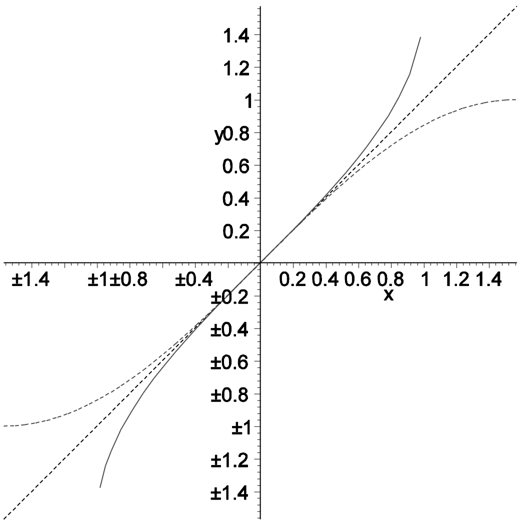
Mezi goniometrickými funkcemi platí následující vztahy

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$$
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq k\pi, k \in Z$$
$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Při jejich odvození se musíme omezit pouze na ten subinterval, na kterém je příslušná goniometrická funkce prostá.

Definice 1.16 Inverzní funkcí k funkci $y = \sin x$ definované na intervalu $< \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ je funkce $\arcsin x$. Je tedy $\arcsin x$ to $y \in < \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$, pro které $\sin y = x$.



$y = \sin x$

$y = \arcsin x$

Poznámka Funkce $y = \arcsin x$ je definovaná na intervalu $< -1, 1 >$, nabývá hodnot z intervalu $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$, v celém definičním oboru je rostoucí a lichá.

V následující tabulce jsou uvedeny funkční hodnoty pro některé vybrané argumenty. Zbývající hodnoty určíme díky skutečnosti, že funkce $\arcsin x$ je lichá.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

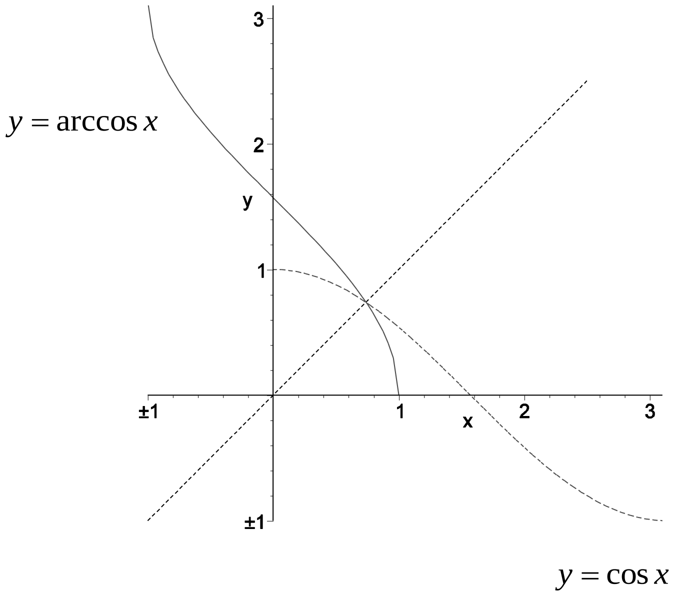
Příklad Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin \frac{(x+2)}{2}$ a stanovte funkční hodnotu $f(-4)$.

Řešení Zadaná funkce je definovaná, když pro její argument platí

$$-1 \le \frac{(x+2)}{2} \le 1, \text{ tzn. když } -4 \le x \le 0.$$

Dále $f(-4) = arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Definice 1.17 Inverzní funkcí k funkci $y = \cos x$ definované na intervalu $< 0, \pi >$ je funkce $arccos\, x$. Je tedy $\arccos x$ to $y \in < 0, \pi >$, pro které $\cos y = x$.



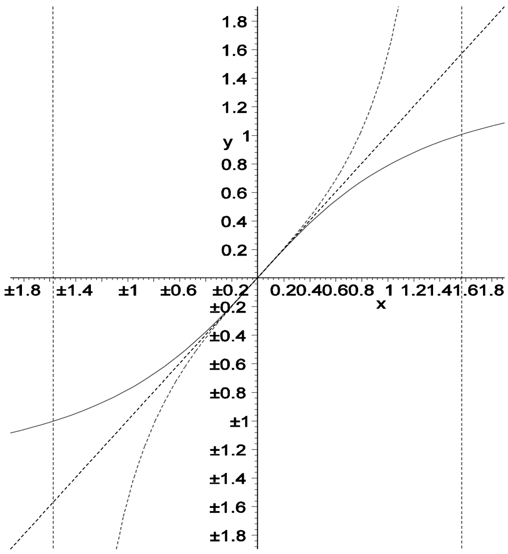
Poznámka Funkce $y = \arccos x$ je definovaná na $< -1, 1 >$, nabývá hodnot z intervalu $< 0, \pi >$ a je v celém definičním oboru klesající.

V následující tabulce jsou uvedeny funkční hodnoty pro vybrané argumenty.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Definice 1.18 Inverzní funkcí k $y = \operatorname{tg} x$ definované na $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je funkce $\operatorname{arctg} x$. Funkce $arctg\, x$ přiřazuje každému $x \in (-\infty, \infty)$ to $y \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, pro které $\operatorname{tg} y = x$.

Poznámka Funkce $y = \operatorname{arctg} x$ je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$, nabývá hodnot z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a je v celém definičním oboru rostoucí a lichá.

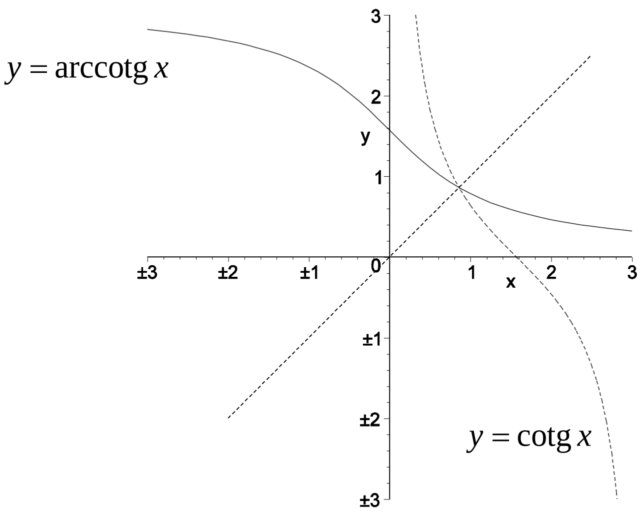


$y = \text{artg}\, x$

Skutečnosti, že funkce $\operatorname{arctg} x$ je lichá, využijeme k určení dalších funkčních hodnot.

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Definice 1.19 Inverzní funkcí k funkci $y = \operatorname{cotg} x$ definované na $(0,\pi)$ je funkce $arccotg\, x.$ Je tedy $\operatorname{arccotg} x$ to $y \in (0,\pi),$ pro které $\operatorname{cotg} y = x.$



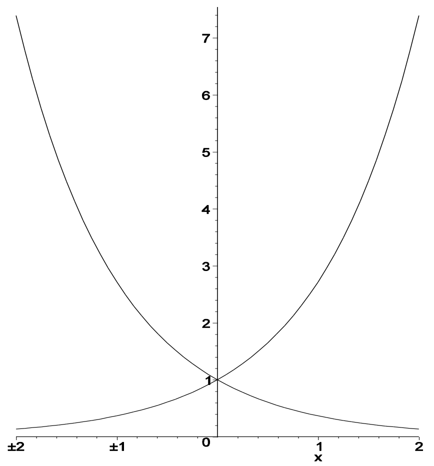
Poznámka Funkce $y = \operatorname{arccotg} x$ je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$, nabývá hodnot z intervalu $(0, \pi)$ a je v celém definičním oboru klesající.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{arccotg} x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Exponenciální funkce

Definice 1.20 Exponenciální funkce je pro $x \in (-\infty, \infty)$ dána vztahem $y = a^x, a > 0$.

$y = a^x, 0 < a < 1$ $\qquad$ $y = a^x, a > 1$



Poznámka Pro $a > 1$ je exponenciální funkce rostoucí a pro $0 < a < 1$ je klesající. Nabývá hodnot z intervalu $(0, \infty)$.

Poznámka V aplikacích má největší význam exponenciální funkce $y = e^x$, která má za základ Eulerovo číslo $e = 2,71813...$

Poznámka Vztah mezi exponenciální funkcí a goniometrickými funkcemi je dán prostřednictvím tzv. Eulerových vzorců. Platí

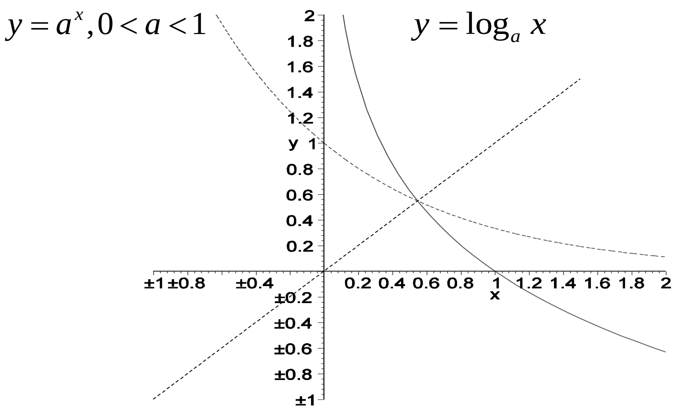
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \text{ kde } i = \sqrt{-1}.$$

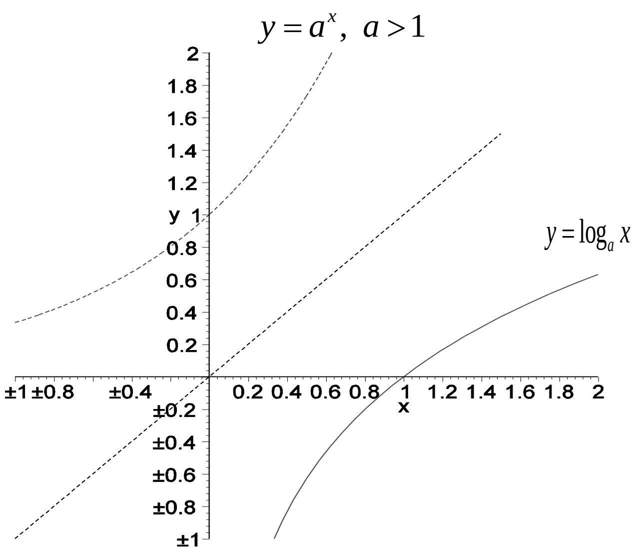
Odtud máme
$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x, \quad \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x.$$

Logaritmické funkce

Definice 1.21 Inverzní funkce k exponenciální funkci $y = a^x$ se nazývá logaritmická a značí se $y = \log_a x$. **Logaritmická funkce** je tedy to $y \in (-\infty, \infty)$, pro které $a^y = x$.

Poznámka Definiční obor logaritmické funkce je interval $(0, \infty)$, obor hodnot $(-\infty, \infty)$.





Poznámka Nejužívanější jsou logaritmické funkce o základu 10 - tzv. dekadický logaritmus, který zapisujeme jako $y = \log x$, a logaritmus o základu e - tzv. přirozený logaritmus, který budeme nadále značit jako $y = \ln x$.

Poznámka Nechť čísla $a, b, x, x_1, x_2 > 0.$ Připomeňme si, že pro logaritmické funkce platí následující vztahy

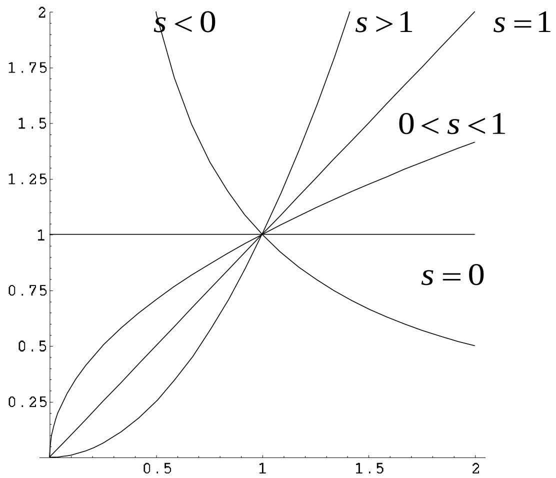
$$\begin{aligned}
\log_a a^x &= x, \\
a^{\log_a x} &= x, \\
\log_a x_1 x_2 &= \log_a x_1 + \log_a x_2, \\
\log_a \frac{x_1}{x_2} &= \log_a x_1 - \log_a x_2, \\
\log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}.
\end{aligned}$$

Obecná mocnina

Definice 1.22 Nechť s je libovolné reálné číslo. Funkci, kterou pro $x > 0,$ definujeme vztahem

$$x^s = e^{s \ln x},$$

budeme nazývat obecnou mocninou a značit $y = x^s$.



Poznámka Definičním oborem jsou všechna $x \in (0, \infty),$ oborem hodnot $y \in (0, \infty).$

- Čísla, pro která polynom nabývá nulovou hodnotu, se nazývají kořeny polynomu.
- Funkci racionální ryze lomenou je možné rozložit na součet parciálních zlomků.
- Inverzní funkce k funkcím goniometrickým se nazývají cyklometrické funkce. Inverzní funkce k funkcím exponenciálním se nazývají logaritmické funkce.
- Exponenciální funkce má tvar $y = a^x$, $a > 0$. Obecná mocnina má tvar $y = x^s$, $x > 0$.

1. Co je definiční obor a co je obor hodnot funkce? Uveďte příklad.
2. Vyjmenujte, jaké vlastnosti mohou mít funkce. Každou z vlastností definujte a vysvětlete pomocí obrázku.
3. Jakou vlastnost musí mít funkce, aby k ní existovala funkce inverzní?
4. Mezi probranými funkcemi najděte ty, jejichž definičním oborem nejsou všechna reálná čísla.
5. Mezi probranými funkcemi najděte ty, které jsou v celém svém definičním oboru ryze monotonní.
6. Nakreslete grafy všech cyklometrických funkcí.
7. Jak bude vypadat čitatel v obecném tvaru rozkladu na parciální zlomky, když jmenovatel má a) reálné, b) komplexní kořeny?
8. Stanovte definiční obory funkcí
   a) $y = \frac{-1}{(x-3)\sqrt{x+4}}$
   b) $y = \sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}$
   c) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+6x-5}$
   d) $y = \ln(\sin x)$

[a) $x \in (-4,3) \cup (3,\infty)$, b) $x \in (-\infty,-1\rangle \cap \langle 1,\infty)$, c) $x \in \langle -2,-3+\sqrt{13}) \cup (-3+\sqrt{13},\infty)$, d) $x \in \cup_{k\in Z}(2k\pi,(2k+1)\pi)$]

9. Nakreslete grafy funkcí a určete jejich vlastnosti.
   a) $y = x^2, y = -x^2, y = 3x^2 + 6x + 5$
   b) $y = \frac{1}{x}, y = -\frac{1}{x}, y = \frac{3x-2}{x+3}$
   c) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

{a) paraboly, b) kubické paraboly, c) hyperboly, d) část hyperboly $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ nad osou x]

10. Rozložte na parciální zlomky
    a) $\frac{1}{1-x^4}$
    b) $\frac{x+1}{(x-2)x(x^2+2)}$

[a) $\frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{2(1+x^2)}$, b) $-\frac{1}{4x} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{2(x^2+2)}$]

Základní literatura:

[1] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy,* 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2]MÁDROVÁ, V. *Matematická analýza I*. UP Olomouc, 2001. 217 stran. ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd. Olomouc, UP Olomouc, 2013. 329 stran.. ISBN 978-80-244-3410-0.

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I*. 1. vyd. UP Olomouc, 2002. 126 stran. ISBN 80-244-0464-8.

Kapitola 2

Limita a spojitost funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat limitu
- počítat limity

Klíčová slova:

Vlastní limita, nevlastní limita, jednostranné limity.

Definice limity funkce

Definice 2.1 Nechť $x_0 \in$ R a $\delta > 0$. Otevřený interval $O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazýváme delta **okolím bodu** na přímce. Pravým okolím bodu x_0 nazveme interval $O^+(x_0) = \langle x_0, x_0 + \delta)$. Levým okolím bodu x_0 je interval $O^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0\rangle$. Interval $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ nazveme ryzím okolím bodu x_0.

Věta 2.1 *Okolí bodu na přímce splňují následující axiomy:*

(A1) Pro libovolná dvě okolí téhož bodu platí $O_1(x_0) \cap O_2(x_0) = O(x_0)$.

(A2) Okolí dvou různých bodů na přímce jdou zvolit tak, aby platilo $O(x_1) \cap O(x_2) = \emptyset$.

(A3) Když $x_1 \in O(x_0)$, *pak existuje okolí* $O(x_1) \subseteq O(x_0)$.

Definice 2.2 Nechť $I \subseteq$ R. Bod $x_0 \in I$ je **hromadným bodem** množiny I, když každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny I.

Příklad Hromadným bodem množiny $\{\frac{1}{x} \,|\, x \in \mathrm{R}\}$ je například bod $x_0 = 0$.

Definice 2.3 (Heine) Funkce f má v hromadném bodě x_0 svého definičního oboru **limitu** L $(L \in \mathrm{R})$, když pro každou posloupnost bodů $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, posloupnost funkčních hodnot $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k číslu L. Píšeme pak

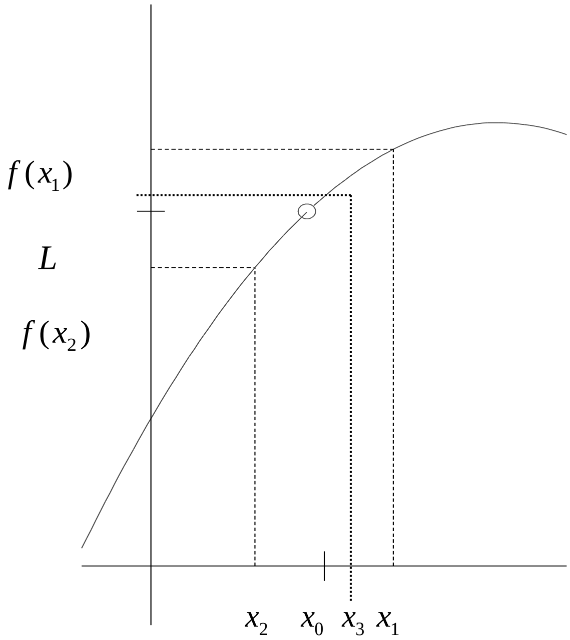
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ nebo $f(x) \to L$ pro $x \to x_0$.

Poznámka Funkce nemusí být v bodě, ve kterém počítáme její limitu, definovaná.

Poznámka Funkce f má v bodě x_0 nevlastní limitu, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathrm{Dom} f$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ platí, že posloupnost funkčních hodnot $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k ∞ (popř. $-\infty$). Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (popř. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

Funkce f má v nevlastním bodě limitu L, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Dom}f, x_n \to \infty$ (popř. $x_n \to -\infty$) platí, že posloupnost funkčních hodnot $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k L. Píšeme pak $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ (popř. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$).

Poznámka Na obrázku je graficky zachycena definice limity. Pro body $x_1, x_2, x_3, \dots$, které se blíží k x_0, jdou hodnoty $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ k limitě L.



Věta 2.2 Jestliže *existuje* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, *pak je jediná*.

Poznámka Z věty 2.2 plyne, že $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ a $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ neexistují.

Věta 2.3 Jestliže *funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu, pak existuje okolí, v němž je omezená.*

Definice 2.4 (Jednostranné limity) Funkce f má v hromadném bodě x_0 svého definičního oboru **limitu zprava**, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in O^+(x_0)$, $x_n \to x_0$, platí $f(x_n) \to L$. Píšeme pak

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L, \text{ popř. } f(x_0^+) = L.$$

Funkce f má v hromadném bodě x_0 svého definičního oboru **limitu zleva**, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in O^-(x_0)$, $x_n \to x_0$, platí $f(x_n) \to L$. Píšeme

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L, \text{ popř. } f(x_0^-) = L. \tag{21}$$

Limitu zprava a limitu zleva nazýváme souhrnně **jednostranné limity**.

Příklad Spočítejte limitu funkce $f(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } x>2\\ 3 & \text{pro } x\le 2\end{cases}$, když $x\to 2^{\pm}$,

Řešení $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1, \lim_{x\to 2^-} f(x)=3.$

Věta 2.4 *Funkce f má v hromadném bodě x_0 svého definičního oboru limitu, právě když zde má limitu zprava a limitu zleva a obě se rovnají.*

Příklad Stanovte limitu funkce $y=\frac{1}{x}$, pro $x\to 1,\infty,0^+$. Výsledky ověřte na grafu funkce.

Řešení $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty.$

Pravidla pro počítání s limitami

Věta 2.5 Nechť *existuje* $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=L_2$ *a čísla* $L_1,L_2\in \mathrm{R}$, *pak existuje limita součtu, rozdílu, součinu eventuelně podílu funkcí* f *a* g. *Platí*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L_1+L_2. \tag{22}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L_1-L_2. \tag{23}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=L_1L_2. \tag{24}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}, \text{ pokud } L_2\ne 0. \tag{25}$$

Výčet neurčitých výrazů:

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0}$$

Příklad Spočítejte $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2}$.

Řešení Když do daného zlomku dosadíme $x=2,$ dostaneme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Proto před tím, než začneme počítat limitu, zlomek upravíme. Čitatele rozložíme na součin a zkrátíme se jmenovatelem. Pak spočteme limitu.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=0.$$

Věta 2.6 *Nechť* $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ *a existuje okolí* $O(x_0),$ *v němž je funkce* g *ohraničená, pak*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0.$$

Příklad Dokažte, že $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0.$

Řešení Protože $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ a pro libovolné $x\in\mathrm{R}$ je funkce $\sin x$ omezená, lze aplikovat Větu 2. 6. obdržíme tak požadovanou rovnost.

Věta 2.7 *Nechť v levém okolí bodu* x_0 *je funkce* f *omezená a* $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)=0.$*. Pokud pro všechna* $x\in(x_0-\delta,x_0)$ *je* $sgn\ f(x)=sgn\, g(x),$ *pak*

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

Když ale $sgn\ f(x)\neq sgn\, g(x)$ *pro* $x\in(x_0-\delta,x_0),$ *pak*

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty.$$

Poznámka V pravém okolí bodu x_0 platí analogické tvrzení.

Příklad Spočítejte $\lim\limits_{x\to -1^{\pm}}\frac{1}{x^3+1}$.

Řešen: V čitateli zlomku $\frac{1}{x^3+1}$ je kladná konstanta, jmenovatel pro $x\to -1^+$ je kladný a jde k 0, proto $L_1=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x^3+1}=\infty.$ Pro $x\to -1^-$ je jmenovatel záporný a jde k 0, proto $L_2=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^3+1}=-\infty$.

Protože $L_1\neq L_2,$ nemá funkce v bodě $x_0=-1$ limitu.

Věta 2.8 *Když* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$ *a funkce* f, g a h *splňují v jistém okolí bodu* x_0, *že* $f(x) \le h(x) \le g(x)$, *pak*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Poznámka Na základě Věty 2.8 lze dokázat, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Příklad Spočítejte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Řešení Čitatele i jmenovatele vynásobíme výrazem $1+\cos x$, pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Věta 2.9 *(Limita složené funkce) Nechť*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \lim_{y\to y_0} g(y) = L$$

a existuje $O(x_0)$ *tak, že pro všechna* $x \in O(x_0), x \ne x_0$ *je také* $f(x) \ne y_0$. *Pak existuje* $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L..$$

Příklad Spočítejte $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Řešení $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \left|\frac{1}{x+1} = y\right| = \lim\limits_{y\to 1} \ln y = 0.$

Příklad Spočítejte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x+\sin(x)}$.

Řešení $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x+\sin(x)}{x}\right)^{-1} = \lim_{x\to 0} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Spojitost

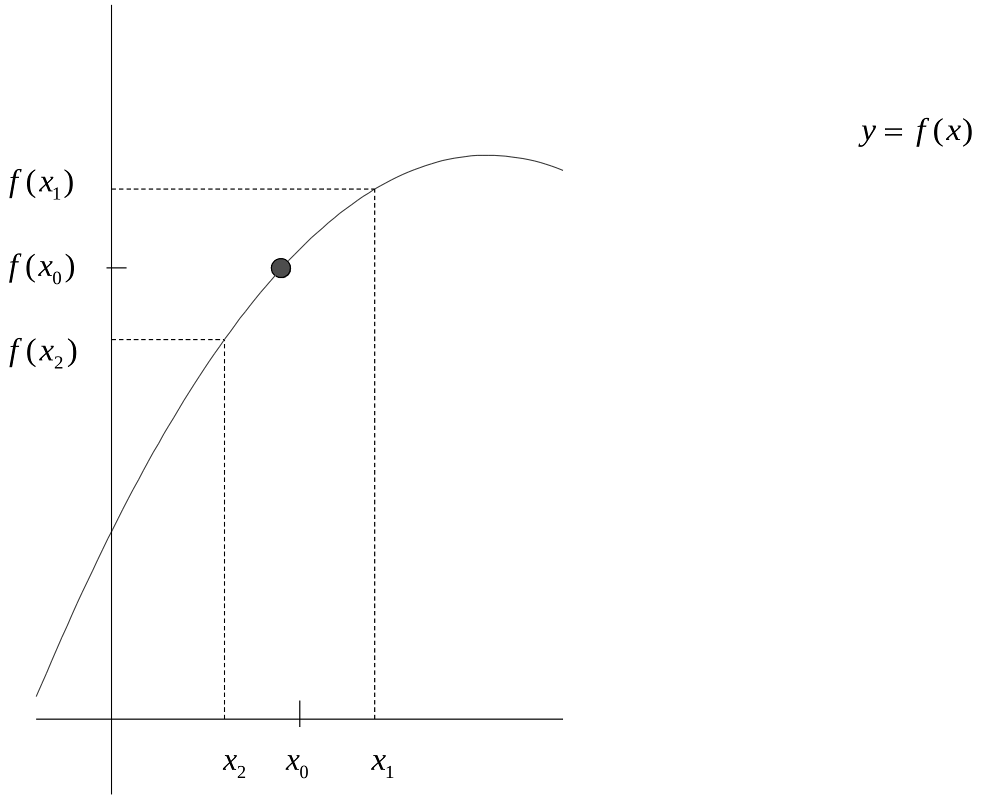
V předešlé kapitole jsme se věnovali limitě funkce a právě prostřednictvím limity je definován pojem spojitost funkce. V této kapitole si nejprve uvedeme, co to znamená, že funkce je spojitá v bodě a na intervalu, klasifikujeme různé druhy nespojitosti a nakonec se zmíníme o stejnoměrně spojitých funkcích.

Definice 2.5 **Funkce** f je **spojitá** v hromadném bodě $x_0 \in \mathrm{D}f$, právě když

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Poznámka (Geometrická interpretace spojitosti) Z definice limity a spojitosti (viz definice 2.1 a 2.5) dostaneme, že funkce f je spojitá v bodě x_0, když

$$\text{pro } x \to x_0 \text{ jde } f(x) \to f(x_0).$$



Definice 2.6 **Funkce** f je v bodě x_0 **spojitá zprava**, když $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ a **zleva**, když $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Poznámka Vzhledem k definicím limity uvedeným v předchozím odstavci, můžeme spojitost definovat také následujícími ekvivalentními způsoby: Funkce f je spojitá v bodě x_0, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \to x_0, x \neq x_0$, platí $f(x_n) \to f(x_0)$

Věta 2.10 *Funkce f je spojitá v bodě x_0, právě když zde má obě jednostranné limity, pro které platí $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$.*

Věta 2.11 Jestliže *funkce f a g jsou spojité v bodě x_0, pak také funkce $f \pm g, f.g, \frac{f}{g}$ (když $g(x_0) \neq 0$) jsou spojité v bodě x_0.*

Věta 2.12 *Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0, funkce g je spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$, pak také složená funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě x_0.*

Druhy nespojitosti

Funkce nemusí být jenom spojité. Například funkce racionální lomená je nespojitá v kořenech svého jmenovatele, funkce $\operatorname{cotg} x$ je nespojitá v celistvých násobcích π. Věnujme se proto nyní klasifikaci jednotlivých druhů nespojitosti.

Definice 2.7 Bod x_0, v němž funkce není spojitá, se nazývá

- bodem odstranitelné nespojitosti, když funkce f není v bodě x_0 definovaná a platí

$$f(x_0^+) = f(x_0^-),$$

  nebo když

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) \neq f(x_0).$$

- Bodem nespojitosti 1. druhu, když obě jednostranné limity jsou konečné a

$$f(x_0^+) \neq f(x_0^-).$$

- Bodem nespojitosti 2. druhu, když alespoň jedna z jednostranných limit je nevlastní.

Příklad Určete body nespojitosti funkcí

a) $y = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$,

b) Heavisideovy funkce $y = H(x+1)$ a

c) funkce $y = \frac{1}{x^2}$.

Řešení

- Pro funkci $y = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$ je $x_0 = -2$ bodem odstranitelné nespojitosti, protože
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+4x+4}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x+2) = 0.$$
- Heavisideovu funkci definujeme vztahem $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$.

  Pro funkci $y = H(x+1)$ je $x_0 = -1$ bodem nespojitosti 1. druhu, protože
$$\lim_{x \to -1^+} H(x+1) = 1, \lim_{x \to -1^-} H(x+1) = 0.$$
- Pro $y = \frac{1}{x^2}$ je $x_0 = 0$ bodem nespojitosti 2. druhu, protože
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2} = \infty, \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Poznámka Jestliže v bodě x_0 limita funkce neexistuje, je funkce v tomto bodě nespojitá.

Je-li funkce definovaná v izolovaném bodě, pak ji zde považujeme za spojitou.

Příklad Funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ je nespojitá v bodě $x_0 = 0$, protože zde nemá limitu.

Dirichletova funkce $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pro } x \text{ racionální} \\ 0 \text{ pro } x \text{ racionální} \end{cases}$ je nespojitá ve všech bodech svého definičního oboru.

Spojitost na intervalu

Definice 2.8 Funkce f je spojitá na intervalu I, když je spojitá v každém jeho vnitřním bodě a pokud levý (pravý) koncový bod patří do intervalu I, je v něm spojitá zprava (zleva).

Definice 2.9 Funkce f je na intervalu I po částech spojitá, když zde má pouze konečný počet bodů nespojitosti, a to prvního druhu.

Příklad Funkce $y = \mathrm{sgn}(x)$ je po částech spojitá.

Věta 2.13 *(Weierstrass) Spojitá funkce na uzavřeném intervalu je omezená a nabývá zde své nejmenší a největší hodnoty, a to buď uvnitř, nebo v krajních bodech intervalu.*

V tomto odstavci bylo uvedeno, že limita funkce f pro $x \to x_0$ se rovná L, když pro každou posloupnost bodů $x_n \to x_0$, $x \neq x_0$, konverguje posloupnost funkčních hodnot $f(x_n) \to f(x_0)$. Funkce může mít nejvýš jednu limitu. Při výpočtu limit využíváme skutečnosti, že limita součtu funkcí je rovna součtu limit, limita součinu funkcí je rovna součinu limit, limita složené funkce je rovna limitě z jejích složek. Funkce je v bodě spojitá, právě když $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. O vlastnostech funkce spojité na uzavřeném intervalu pojednává Weierstrassova věta.

1. Nakreslete graf takové funkce f, pro kterou $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5$ a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty$.
2. Nakreslete graf funkce $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x > 1 \\ 1 & \text{pro } x < 1 \end{cases}$. Má tato funkce v bodě $x_0 = 1$ limitu?
3. Musí být funkce v bodě, ve kterém je spojitá, také definovaná?
4. Čemu se musí rovnat limita funkce f v bodě x_0, aby funkce byla v tomto bodě spojitá?
5. Jak je to se spojitostí funkce racionální lomené a cyklometrických funkcí?
6. Spočítejte limitu
   - a) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^2-9}{x+3}$, když $x_0 = -3, 3, \infty, -\infty$
   - b) $\lim\limits_{x\to x_0} x\,\mathrm{cotg}\, x$, když $x_0 = 0, \frac{\pi}{2}$
   - c) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \frac{2-x}{x}$
   - d) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \mathrm{arctg}\, x$

[a) $3, \infty, \infty$, b) $-6, 0, \infty, -\infty$, c) $\pm\infty$ d) 0]

7. Určete body nespojitosti funkce

a) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

b) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$

c) $f(x)=[x]$

[a) $x=1$ — bod odstranitelné nespojitosti, $x=-2$ — bod nespojitosti 2. Druhu; b) $x=1$ — bod nespojitosti 2. Druhu; c) $x=n, n\in \mathrm{N}$ — body nespojitosti 1. Druhu.]

Základní literatura:

[1] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy,* 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V. *Matematická analýza I*. UP Olomouc, 2001. 217 stran. ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd. Olomouc, UP Olomouc, 2013. 329 stran.. ISBN 978-80-244-3410-0.

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I*. 1. vyd. UP Olomouc, 2002. 126 stran. ISBN 80-244-0464-8

Kapitola 3

Derivace funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat derivaci funkce
- spočítat libovolnou derivaci
- aplikovat poznatky diferenciálního počtu

Klíčová slova:

Derivace funkce v bodě, derivace funkce na intervalu, derivace vyšších řádů, logaritmická derivace, L'Hospitalovo pravidlo, stacionární body, lokální extrémy, globální (absolutní) extrémy, funkce konvexní a konkávní, asymptoty bez směrnice a se směrnicí

Derivace funkce v bodě

Při zavedení pojmu derivace vycházíme z limity. Derivaci zavedeme jako limitu relativní změny funkce. Tento způsob definování dělá z derivace nástroj k podchycení dynamiky dění. V tomto odstavci kromě definice derivace si uvedeme ještě pravidla pro její výpočet.

Definice 3.1 Nechť funkce f je definována v okolí bodu x_0 a existuje konečná limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce** f **v bodě** x_0. Pokud uvedená limita neexistuje nebo je nevlastní, funkce v bodě x_0 derivaci nemá.

Poznámka Kromě označení $f'(x_0)$ se pro derivaci funkce v bodě používá i zápisu $f'|_{x=x_0}$.

Poznámka Derivaci funkce f v bodě x_0 je možné také definovat vztahem

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

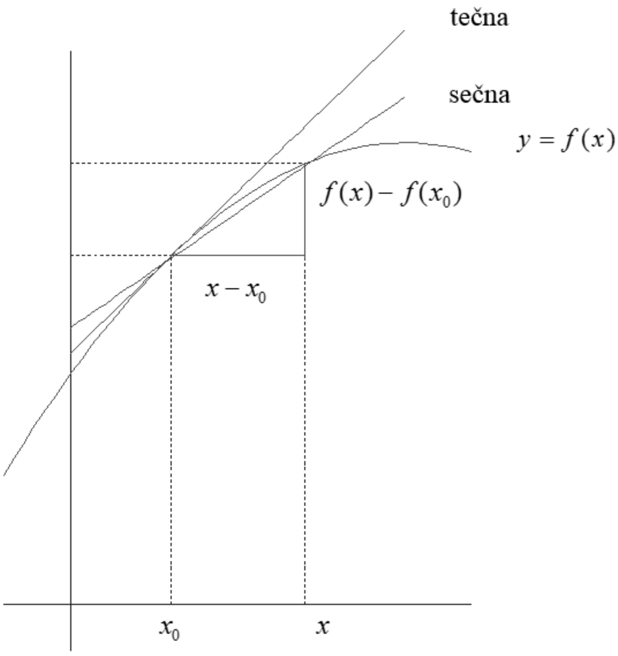
kde $h = x - x_0$ je diference argumentu x v bodě x_0.

Diferenci argumentu x můžeme také značit $\Delta x = x - x_0$.

Pokud $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ označíme diferenci funkce f v bodě x_0, dostáváme další možnost zápisu pro derivaci funkce

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Poznámka (Geometrický význam derivace) Podíl $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ představuje z geometrického hlediska směrnici sečny ke křivce $y = f(x)$, která prochází body $(x, f(x))$ a $(x_0, f(x_0))$. Jestliže se s bodem x začneme blížit k x_0, bude sečna přecházet v tečnu. To znamená, že derivaci $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ můžeme geometricky interpretovat jako směrnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$.



Příklad Spočítejte derivaci funkce v bodě x_0 z definice derivace, když

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = e^x$, c) $f(x) = \sin(x)$.

Řešení

a) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(2x_0+h)h}{h} = 2x_0$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$.

c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\cos\frac{2x_0+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \cos\dfrac{2x_0+h}{2} \dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x_0$.

Poznámka (Rovnice tečny a normály) Vzhledem ke geometrickému významu derivace dostáváme, že tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ je přímka, která prochází bodem $(x_0, f(x_0))$ a má směrnici $f'(x_0)$. Rovnice tečny má proto tvar

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Normála ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$ je přímka kolmá na tečnu. Směrnice této normály je rovna $\frac{-1}{f'(x_0)}$ a rovnice normály má tvar

$$f(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Příklad Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = x^2$, a to v bodě $T = (1, ?)$.

Řešení Pro druhou souřadnici bodu dotyku máme $y = 1^2 = 1$. Podle předchozího příkladu a) máme

$$y'(1) = 2x|_{x=1} = 2.$$

Rovnice tečny má tvar

$$y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = -1 + 2x$$

a rovnice normály je

$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}$$

Poznámka (Fyzikální interpretace) Derivace funkce v bodě představuje okamžitou lokální změnu. Tak například, když $s = s(t)$ je dráha, pak $s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ je okamžitá rychlost.

Definice 3.2 Nechť funkce f je definována v okolí bodu x_0 a existuje konečná limita

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0),$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě x_0 zprava**.

Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0),$$

pak ji nazýváme **derivací funkce f v bodě x_0 zleva**.

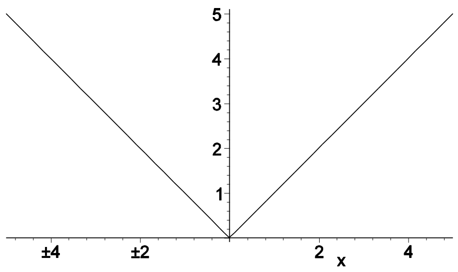
Poznámka Derivaci funkce v bodě x_0 zprava je možné také značit $f'(x_0^+)$ a derivaci funkce v bodě x_0 zleva lze značit $f'(x_0^-)$.

Věta 3.1 *Funkce f má v bodě x_0 derivaci, právě když zde má derivaci zprava a derivaci zleva, které se navzájem rovnají.*

Věta 3.2 *(Derivace a spojitost) Jestliže funkce f má v bodě x_0 konečnou derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

Poznámka Obrácená věta neplatí. Funkce, která je spojitá v bodě, nemusí mít v tomto bodě derivaci. Funkce $y = |x|$ je sice v bodě $x_0 = 0$ spojitá, ale nemá zde derivaci, protože $y'(0^+) = 1 \neq -1 = y'(0^-)$.

$$y = |x|$$



Pravidla pro derivování

Pro praktické počítání je důležité vědět, jak se derivuje součet, součin a podíl funkcí, jak je to s derivováním složené funkce a jak vypadají derivace elementárních funkcí.

Věta 3.3 *Ve všech bodech, kde jsou uvedené funkce definovány, platí*

$$\begin{array}{rclrcl}
(x^n)' & = & nx^{n-1}, & c' & = & 0 \\
(a^x)' & = & a^x \ln a, & (e^x)' & = & e^x \\
(\log_a x)' & = & \dfrac{1}{x \ln a}, & (\ln x)' & = & \dfrac{1}{x} \\
(\sin x)' & = & \cos x, & (\cos x)' & = & -\sin x \\
(\operatorname{tg} x)' & = & \dfrac{1}{\cos^2 x}, & (\operatorname{cotg} x)' & = & -\dfrac{1}{\sin^2 x} \\
(\arcsin x)' & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' & = & -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\operatorname{arctg} x)' & = & \dfrac{1}{1+x^2}, & (\operatorname{arccotg} x)' & = & -\dfrac{1}{1+x^2}
\end{array}$$

Věta 3.4 *Nechť funkce f a g mají derivaci v bodě x_0 svého společného definičního oboru a c je libovolná konstanta, pak existují derivace*

$$(cf(x))'_{x=x_0}, (f(x) \pm g(x))'_{x=x_0}, (f(x)g(x))'_{x=x_0}, \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0},$$

pro které platí

$$(cf(x))'_{x=x_0} = cf'(x_0)$$
$$(f(x) \pm g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$
$$(f(x)g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
$$\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Příklad Spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^2 e^x$ v bodě x_0.

Řešení Funkci budeme derivovat jako součin podle věty 3.4. Při derivování jednotlivých činitelů využijeme výsledků z příkladu, který jsme spočítali již dříve.

$$(x^2 e^x)'_{x=x_0} = (2xe^x + x^2 e^x)_{x=x_0} = (2x_0 + (x_0)^2)e^{x_0}.$$

Věta 3.5 Nechť *funkce f má v bodě x_0 a jeho okolí derivaci a funkce g má derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$, pak složená funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(g(f(x)))'_{x=x_0} = g'(y_0)f'(x_0).$$

Poznámka Větu 3.5 lze použít i k výpočtu derivace vícenásobně složené funkce, která se pak rovná součinu derivací jednotlivých složek.

Příklad Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \sin x^3$ v bodě x_0.

Řešení Funkci budeme derivovat jako složenou funkci podle věty 3.5. Její vnitřní složka je $u = x^3$ a vnější složka je $y = \sin u.$ Při derivování jednotlivých složek využijeme výsledků z dříve uvedeného příkladu. Protože

$$(\sin u)' = \cos u \quad \text{a} \quad (x^3)' = 3x^2,$$

dostaneme

$$(\sin x^3)_{x=x_0} = (3x^2 \cos x^3)_{x=x_0} = 3x_0^2 \cos x_0^3.$$

Věta 3.6 *Nechť funkce* f *má v bodě* x_0 *derivaci různou od nuly, pak inverzní funkce* f^{-1} *(pokud existuje) má v bodě* $y_0 = f(x_0)$ *derivaci, pro kterou platí*

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Příklad Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \ln x$ v bodě x_0.

Řešení Funkce je inverzní funkcí k funkci $f(x) = e^x$. Podle dříve uvedeného příkladu je $(e^x)'_{x=x_0} = e^{x_0}$. Z věty 3.6 a vzhledem ke skutečnosti, že pro $y_0 > 0$ platí $x_0 = \ln y_0$, máme

$$(\ln(y))'_{y=y_0} = \frac{1}{e^{x_0}} = e^{-x_0} = e^{\ln\frac{1}{y_0}} = \frac{1}{y_0}.$$

Definice 3.3 Funkce f má **derivaci na intervalu** I, když má derivaci v každém jeho vnitřním bodě a pokud levý (pravý) krajní bod patří do intervalu, má v něm derivaci zprava (zleva).

Pomocí definice derivace a výše uvedených vět lze odvodit následující vzorce pro derivování elementárních funkcí:

Příklad Derivujte funkce

a) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$, $\quad b)$ $y = \ln\frac{1}{x}$, $\quad$ c) $y = \mathrm{tg}^2 2x$.

Řešení

a) Funkci derivujeme jako podíl (viz Věta 3.3)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right) = \frac{(\cos x - \sin x)\cos x - (\sin x + \cos x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

b) Funkci derivujeme jako funkci složenou podle Věty 3.4

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{1}{x}\right) = (\ln x^{-1})' = \frac{1}{x^{-1}}(-x^{-2}) = -\frac{1}{x}.$$

c) Funkce je vícenásobně složená (viz poznámka výše), a tedy

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{tg}^2 2x\right) = 2\,\mathrm{tg}2x \frac{1}{\cos^2 2x} 2 = \frac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}.$$

Poznámka (Logaritmická derivace) Když chceme derivovat funkci $f(x)^{g(x)}$, upravíme ji nejprve na tvar $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ a pak derivujeme. Obdržíme

$$y' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Příklad Derivujte funkci $y = x^{2x}$.

Řešení $(x^{2x})' = (e^{2x\ln x})' = e^{2x\ln x}(2\ln x + 2x\frac{1}{x}) = x^{2x}(2+2\ln x) = 2x^{2x}(1+\ln x).$

Derivace vyšších řádů

V matematické analýze se pracuje i s derivacemi vyšších řádů. Obdržíme je postupným derivováním z derivací řádů nižších.

Definice 3.4 Nechť funkce f má derivaci v $O(x_0)$ a funkce f' má derivaci v bodě x_0, pak říkáme, že funkce f má **druhou derivaci** v bodě x_0 a píšeme

$$f''(x_0) = (f'(x))'_{|x=x_0}.$$

Příklad Spočtěte 2. derivaci funkce $y = \ln 2x$.

Řešen: $y' = \frac{1}{2x}2 = \frac{1}{x}, y'' = \frac{-1}{x^2}.$

Příklad Zjistěte, zda funkce $y = x + e^{2x} + e^x$ je řešením diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3.$

Řešení: Spočteme 2. derivaci zadané funkce: $y' = 1 + 2e^{2x} + e^x, y'' = 4e^{2x} + e^x$. Po dosazení do levé strany diferenciální rovnice dostaneme

$$4e^{2x} + e^x - 3 - 6e^{2x} - 3e^x + 2x + 2e^{2x} + 2e^x = 2x - 3.$$

Protože v poslední rovnici se levá strana rovná pravé, je funkce $y = x + e^{2x} + e^x$ řešením rovnice $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3.$

Poznámka Definici 3.4 můžeme zobecnit a definovat derivaci n -tého řádu

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'_{|x=x_0}.$$

Vztah platí pro všechna ta x_0, pro která má funkce $f^{(n-1)}$ derivaci.

Derivace vyšších řádů značíme $f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots$

Příklad Spočtěte n -tou derivaci funkce $y = \ln x^3$.

Řešení: $y' = \frac{3x^2}{x^3} = 3\frac{1}{x}$, $y'' = 3\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, $y''' = 3\frac{2}{x^3}$, $y^{(4)} = 3\left(\frac{-6}{x^4}\right)$, … $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}3(n-1)!}{x^n}, n = 1, 2, 3, \ldots$

Využití diferenciálního počtu

Diferenciální počet je účinným nástrojem při zkoumání vlastností funkcí. Pomocí derivací můžeme stanovit limity neurčitých výrazů. Můžeme také pomocí toho, zda derivace určitého řádu je kladná či záporná, určít intervaly, ve kterých je funkce rostoucí popř. klesající a ve kterých je konvexní popř. konkávní. Pomocí limity zase rozhodneme, jestli graf funkce má nějaké asymptoty.

L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo slouží k výpočtu limity funkce.

Věta 3.7 (l'Hospitalovo *pravidlo) Nechť pro funkce* f *a* g *platí (* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. *Pokud* f *i* g *jsou diferencovatelné v okolí bodu* x_0 *a existuje* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, *pro kterou platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 3.8 Nechť pro funkce f a g platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Pokud f i g jsou k -krát diferencovatelné v okolí bodu x_0 a existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$, pak existuje také $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}.$$

Poznámka Věty 3.7 a 3.8 platí i v případě, když předpokládáme, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ nebo že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, popř. když místo $x\to x_0$ bereme $x\to\infty$ nebo $x\to-\infty$.

Poznámka L'Hospitalovo pravidlo se užívá k určování limit výrazů typu "$\frac{0}{0}$" nebo "$\frac{\infty}{\infty}$".

L'Hospitalovo pravidlo můžeme také použít při určování limit výrazů typu "$0.\infty$", "$\infty-\infty$", "0^0", "∞^0" nebo "1^∞" ovšem až po úpravě, která výraz převede na typ "$\frac{0}{0}$" nebo "$\frac{\infty}{\infty}$":

- "$0.\infty$" upravíme takto $u.v=\frac{u}{\frac{1}{v}}$ na typ "$\frac{0}{0}$",
- "$\infty-\infty$" upravíme takto $u-v=\frac{1}{\frac{1}{u}}-\frac{1}{\frac{1}{v}}=\frac{\frac{1}{v}-\frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}}$ na typ "$\frac{0}{0}$",
- "0^0", "∞^0", "1^∞" pomocí úpravy $u^v=e^{v\ln u}$ převedeme na typ "$e^{0.\infty}$".

Příklad Spočítejte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\sin x}$.

Řešení $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{\sin x}\text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{\cos x}=-1.$

Příklad Spočítejte $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x+1)$.

Řešení $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln(x+1)\text{"}0.\infty\text{"}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\text{"}\tfrac{\infty}{\infty}\text{"}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=0.$

Příklad Spočítejte $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Řešení

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x\text{"}0^0\text{"}=\lim_{x\to 0}e^{x\ln\sin x}=\lim_{x\to 0}e^0=1$$

$$\lim_{x\to 0}x\ln\sin x\text{"}0.\infty\text{"}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}\text{"}\tfrac{\infty}{\infty}\text{"}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\operatorname{tg} x}\text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}==\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=0.$$

Monotonie a extrémy funkce

Definice 3.5 Řekneme, že **funkce** f je v bodě x_0 (ostře) **rostoucí**, když existuje vlastní okolí bodu x_0 tak, že $f(x) < f(x_0)$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f(x) > f(x_0)$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Pokud $f(x) > f(x_0)$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f(x_0) > f(x)$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, pak **funkce** f je v bodě x_0 (ostře) **klesající**.

Poznámka Funkce je rostoucí na intervalu I, právě když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu. Funkce je klesající na intervalu I, právě když je klesající v každém bodě tohoto intervalu.

Věta 3.9 (Postačující *podmínka monotonie) Když funkce* f *má v bodě* x_0 *první derivaci a* $f'(x_0) > 0$, *pak* f *je v* x_0 *(ostře) rostoucí. Když funkce* f *má v bodě* x_0 *první derivaci a* $f'(x_0) < 0$, *pak* f *je (ostře) klesající.*

Příklad Určete intervaly, na kterých je funkce $y = |x+3|$ ostře rostoucí a na kterých je ostře klesající.

Řešení Zadanou funkci můžeme psát ve tvaru $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{pro } x > -3 \\ 0 & \text{pro } x = -3 \\ -x-3 & \text{pro } x < -3 \end{cases}$.

O monotonii funkce rozhodneme na základě první derivace $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > -3 \\ 0 & \text{pro } x = -3 \\ -1 & \text{pro } x < -3 \end{cases}$

Odtud obdržíme, že funkce $y = |x+3|$ je pro $x > -3$ ostře rostoucí a pro $x < -3$ ostře klesající.

Poznámka, I když je funkce v nějakém bodě rostoucí, nemusí ještě mít v tomto bodě kladnou první derivaci. Například funkce $y = x^3$ je v bodě $x_0 = 0$ rostoucí, ale $y'(0)$ není kladná. (Namalujte si obrázek.)

Poznámka Když pro všechna $x \in I$ je $f'(x) > 0$, pak je funkce f (ostře) rostoucí na intervalu I. Pokud $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I$, je funkce f (ostře) klesající na intervalu I. V případě, že pro všechna $x \in I$ platí neostrá nerovnost $f'(x) \leq 0$ (popř. $f'(x) \geq 0$) pro všechna $x \in I$, hovoříme o tom, že funkce je na intervalu I nerostoucí (popř. neklesající).

Definice 3.6 Bod, ve kterém má funkce nulovou první derivaci, se nazývá **stacionární bod**.

Definice 3.7 Funkce $f: I \to H$ nabývá v bodě x_0 svého

- **lokálního maxima**, když existuje okolí $O(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in O(x_0)$ je $f(x_0) \geq f(x)$.
- **lokálního minima**, když existuje okolí $O(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in O(x_0)$ je $f(x_0) \leq f(x)$.

Pokud $f(x_0) > f(x)$ (popř. $f(x_0) < f(x)$) pro všechna $x \in O(x_0) \cap I, x \neq x_0$, je x_0 bodem ostrého lokálního maxima (popř. minima).

Body lokálního maxima a minima nazýváme souhrnně body **lokálních extrémů**.

Poznámka Funkce může mít tedy extrém buď ve stacionárních bodech nebo v bodech, v nichž derivace neexistuje. Například funkce $y = x^2$ má ve stacionárním bodě $x_0 = 0$ lokální extrém. Funkce $y = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ nemá sice derivaci, ale má zde lokální extrém.

Na druhé straně stacionární bod nemusí být ještě bodem lokálního extrému, jak je tomu třeba u funkce $y = x^3$.

Věta 3.10 *Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in I$. Když pro všechna $x \in O(x_0)$ platí*

$$f'(x) > 0 \text{ pokud } x < x_0 \text{ a } f'(x) < 0 \text{ pokud } x > x_0,$$

má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Pokud pro všechna $x \in O(x_0)$ platí

$$f'(x) < 0 \text{ pokud } x < x_0 \text{ a } f'(x) > 0 \text{ pokud } x > x_0,$$

pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Věta 3.11 *Nechť x_0 je stacionárním bodem funkce f a existuje $f''(x_0)$. Jestliže $f''(x_0) < 0$, pak funkce f má v bodě x_0 lokální maximum. Když $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 lokální minimum.*

Příklad Vyšetřete lokální extrémy funkce $y = x^2 - 6x$.

Řešení Nejprve určíme stacionární body: $y' = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Podle věty 3.11 rozhodneme o druhu extrému. Protože pro libovolné x je $y''(x) = 2 > 0$, má zadaná funkce v bodě $x = 3$ lokální minimum.

Příklad Určete rozměry rotačního válce, který má při daném objemu nejmenší povrch.

Řešení Označme:

r — poloměr válce,

v — výšku válce,

V — objem válce,

S — povrch válce.

Pro objem pak platí $V = \pi r^2 v$. Odtud dostaneme, že $v = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

Pro povrch S válce máme $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + \frac{2v}{r}$

Najdeme stacionární body funkce $S = S(r)$.

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

O druhu extrému rozhodneme pomocí druhé derivace.

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} = \frac{4\pi r^3 + 4V}{r^3},$$

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ je bodem minima.}$$

Válec bude mít při daném objemu nejmenší povrch, když jeho poloměr $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Poznámka Úlohy najít lokální nebo absolutní extrém funkce bývají označovány jako úlohy optimalizační.

Definice 3.8 Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in I$ svého **absolutního maxima**, když pro všechna $x \in I$ platí, že $f(x) \le f(x_0)$.

Funkce f nabývá v bodě $x_0 \in I$ svého **absolutního minima**, když pro všechna $x \in I$ je $f(x) \ge f(x_0)$.

Souhrnně absolutní maximum a absolutní minimum nazýváme **absolutními extrémy**.

Věta 3.12 *Každá funkce spojitá na uzavřeném intervalu $< a, b >$ nabývá svého absolutního extrému buď v některém bodě lokálního extrému nebo v krajních bodech intervalu.*

Příklad Najděte absolutní extrémy funkce $f(x) = 2x^3 - 6x + 8$ na intervalu $< 0,3 >$.

Řešení Zadaná funkce je spojitá na uzavřeném intervalu $< 0,3 >$.

Derivace $f'(x) = 6x^2 - 6 = 0,$ když $x = \pm 1.$

Bod $x = -1$ nepatří do uvažovaného intervalu.

Protože $f''(x) = 12x$ a $f''(1) = 12 > 0,$ má funkce v bodě $x = 1$ lokální minimum.

Porovnáním funkčních hodnot v bodě lokálního extrému, kde $f(1) = 4,$ a v krajních bodech intervalu, kde platí $f(0) = 8,$ $f(3) = 44$ zjistíme, že bod $x = 3$ je bodem absolutního maxima a bod $x = 1$ je bodem absolutního minima.

Vyšetřování průběhu funkce

Graf funkce, zejména když je přesný, umožňuje vytvořit si také přesnou představu o vlastnostech funkce. K jeho sestrojení můžeme využít své poznatky z diferenciálního počtu.

Definice 3.9 Nechť existuje $f'(x_0).$ Řekneme, že funkce f je v bodě x_0

- **konvexní**, právě když existuje $O(x_0),$ že pro všechna $x \in O(x_0), x \neq x_0,$ je

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{58}$$

- **konkávní**, právě když existuje $O(x_0),$ že pro všechna $x \in O(x_0), x \neq x_0,$ je

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{59}$$

Poznámka Graf funkce, která je v bodě x_0 konvexní, se nachází nad tečnou a že graf funkce, která je v bodě x_0 konkávní, se nachází pod tečnou.

Věta 3.13 *Když funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci a $f''(x_0) > 0,$ pak f je v x_0 konvexní. Pokud $f''(x_0) < 0,$ je funkce f v x_0 konkávní.*

Poznámka Funkce f je konvexní (konkávní) na intervalu $I,$ pokud je konvexní (konkávní) pro všechna $x \in I.$

Definice 3.9 Nechť f je spojitá v bodě x_0 a má zde vlastní nebo nevlastní derivaci. Řekneme, že x_0 je **inflexní bod**, když se v něm funkce mění z konvexní na konkávní nebo naopak.

Věta 3.14 *Pokud existuje* $f''(x_0)$ *a* x_0 *je inflexní bod, pak* $f''(x_0)=0.$

Poznámka Inflexním bodem funkce může být jen ten bod $x_0,$ v němž $f''(x_0)$ neexistuje nebo kde $f''(x_0)=0.$

Poznámka Obecně platí:

Když $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$ a

- n je sudé, $f^{(n)}(x_0)>0,$ pak f má v bodě x_0 ostré lokální minimum,
- n je sudé, $f^{(n)}(x_0)<0,$ pak f má v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- n je liché, $f^{(n)}(x_0)>0,$ pak f je rostoucí v bodě $x_0,$
- n je liché, $f^{(n)}(x_0)<0,$ pak f je klesající v bodě $x_0.$

Když $f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$ a

- n je sudé, $f^{(n)}(x_0)>0,$ pak f je konvexní v bodě $x_0,$
- n je sudé, $f^{(n)}(x_0)<0,$ pak f je v bodě x_0 konkávní,
- n je liché, pak f má v bodě x_0 inflexi.

Definice 3.10 V rovině je dána funkce f a přímka $p.$ Řekneme, že p je **asymptotou ke grafu funkce** $y=f(x),$ právě když vzdálenost bodů grafu funkce $y=f(x)$ od přímky p se pro $x\to\pm\infty$ blíží nule.

Poznámka Asymptoty jsou přímky, ke kterým se blíží graf funkce, když $x\to\pm\infty$ popř. $x\to x_0^{\pm}$ v případě, že x_0 je bod, ve kterém funkce není definovaná.

Věta 3.15 Přímka $x=x_0$ *je asymptotou bez směrnice ke grafu funkce* $y=f(x),$ *právě když*

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\pm\infty.$$

Věta 3.16 *Přímka* $y=ax+b$ *je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce* $y=f(x)$ *právě, když*

$$a=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x},\ \ b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax).$$

Poznámka Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme následovně

(a) Stanovíme nulové body funkce a body, v nichž funkce není definována. Ty nám rozdělí definiční obor na subintervaly, ve kterých funkce nabývá buď jen kladných nebo jen záporných hodnot.

(b) Spočteme první derivaci a určíme body, v nichž je 1. derivace nulová nebo v nichž neexistuje. Číselnou osu tak rozdělíme na subintervaly, ve kterých je funkce buď jen rostoucí nebo jen klesající.

(c) Spočteme druhou derivaci a určíme body, v nichž je druhá derivace nulová nebo v nichž není definována. Tyto body rozdělí číselnou osu na subintervaly, v nichž je funkce buď jen konvexní nebo jen konkávní.

(d) Zjistíme, zda funkce má nějaké asymptoty bez směrnice nebo se směrnicí.

(e) Spočteme některé funkční hodnoty ve významných bodech (např. v bodech extémů nebo v inflexních bodech) a nakreslíme graf.

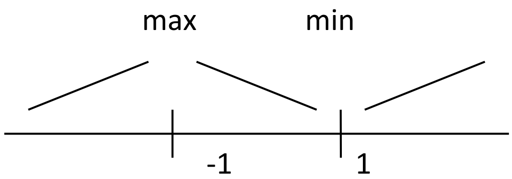
Příklad Vyšetřete průběh funkce $y = 2x^3 - 6x + 8$.

Řešení

(a) Definiční obor: $x \in (-\infty, \infty)$.

(b) Derivace $y' = 6x^2 - 6$.

$6x^2 - 6 = 0 \iff x = \pm 1$



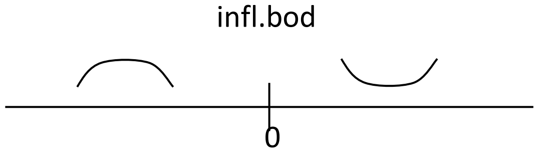
Funkce je rostoucí, když $6(x-1)(x+1) > 0$ tj. $x \in (-\infty, -1> \cup <1, \infty)$.

Funkce je klesající, když $6(x-1)(x+1) < 0$ tj. $x \in <-1, 1>$.

Funkční hodnoty v bodech extrémů: $f(-1) = 12$, $f(1) = 4$.

(b) Druhá derivace $y'' = 12x$.

$12x = 0 \iff x = 0$



Funkční hodnota v inflexním bodě: $f(0)=8$.

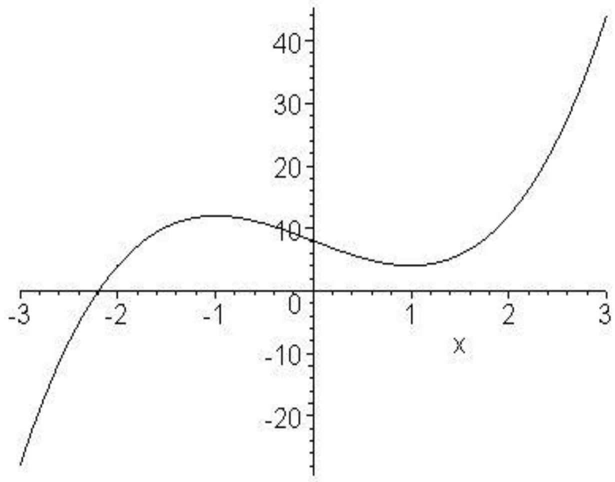
Funkce je konvexní, když $12x>0$ tj. $x \in (0,\infty)$.

Funkce je konkávní, když $12x<0$ tj. $x \in (-\infty, 0 >$.

(d) Asymptoty bez směrnice funkce nemá, protože je všude definovaná.

Protože $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3-6x+8}{x} = +\infty$, nemá funkce ani asymptoty se směrnicí.

Graf funkce $y = 2x^3 - 6x + 8$:



Příklad Vyšetřete průběh funkce $y = x + \frac{1}{x}$.

Řešení

(a) $\mathrm{Dom}\, f : x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$y = \frac{x^2+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$y = \frac{x^2+1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

(b) $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

Funkce je klesající, když $y' < 0 \Leftrightarrow x \in < -1, 0) \cup (0, 1 >$.

Funkce je rostoucí, když $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1 > \cup < 1, \infty)$.

Extémy: $y_{\max}(-1) = -2, y_{\min}(1) = 2.$

(c) $y'' = \frac{2}{x^3}$ Funkce je konvexní, když $y'' > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Funkce je konkávní, když $y'' < 0 \Leftrightarrow x < 0.$

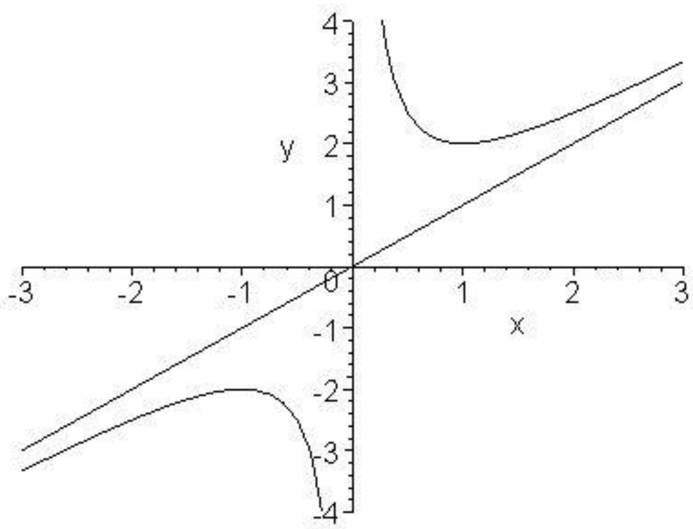
(d) Protože $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} (x + \frac{1}{x}) = \pm\infty,$ je $x = 0$ asymptotou bez směrnice.

Dále

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x}(x + \frac{1}{x}) = \lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x^2}) = 1, b = \lim_{x \to \pm\infty} (x + \frac{1}{x} - x) = 0.$$

Je tedy $y = x$ asymptotou se směrnicí.

Graf funkce $y = \frac{(x+1)^2}{x-1}$ a asymptot $x = 0, y = x$:



Σ

Derivace funkce v bodě x_0 je definována vztahem $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

Číslo $f'(x_0)$ je směrnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0.

Derivaci vyššího řádu obdržíme derivováním derivace řádu o jedničku nižšího.

Když funkce má v bodě extrému derivaci, pak je tato derivace rovna nule.

Výpočet limit typu "$\frac{0}{0}$" nebo "$\frac{\infty}{\infty}$" můžeme provést pomocí l'Hospitalova pravidla.

Z 1. derivace funkce určíme stacionární body a intervaly, ve kterých je funkce rostoucí nebo klesající.

Z 2. derivace funkce určíme intervaly, ve kterých je funkce konvexní nebo konkávní.

Pomocí limit určujememe asymptoty ke grafu funkce.

?

1. Napište vztah, kterým je definována první derivace funkce v bodě.
2. Jestliže funkce má v bodě x_0 derivaci, musí být v tomto bodě spojitá?
3. Jaký je geometrický význam 1. derivace v bodě?
4. Zopakujte si základní vzorce pro derivování funkcí.
5. Které typy limit se dají počítat pomocí l'Hospitalova pravidla přímo?
6. Jaká musí být hodnota první derivace funkce f v bodě extrému? Proč?
7. Uveďte nutné podmínky pro to, aby dost hladká funkce (tzn. funkce, která má potřebné derivace) byla na intervalu I klesající a konkávní.
8. Jak je definován stacionární a jak inflexní bod hladké funkce?
9. Musí mít funkce ve svém stacionárním bodě extrém?
10. Za jakých podmínek má funkce asymptotu bez směrnice a asymptotu se směrnicí?
11. Spočtěte derivace a rozhodněte, kdy je derivace definovaná.

a) $(2x^2+x^7+3^x-2\ln x)'$
b) $(\operatorname{tg} x \cos x)'$
c) $(x^2 e^x)'$
d) $(xe^x(\cos x+\sin x))'$
e) $y=\frac{1}{\sqrt{1-3x}}$
f) $y=\ln\frac{2-x}{2+x}$

[a) $4x+7x^6+3^x\ln 3-\frac{2}{x}$, b) $\cos x$, c) $xe^x(2+x)$, d) $e^x(\cos x+\sin x+2x\cos x)$,
e) $y'=\frac{3}{2\sqrt{(1-3x)^3}}, x\in(-\infty,\frac{1}{3})$, f) $y'=\frac{-4}{4-x^2}, x\in \mathrm{R}$, $\{\pm 2\}$]

12. Spočítejte derivace funkce f v daném bodě

a) $f(x)=\sin x, x_0=\frac{5\pi}{4}$
b) $f(x)=\ln x^2, x_0=1$
c) $f(x)=\ln(\operatorname{arctg} x), x=\sqrt{3}$
d) $f(t)=\frac{e^t}{t}, t=2$

[a) $f'(x)=\cos x$, $f'(\frac{5\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,b) $f'(x)=\frac{2}{x}$, $f'(1)=2$,c) $f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$, $f(\sqrt{3})=\frac{3}{4\pi}$,
d) $f'(t)=\frac{e^t(t-1)}{t^2}$, $f'(2)=\frac{e^2}{4}$]

13. Spočítejte derivaci funkce (logaritmická derivace)

a) $y = x^x$

c) $y = \sin x^{\cos x}$

[a) $y' = x^x(\ln x + 1)$, b) $y' = (\sin x)^{\cos x}(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x})$]

14. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě T, když

a) $y = x^2, T = (?,0)$

b) $y = \arcsin x, T = (\frac{1}{2},?)$

[a) $T = (0,0), t: y = 0, n: x = 0$,b) $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, $t: 4\sqrt{3}x - 6y + \pi - 2\sqrt{3} = 0$, $n: 3\sqrt{3}x + 6y - \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$]

15. Spočítejte 2. derivaci funkce

a) $y = \ln \frac{x^3}{x+1}$

b) $y = e^x(\cos x - \sin x)$

[a) $y'' = \frac{-x^2-4x-2}{x^2(x+1)^2}$, b) $y'' = -2e^x(\sin x + \cos x)$]

16. Pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte limitu

a) $\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^2 \arcsin x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2+x^5}$

c) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

[a) $\frac{4}{3}$, b) ∞ , c) 1]

17. Určete absolutní extrémy funkce $f = x + \frac{1}{x-1}$ na intervalu $(-4, 0>$.

[$f_{\max}(0) = -1$, $f_{\min}(-4) = -4{,}2$]

18. Vyšetřete průběh funkce

a) $f(x) = \frac{e^x}{x}$,

b) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$,

[a) $Df = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$, pro $x \in (-\infty,0) \cup (0,1>$ klesá, pro $x \in <1,\infty)$ roste, $f''(x) = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$, konkávní pro $x \in (-\infty,0)$, konvexní pro $x \in (0,\infty)$, Asymptota: $x = 0$. Pro $x \to -\infty$ je $y = 0$ asymptotou.

b) $Df = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, $f'(x) = \frac{x^3+2}{x^3}$, pro $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (0,\infty)$ roste, pro $x \in (-\sqrt[3]{2}, 0)$ klesá. $f''(x) = -\frac{6}{x^4}$, konkávní pro $x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$. Asymptoty: $x = 0$, $y = x$.]

Základní literatura:

[1] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy,* 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V. *Matematická analýza I*. UP Olomouc, 2001. 217 stran. ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd. Olomouc, UP Olomouc, 2013. 329 stran.. ISBN 978-80-244-3410-0.

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I*. 1. vyd. UP Olomouc, 2002. 126 stran. ISBN 80-244-0464-8

Kapitola 4

Neurčitý integrál

Po prostudování kapitoly budete umět:

- znát primitivní funkce k funkcím
- stanovit primitivní funkce na základě vlastností neurčitého integrálu
- použít metodu per partes
- použít substituční metodu

Klíčová slova:

Primitivní funkce, neurčitý integrál, metoda per partes, substituční metoda

Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 4.1 Nechť f a F jsou funkce definované na otevřeném intervalu I. Když funkce F má na intervalu I derivaci takovou, že pro všechna $x \in I$ platí

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

pak říkáme, že **funkce** F je **primitivní** k funkci f na intervalu I.

Příklad Ukažte, že $F(x) = (x-1)\ln(1-x) - x$ je primitivní funkcí k $f(x) = \ln(1-x)$ na intervalu $(-\infty, 1)$.

Řešení Obě funkce F i f jsou na intervalu $(-\infty, 1)$ definovány. Současně pro všechna x z tohoto intervalu platí

$$F'(x) = \ln(1-x) - \frac{x-1}{1-x} - 1 = \ln(1-x) = f(x).$$

To znamená, že F je primitivní funkcí k f.

Obecně ke každé funkci f nemusí na daném intervalu existovat funkce primitivní. Platí však následující tvrzení.

Věta 4.1 *Ke každé funkci f spojité na intervalu I existuje na intervalu I funkce primitivní.*

Z definice primitivní funkce je zřejmé, že když F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, pak také všechny funkce které se od F liší o konstantu, jsou primitivní k f na I.

Definice 4.2 Množinu všech primitivních funkcí příslušných na intervalu I k funkci f nazveme **neurčitý integrál**. Píšeme pak $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

Zde $f(x)$ je integrovaná funkce (integrand), dx je diferenciál nezávisle proměnné, c je integrační konstanta.

Poznámka Integrování a derivace jsou na intervalu, na kterém je lze realizovat, navzájem inverzní operace:

$$[\int f(x)\,dx]' = [F(x)]' = f(x)$$
$$\int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x).$$

Zapamatujte si, jak vypadají základní vzorce pro integrování některých funkcí. O správnosti vztahů se přesvědčíme tak, že obě strany rovnic derivujeme (viz definice 4. 1).

Věta 4.2 *Ve všech bodech, kde jsou uvažované funkce definovány, platí*

$$
\begin{array}{lclclcl}
\int x^n \, dx & = & \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1 & & \int \dfrac{1}{x} dx & = & \ln|x| + c \\[2ex]
\int a^x \, dx & = & \dfrac{a^x}{\ln a} + c & & \int e^x \, dx & = & e^x + c \\[2ex]
\int \cos x \, dx & = & \sin x + c & & \int \sin x \, dx & = & -\cos x + c \\[2ex]
\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx & = & \operatorname{tg} x + c & & \int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx & = & -\operatorname{cotg} x + c \\[2ex]
\int \dfrac{1}{x^2+1} dx & = & \operatorname{arctg} x + c & & \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & = & \arcsin x + c \\[2ex]
\int \dfrac{1}{x^2+1} dx & = & -\operatorname{arccotg} x + c & & \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & = & -\arccos x + c
\end{array}
$$

Příklad Spočítejte následující integrály $\int 0 \, dx, \ \int dx, \ \int x^{10} \, dx, \ \int 10^x \, dx, \ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

Řešení: Integrovat budeme podle vzorců uvedených ve větě 4.2.

$$\int 0 \, dx = 0 +$$

$$\int dx = x +$$

$$\int x^{10} \, dx = \frac{x^{11}}{11} +$$

$$\int 10^x \, dx = \frac{10^x}{\ln 10} +$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = 2\sqrt{x} +$$

Základní integrační metody

Věta 8.3 *Nechť k je libovolná konstanta a na intervalu I existují integrály $\int f(x)\,dx,\ \int g(x)\,dx$. Pak také existují $\int (f(x) \pm g(x))\,dx,\ \int k\, f(x)\,dx$ a platí: Integrál součtu funkcí je roven součtu integrálů těchto funkcí. Konstantu lze vytknout před integrál.*

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$
$$\int k\, f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx.$$

Poznámka Větu lze zobecnit na konečný počet sčítanců. Platí vztah

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots k_n f_n(x)]\,dx = k_1 \int f_1(x)\,dx + \cdots k_n \int f_n(x)\,dx$$

Příklad Spočtěte $\int \frac{1-x^2}{x^3-x^2}\,dx$.

Řešení $\int \frac{1-x^2}{x^3-x^2}\,dx = \int \frac{(1-x)(1+x)}{x^2(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{x} - \ln|x| + c$

Metoda per partes

Věta 3.4 (Metoda per partes) *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu I spojité derivace prvního řádu, pak*

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

Příklad Spočítejte integrál $\int (x+1)\cos x\,dx$.

Řešení

$$\int (x+1)\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = x+1 & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} =$$
$$= (x+1)\sin x - \int \sin x\,dx = (x+1)\sin x + \cos x + c.$$

Příklad Spočítejte integrál $\int x^2 \ln x \, dx$.

Řešení

$$\int x^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \dfrac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

Poznámka Když máme spočítat $\int P_n(x) v(x) \, dx,$ kde $P_n(x)$ je polynom n-tého stupně, provedeme v metodě per partes v závislosti na tvaru funkce $v(x)$ volbu takto:

- Pokud $v(x) = e^x, \sin x, \cos x,$ položíme $g(x) = P_n(x), \quad f'(x) = v(x).$
- Pokud $v(x) = \operatorname{arctg} x, \arcsin x, \ln^n x,$ položíme $f'(x) = P_n(x), \quad g(x) = v(x).$

V případě, kdy integrál součinu polynomu a nějaké funkce řešíme metodou per partes, klademe za nederivovanou funkci polynom za předpokladu, že ke druhému činiteli umíme určit primitivní funkci. Jinak musíme provést volbu opačně.

Substituční metoda

Věta 3.5 *(Substituční metoda) Nechť funkce $t = \varphi(x)$ má na otevřeném intervalu I_1 derivaci a zobrazuje tento interval na interval I_2, funkce $y = f(t)$ je spojitá na otevřeném intervalu I_2. Když položíme $t = \varphi(x),$ bude platit*

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int f(t) \, dt.$$

Příklad Spočítejte $\int \cos^2 x \sin x \, dx.$

Řešení

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} \cos x & = & t \\ -\sin x dx & = & dt \end{vmatrix} = -\int t^2 \, dt = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c$$

Poznámka Větu o substituci lze také aplikovat v opačném sledu

$$\int f(x)\,dx = \begin{vmatrix} x & = & \varphi(t) \\ dx & = & \varphi'(t)\,dt \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Příklad Spočítejte $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} x & = & \sin t \\ dx & = & \cos t\,dt \\ \sqrt{1-x^2} & = & \cos t \\ t & = & \arcsin x \end{vmatrix} = \int dt = t + c = \arcsin x + c.$$

Příklad Spočítejte $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(x^2+1)}}$.

Řešení

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{(x^2+1)}}\,dx = \begin{vmatrix} x^2+1 & = & t^2 \\ x\,dx & = & t\,dt \\ x^2 & = & t^2-1 \end{vmatrix} = \int \frac{(t^2-1)^3}{t}\,t\,dt = \int (t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1)\,dt =$$

$$= \frac{(x^2+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{3(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{3(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c.$$

Pro úspěšné zvládnutí integrace nestačí pamatovat si jen, že integrujeme buď přímo podle integračních vzorců, nebo použijeme metodu per partes, eventuelně substituční metodu. Užitečné je také vědět, jak postupovat při integraci racionální funkce lomené a jak pro určité typy funkcí zvolit substituci. Ve zbytku kapitoly se proto budeme věnovat těmto otázkám.

Integrace racionální funkce lomené

Funkci racionální ryze lomenou rozložíme na součet parciálních zlomků a pak jednotlivé sčítance integrujeme zvlášť. Musíme umět spočítat integrály tvaru $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx$ (subst. $x-\alpha = t$)

a $\int \frac{Bx+C}{[(x-a)^2+b^2]^l}dx$. Zde $\int \frac{Bx+C}{[(x-a)^2+b^2]^l}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x-2a)}{(x^2-2ax+a^2+b^2)^l} + \frac{aB+C}{[(x-a)^2+b^2]^l}dx$. Při integraci prvního sčítance použijeme subst. $x^2-2ax+a^2+b^2=t$. Při integraci druhého sčítance subst. $x-\alpha=t$.

Příklad Spočítejte $\int \frac{x^3}{x-2}dx$.

Řešení Nejprve v integrované funkci provedeme naznačené dělení

$$x^3:(x-2)=x^2+2x+4+\frac{8}{x-2}.$$

$$\int \frac{x^3}{x-2}dx = \int\left(x^2+2x+4+\frac{8}{x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|+c.$$

Příklad Spočítejte $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}dx$.

Řešení Jmenovatele rozložíme na součin kořenových činitelů a integrovanou funkci vyjádříme jako součet parciálních zlomků

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(1-x)(2-x)},$$

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{2-x}.$$

$$1=A(2-x)+B(1-x).$$

Pro $x=1$ je $A=1$. Pro $x=2$ je $B=-1$. Je tedy

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{1}{1-x}dx - \int \frac{1}{2-x}dx = \begin{vmatrix} 1-x & =t \\ -dx & =dt \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2-x & =s \\ -dx & =ds \end{vmatrix} =$$

$$=\int \frac{1}{t}(-dt) - \int \frac{1}{s}(-ds) = -\ln|t|+\ln|s|+c = \ln\left|\frac{2-x}{1-x}\right|+c.$$

Příklad Spočítejte $\int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,dx$.

Řešení Nejprve provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$
$$x^2+2=A(x^2+x+1)+B(x^2-x)+C(x-1)$$
$$x^2:1=A+B$$
$$x^1:0=A-B+C$$
$$x^0:2=A-C.$$
$$A=1, B=0, C=-1.$$
$$\frac{x^2+2}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$\int\frac{x^2+2}{x^3-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx.$$

Protože $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$, dostaneme

$$\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\begin{vmatrix} x-1 & =t \\ dx & =dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{4\,dx}{3\left((\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1\right)}=$$
$$=\begin{vmatrix} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} & =s \\ \frac{2}{\sqrt{3}}dx & =ds\end{vmatrix}=\ln|t|-\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}ds}{\frac{3}{4}(s^2+1)}=\ln|x-1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

Integrace goniometrických funkcí

V integrálech tvaru $\int \sin mx\cos nx\,dx$ nejprve provedeme úpravu pomocí vzorců

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)]$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

a pak integrujeme.

Příklad Spočítejte $\int \cos 2x\sin 2x\,dx$.

Řešen: $\int \cos 2x \sin 2x \, dx = \int \frac{1}{2}(\sin 0 + \sin 4x)\, dx = \frac{-1}{8}\cos 4x + c$

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ řešíme tak, že pokud

- m, n jsou celá, m liché, volíme substituci $\cos x = t$,
- m, n jsou celá, n liché, volíme substituci $\sin x = t$,
- m, n jsou sudá a kladná, upravíme integrovanou funkci pomocí vzorců

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

- pokud m, n jsou sudá, alespoň jedno záporné, volíme substituci

$$\operatorname{tg} x = t.$$

Příklad Spočítejte $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

Řešení

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x} dx = \begin{vmatrix} \sin x & = t \\ \cos x \, dx & = dt \end{vmatrix} = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt$$

$$= \int \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + c = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c.$$

Poznámka Víme, že ke každé funkci spojité na intervalu I existuje primitivní funkce. Doposud jsme tuto funkci získali v konečném tvaru. Některé integrály spojitých funkcí však není možné vyjádřit v konečném tvaru. Tyto integrály představují tzv. vyšší transcendentní funkce. Patří sem např. $\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \sin x^2 \, dx, \int \cos x^2 \, dx.$

Množinu všech primitivních funkcí příslušných k funkci f nazýváme neurčitým integrálem. Při výpočtu neurčitého integrálu používáme

- základní integrační vzorce

- skutečnost, že konstantu lze vytknout před integrál a že integrál součtu je roven součtu integrálů
- metodu per partes
- substituční metodu.

?

1. Jak je definován neurčitý integrál?
2. Napište vztahy pro metodu per partes a substituční metodu v neurčitém integrálu.
3. Jak byste postupovali při integraci funkce racionální lomené? Zopakujte si vzorce pro integraci elementárních funkcí.
4. Metodou per partes, kde zvolíte $u=(x^2+1)^{-n}$, stanovte rekurentní formuli pro výpočet integrálu $K_n=\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}dx.$
5. Metodou per partes, kde zvolíte $u=\sin^{n-1}x$, stanovte rekurentní formuli pro výpočet integrálu $I_n=\int \sin^n x\,dx.$
6. Spočítejte integrály
   a) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$
   b) $\int x e^{x^2}\,dx$
   c) $\int \frac{x}{x^4-x^2}\,dx$
   d) $\int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx$
   e) $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$
   f) $\int \sin 3x \cos 4x\,dx$

[a) $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$, b) $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$, c) $-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+c$, d) $\frac{-1}{x}-\operatorname{arctg}x+c$, e) $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c$, f) $\frac{-1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos(-x)+c$]

Základní literatura:

[1] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy,* 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V. *Matematická analýza I*. UP Olomouc, 2001. 217 stran. ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd. Olomouc, UP Olomouc, 2013. 329 stran.. ISBN 978-80-244-3410-0.

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I*. 1. vyd. UP Olomouc, 2002. 126 stran. ISBN 80-244-0464-8

Kapitola 5

Určitý integrál

Po prostudování kapitoly budete umět:

- použít metodu per partes a substituční metodu pro výpočet určitého integrálu
- spočítat plochu křivočarého obrazce

Klíčová slova:

Určitý integrál, Newton-Leibnizova věta, metoda per partes pro určitý integrál, substituční metoda v určitém integrálu

Definice Riemannova určitého integrálu

Odvození Riemannova určtého integrálu: Předpokládejme, že funkce f je na intervalu $< a, b >$ omezená.

Interval $< a, b >$ rozdělíme na subintervaly $< x_{i-1}, x_i >$, $i = 1, 2, \ldots, n.$ Vzniklé dělení intervalu $< a, b >$ budeme značit

$$D_n : a = x_0 < x_1 < \ldots, x_n = b.$$

Číslo

$$\nu(D_n) = \max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})$$

budeme nazývat normou dělení D_n. Dělení intervalu je možné volit různými způsoby. Předpokládejme, že $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost dělení. Řekneme, že posloupnost dělení $\{D_n\}$ je nulová, když pro normy dělení platí $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0.$

Pro dělení $D_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ dále vybereme body $\xi_i \in < x_{i-1}, x_i >$, $i = 1, \ldots, n.$ Množinu těchto bodů označíme

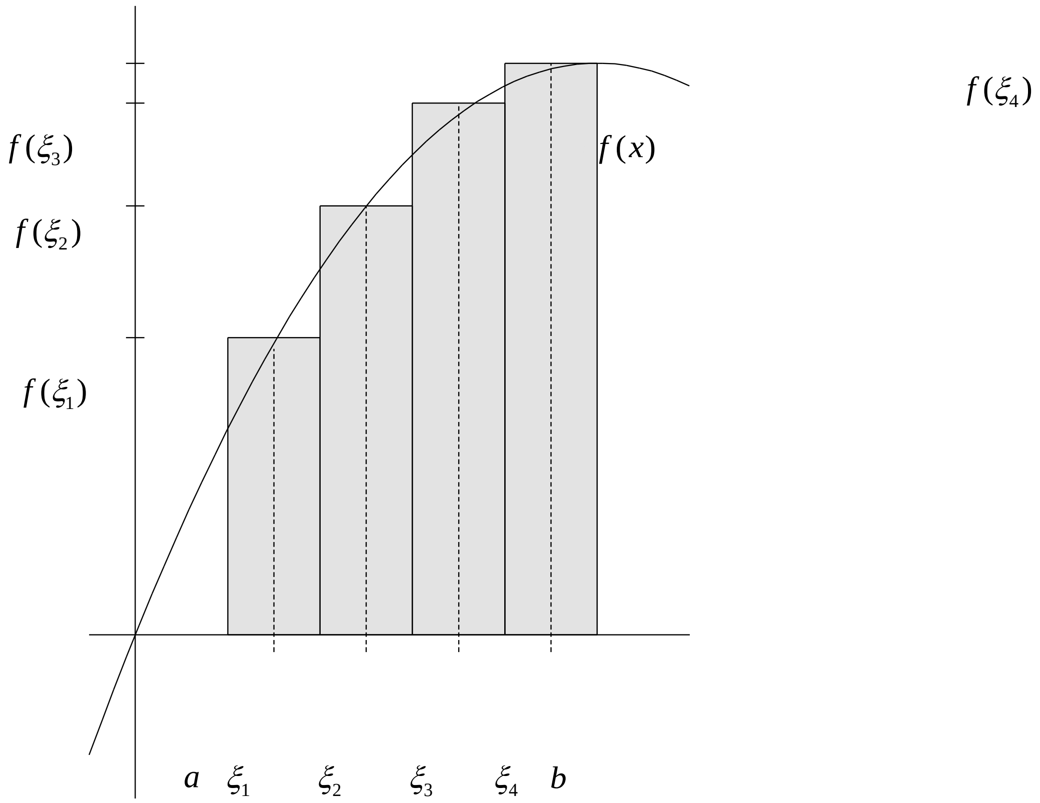
$$\Xi_n = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$$

a budeme ji nazývat výběrem reprezentantů příslušným k dělení D_n.

Číslo

$$G(D_n, f, \Xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

které geometricky můžeme interpretovat jako součet ploch obdélníků o stranách délky $f(\xi_i)$ a $(x_i - x_{i-1})$, nazveme integrálním součtem příslušným k dělení D_n, funkci f a výběru reprezentantů Ξ_n. (Viz vyplněná plocha na následujícím obrázku.)



Riemannův určitý integrál definujeme jako limitní případ integrálních součtů.

Definice 4.1 (Riemann) Nechť funkce f je omezená na intervalu $< a,b >$. Jestliže pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} G(D_n, f, \Xi_n) = I, \tag{23}$$

pak říkáme, že **funkce** f je **riemannovsky integrovatelná** na $< a,b >$ a klademe

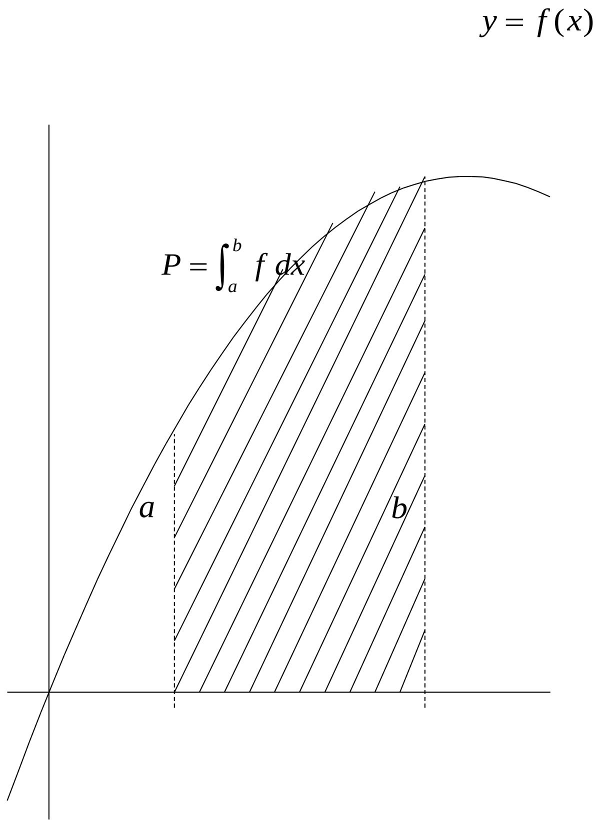
$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = I. \tag{24}$$

Množinu všech (riemannovsky) integrovatelných funkcí na $< a,b >$ budeme v dalším textu značit $R(a,b)$.

Poznámka Definici 9.1 lze také vyjádřit následovně

$$f \in R(a,b) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall \{D_n\}, |\nu(D_n)| < \delta) \Rightarrow | G(D_n, f, \Xi) - I | < \varepsilon\right)^{..}$$

Poznámka Když $f(x) \geq 0$ na $< a,b >$, pak $\int_a^b f(x)\,dx$ představuje z geometrického hlediska plochu rovinného obrazce omezeného křivkou $y = f(x)$ a přímkami $x = a, x = b$ a osou x. (Viz následující obrázek.)



Poznámka Každá funkce nemusí být riemannovsky integrovatelná. Riemannovsky integrovatelná není např. Dirichletova funkce

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x \text{ iracionální} \\ 1 \text{ pro } x \text{ racionální.} \end{cases}$$

Mezi integrovatelné funkce patří např. funkce spojité.

Výpočet určitého integrálu

Praktický výpočet Riemannova určitého integrálu provádíme na základě následující věty.

Věta 4.1 *(Newton-Leibnizova) Nechť* $f \in R(a,b),$ *funkce* F *je na* $< a,b >$ *spojitá a primitivní k* f *na* $(a,b),$ *pak*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Poznámka Věta umožňuje spočítat Riemannův integrál následovně: Jestliže F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b), pak

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Příklad Spočítejte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

Řešení $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\dfrac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Věta 4.2 Množina $R(a,b)$ *tvoří lineární prostor.*

Poznámka Věta 4.2 vyjadřuje skutečnost, že určitý integrál ze součtu dvou funkcí je roven součtu určitých integrálů. Konstantu lze vytknout před určitý integrál.

Příklad Spočítejte $\int\limits_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$.

Řešení:

$$\int\limits_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int\limits_0^1 \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx = = 2\int\limits_0^1 dx - 2\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = = 2[x]_0^1 - 2[\operatorname{arctg} x]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Pokud neumíme primitivní funkci určit přímo, můžeme sáhnout k substituční metodě nebo metodě per partes.

Věta 4.3 *(Per partes pro určitý integrál) Když funkce* f, g *jsou na intervalu* $< a,b >$ *spojitě diferencovatelné, pak*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Příklad Spočítejte $\int_1^e \ln x\,dx$.

Řešení $\int_1^e \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{vmatrix} = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = = e - 0 - [x]_1^e = 1.$

Věta 4.4 *(Substituční metoda pro určitý integrál) Předpokládejme, že* $\varphi(t)$ *je funkce monotonní a spojitě diferencovatelná pro všechna* $t \in <\alpha, \beta>$. *Na intervalu* $<a, b>$, *kde* $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, *je dána funkce* f, *která je zde spojitá. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Příklad Spočítejte $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$

Řešení

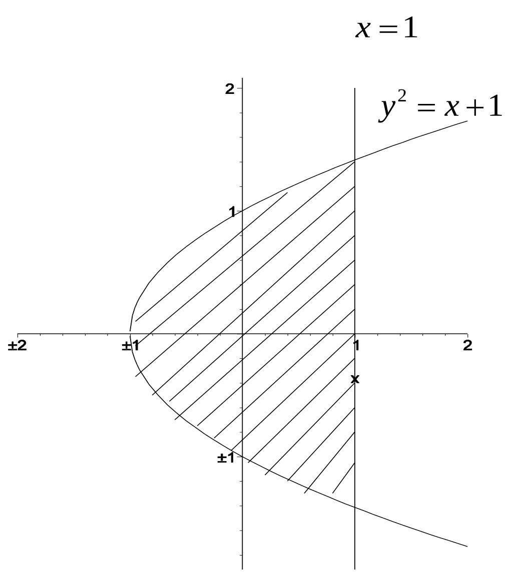
$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{ccc} \ln x & = & t \\ \frac{1}{x}dx & = & dt \\ x = 1 & \to & t = 0 \\ x = e & \to & t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Věta 4.5 *Nechť* $<a, b> = <x_0, x_1) \cup <x_1, x_2) \cup \ldots <x_{n-2}, x_{n-1}) \cup <x_{n-1}, x_n>$.
Když pro $i = 1, 2, \ldots, n$ *je* $f \in R(x_{i-1}, x_i)$, *pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

Příklad Využijte geometrického významu a spočítejte plochu rovinného obrazce omezeného křivkami $y^2 = x + 1$ a $x = 1$.

Řešení Nakreslíme obrázek a využijeme toho, že plocha je symetrická podle osy x.



$$P = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{x+1}\,dx = \left| \begin{array}{ccc} x+1 & = & t^2 \\ dx & = & 2t\,dt \\ x=-1 & \to & t=0 \\ x=1 & \to & t=\sqrt{2} \end{array} \right| = 2\int_0^{\sqrt{2}} 2t^2\,dt = 4\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

Σ

Riemannův určitý integrál je pro nulovou posloupnost dělení definován jako limita integrálních součtů.

Z geometrického hlediska představuje $\int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad f(x) \geq 0$ plochu rovinného obrazce omezeného křivkami $y = f(x), \; x = a, \; x = b, \; y = 0.$

Hodnotu určitého integrálu spočteme jako rozdíl hodnot příslušné primitivní funkce v horní a dolní mezi.

Při výpočtu některých určitých integrálů se používá substituční metoda nebo metoda per partes.

?

1. Uveďte geometrickou interpretaci definice určitého integrálu.
2. Které funkce jsou riemannovsky integrovatelné? Uveďte příklad funkce, která riemannovsky integrovatelná není.
3. Formulujte větu, pomocí které se provádí výpočet Riemannova určiteho integrálu.
4. Čím se při výpočtu odlišuje metoda per partes pro určitý integrál od metody per partes pro neurčitý integrál?
5. Čím se při výpočtu odlišuje substitučí metoda pro určitý integrál od substituční metody pro neurčitý integrál?
6. Jak byste spočítali plochu rovinného obrazce omezeného křivkami $y = 0, \; x = 0,$ $x = 3\pi$ a $y = \sin x$?
7. Spočítejte integrály

   a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$

   b) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$

   c $\int_1^2 x^2 e^{x^3}\,dx$

   d) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx$

   e) $\int_3^5 \frac{dx}{(x-1)(2-x)}$

[a) $\pi-2$, b) $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+1$ c) $\frac{1}{2}e^{3\check{\ }}+c$, d) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}-\operatorname{arctg}2+\frac{\pi}{4}$, e) $\ln\frac{2}{3}$ **]**

8. Spočítejte plochu rovinného obrazce omezeného křivkami $y=x^3$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$. [$\frac{1}{2}$ **]**

Základní literatura:

[1] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy,* 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] MÁDROVÁ, V. *Matematická analýza I*. UP Olomouc, 2001. 217 stran. ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[3] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*, 1.vyd. Olomouc, UP Olomouc, 2013. 329 stran..
ISBN 978-80-244-3410-0.

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza I*. 1. vyd. UP Olomouc, 2002. 126 stran. ISBN 80-244-0464-8

Kapitola 6

Nevlastní integrál

Po prostudování kapitoly budete umět:

- určovat singulární body integrace
- vysvětlit pojem integrálu jako funkce horní (dolní) meze
- vysvětlit pojem nevlastního integrálu vlivem funkce a vlivem meze
- počítat nevlastní integrály vlivem meze i funkce
- určovat obsahy neomezených geometrických obrazců

Klíčová slova:

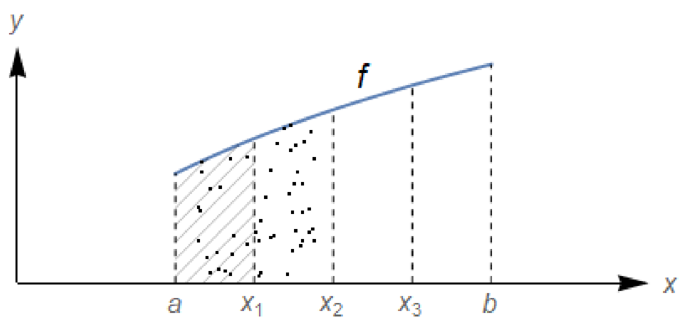
Integrál jako funkce horní, resp. dolní, meze, nevlastní integrál, singulární body integrace, nevlastní integrál vlivem meze, nevlastní integrál vlivem funkce, konvergence a divergence nevlastního integrálu.

Integrál jako funkce meze

V předchozích úvahách, týkajících se integrálů, jsme se omezili pouze na integrály, v nichž integrandem byla omezená funkce a integračním oborem byl omezený a uzavřený interval. V této kapitole se budeme zabývat integrály, jejichž integrand není omezený a integrály, jejichž integrační obor není uzavřený a omezený, tedy nevlastními integrály. K definici nevlastních integrálů potřebujeme zavést pojem integrál jako funkce horní, resp. dolní meze.

Předpokládejme, že funkce f je na intervalu $\langle a, b\rangle$ integrovatelná podle Riemanna. Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ je číslo, za předpokladu, že a a b jsou pevné hodnoty. Zůstane-li jedna mez pevná (konstantní) a druhá mez bude nabývat různých hodnot z intervalu $\langle a, b\rangle$, bude hodnota uvažovaného určitého integrálu funkcí této proměnné meze. Existence takového integrálu plyne z aditivity určitého integrálu. Proměnnou mez označíme x, integrační proměnnou pak jiným písmenem, např. t, aby dvě různé veličiny nebyly označeny stejným písmenem.

Je-li proměnná horní mez integrálu, pak dostaneme funkci $H(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ a nazýváme ji **funkce horní meze integrálu** funkce f.



Obrázek 6.1 Integrál jako funkce horní meze intergrálu funkce f

Je-li proměnná dolní mez integrálu, pak dostaneme funkci $D(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ a nazýváme ji **funkce dolní meze integrálu** funkce f.
Přitom proměnná x je libovolné, ale určité číslo, které nabývá hodnot z integračního intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nevlastní integrály

Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ jsme definovali v případě, že integrační interval je omezený a uzavřený a funkce f je na něm omezená. Pokud nejsou tyto předpoklady splněny, pak definice určitého integrálu pomocí integrálních součtů není vhodná a je třeba postupovat jiným způsobem.

Příklad Funkce $\frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(0,1\rangle$, ale není na něm omezená, protože $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. Nemůžeme tedy hovořit o integrálu $I=\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ ve smyslu definice podle Riemanna.

Musíme pojem integrál zobecnit.

Uvažujeme-li $0<\alpha<1$ je funkce $\frac{1}{x}$ spojitá i omezená na $\langle\alpha,1\rangle$, existuje tedy integrál $I_\alpha=\int_\alpha^1 \frac{1}{x}dx$. Potom integrál I lze určit jako limitu integrálu I_α pro $\alpha\to 0^+$.

Tedy $I=\lim_{\alpha\to 0^+} I_\alpha$.

Uvedený integrál $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ nazýváme nevlastním integrálem vlivem funkce.

O nevlastních integrálech hovoříme v případě je-li interval (a,b) neomezený, tj. $a=-\infty$ nebo $b=+\infty$ nebo současně $a=-\infty$ a $b=+\infty$ nebo není-li funkce f na intervalu (a,b) omezená. Body, v nichž nastávají výše uvedené okolnosti, nazýváme singulární body integrace.

Definice 6. 1 Řekneme, že bod c, kde $a\le c\le b$ je **singulárním bodem integrace** funkce f na intervalu (a,b), je-li buď $c=-\infty$ nebo $c=+\infty$ nebo není-li funkce f na okolí bodu c omezená.

Příklady singulárních bodů integrace:

$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ singulárním bodem integrace je dolní mez mínus nekonečno; integrační obor není omezený

$\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ singulárním bodem integrace je horní mez mínus nekonečno; integrační obor není omezený

$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$ singulárním bodem integrace je 0; funkce $\frac{1}{x^2}$ není na okolí bodu 0 omezená

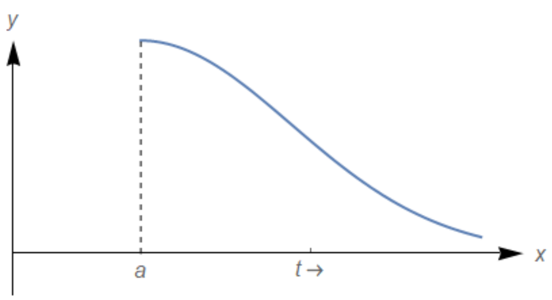
Budeme předpokládat, že těchto singulárních bodů je konečný počet a že funkce f je na každém uzavřeném intervalu neobsahujícím singulární body integrovatelná.

Rozlišujeme:

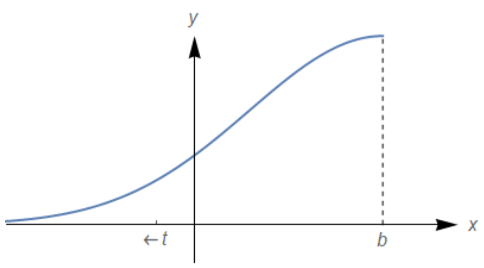
- nevlastní integrály vlivem meze
- nevlastní integrály vlivem funkce

Nevlastní integrály vlivem meze

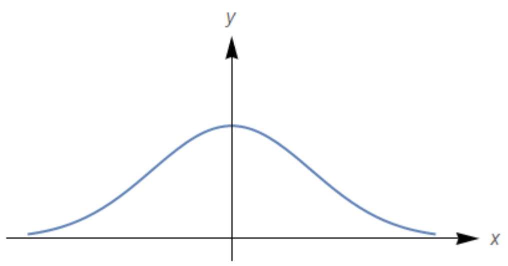
Je to integrál na neomezeném intervalu, tedy integrační meze jsou nevlastní čísla.



Obr. 6.2 $\int_a^\infty f(x)\,dx$



Obr. 6.2 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$



Obr. 6.2 $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

Definice 6.2 Nechť je funkce f definovaná na intervalu $\langle a, +\infty)$ a nechť pro každé $t > a$ existuje integrál $\int_a^t f(x)dx$. Potom řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ **konverguje** (existuje), právě když existuje vlastní limita $\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ (∗). Existuje-li nevlastní integrál, pak jej definujeme vztahem $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$.

Jestliže limita (∗) je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje**.

Podrobněji: Je-li limita (∗) rovna plus nekonečnu, resp. mínus nekonečnu říkáme, že nevlastní integrál diverguje k plus nekonečnu, resp. k mínus nekonečnu. Jestliže limita (∗) neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál neexistuje.

Analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Definice 6.3 Nechť je funkce f definovaná na intervalu $(-\infty, b\rangle$ a nechť pro každé $t < b$ existuje integrál $\int_t^b f(x)dx$. Potom řekneme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ **konverguje**, právě když existuje vlastní limita $\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$ (∗∗). Existuje-li nevlastní integrál, pak jej definujeme vztahem $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Jestliže limita (∗∗) je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje**.

Definice 6.4 Nechť je funkce f definovaná na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a nechť konvergují nevlastní integrály (1) $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ a (2) $\int_c^\infty f(x)dx$, c∈R. Pak říkáme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ konverguje a definujeme jej vztahem $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$.

Diverguje-li aspoň jeden z integrálů (1) a (2), pak integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ diverguje.

Poznámka Pomocí aditivity integrálu se dá snadno dokázat, že existence i hodnota integrálu

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ nezávisí na volbě bodu $c \in R$.

Výpočet dle Leibniz – Newtonovy formule

Známe-li primitivní funkci F integrandu na uzavřeném intervalu neobsahujícím singulární body, můžeme nevlastní integrály počítat následujícím způsobem.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\left[F(x)\right]_a^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(F(t)-F(a)\right) = \lim_{t\to\infty}F(t)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\left[F(x)\right]_t^b =$$

$$= F(b) - \lim_{t\to-\infty}F(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}[F(c)-F(a)] + \lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(c)] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}F(b) - \lim_{a\to-\infty}F(a)$$

Příklad Vypočítejme nevlastní integrály vlivem meze.

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

b) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}\,dx$

Řešení

a) Funkce $\frac{1}{x^2}$ je na intervalu $\langle 1, t\rangle$, $t > 1$, spojitá, tedy existuje integrál

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right) + \lim_{t\to\infty} 1 =$$

$$= 0 + 1 = 1$$

Daný integrál konverguje a jeho hodnota je 1.

b) Funkce $\frac{1}{4+x^2}$ je na intervalu $\langle t, 0\rangle$, $t < 0$ spojitá, existuje integrál $\int_{\mathrm{t}}^{0} \frac{1}{4+\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx}$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{dx} = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{x}{2}\right]_t^0 =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\left(arctg\,0 - arctg\,\frac{t}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}\left(0 - arctg\,\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to-\infty} 0 - \lim_{t\to-\infty} arctg\,\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$$

Daný integrál konverguje; $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{4}$.

Příklad Vyšetřete existenci integrálu $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$.

Řešení Integrál má 2 singulární body integrace, proto zvolíme bod $c \in (-\infty, \infty)$, např. $c = 0$ a rozdělíme integrál na integrály $I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}dx$ a $I_2 = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$, přičemž každý z nich má již jen jeden singulární bod integrace.

Vypočteme např. I_2.

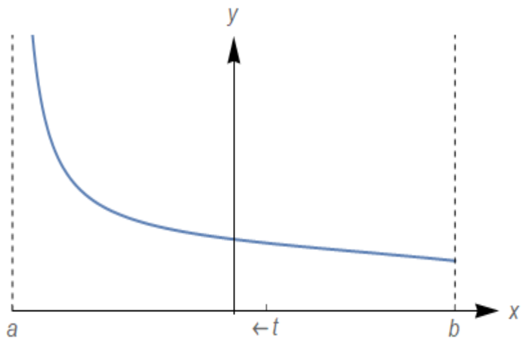
$$I_2 = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}ln(1+x^2)\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(ln(1+t^2) - \ln 1) = \frac{1}{2}(\infty - 0) = \infty$$

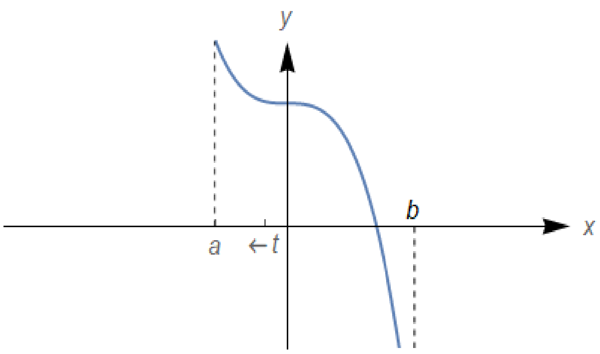
Integrál I_2 diverguje, integrál I_1 již nemusíme počítat, protože podle definice 6.4 integrál I diverguje.

Nevlastní integrály vlivem funkce

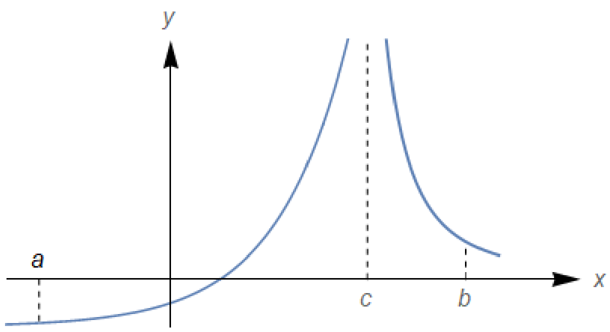
Integrandem je funkce, která není omezená na intervalu (a, b).



Obrázek 6.3Funkce f není omezená na pravém okolí bodu a



Obr. 6.3Funkce f není omezená na levém okolí bodu b



Obrázek 6.3 Funkce f není omezená na okolí bodu c

Definice 6.5 Nechť funkce f je definovaná na omezeném intervalu $\langle a, b)$ a není omezená na žádném levém okolí bodu b, přičemž pro každé $t \in \langle a, b)$ existuje integrál $\int_a^t f(x)dx$. Potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)dx$ **konverguje** (existuje), právě když existuje vlastní limita $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$ (□).

Existuje-li nevlastní integrál, pak jej definujeme vztahem $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$.

Jestliže limita (□) je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje**.

Analogicky definujeme:

Definice 6.6 Nechť funkce f je definovaná na omezeném intervalu $(a, b\rangle$ a není omezená na žádném pravém okolí bodu a a nechť pro každé $t \in (a, b\rangle$ existuje integrál $\int_t^b f(x)dx$. Potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)dx$ **konverguje** (existuje), právě když existuje vlastní limita $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$ (Δ).

Existuje-li nevlastní integrál pak jej definujeme vztahem $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$.

Jestliže limita (Δ) je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje**.

Definice 6. 7 Nechť funkce f není omezená na žádném okolí bodu $c, c \in (a, b)$ a nechť konvergují nevlastní integrály (1) $\int_a^c f(x)dx$ a (2) $\int_c^b f(x)dx$. Pak říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje a definujeme jej vztahem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Diverguje-li aspoň jeden z integrálů (1) a (2), pak integrál $\int_a^b f(x)dx$ diverguje.

Výpočet dle Leibniz – Newtonovy formule

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\left[F(x)\right]_a^t =$$

$$= \lim_{t\to b^-}\left(F(t) - F(a)\right) = \lim_{t\to b^-} F(t) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\left[F(x)\right]_t^b =$$

$$= \lim_{t\to a^+}\left(F(b) - F(t)\right) = F(b) - \lim_{t\to a^+} F(t)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{u\to c^+} \int_u^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{t\to c^-} \left(F(t) - F(a)\right) + \lim_{u\to c^+} \left(F(b) - F(u)\right) = \lim_{t\to c^-} F(t) + \lim_{u\to c^+} F(u) + F(b) - F(a)$$

Předpokládáme, že F je primitivní funkce integrandu na uzavřeném intervalu neobsahujícím singulární body.

Příklad Vypočtěte nevlastní integrály vlivem funkce.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\, ln^2 x}\, dx$

Řešení

a) Definiční obor funkce $\frac{1}{x^2}$ je $R \setminus \{0\}$. Funkce není omezená na pravém okolí bodu nula, protože $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Bod 0 je singulární bod integrace. Funkce $\frac{1}{x^2}$ je na intervalu $\langle t, 1\rangle, \quad t > 0$, spojitá.

Existuje integrál $\int_t^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_t^1 = -1 + \frac{1}{t}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0^+} (-1) + \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = -1 + \infty =$$

$$= \infty$$

Integrál $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ diverguje.

b) Definiční obor funkce $\frac{1}{x\,ln^2x}$ je $R \setminus \{0\}$. Funkce není omezená na pravém okolí bodu 0, protože $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x\,ln^2x} = +\infty$. Na intervalu $\langle t, \frac{1}{e}\rangle, t > 0$, je funkce $\frac{1}{x\,ln^2x}$ spojitá, existuje integrál $\int \frac{1}{x\,ln^2x} = \begin{vmatrix} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{vmatrix} = \int u^{-2} du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\ln x}$.

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\,ln^2x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\,ln^2x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_t^{\frac{1}{e}} = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{-1}{\ln\frac{1}{e}} + \frac{1}{\ln t}\right) = \frac{-1}{-1} + \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\ln t} =$$

$$= 1 + 0 = 1$$

Nevlastní integrál $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\,ln^2x}\,dx$ konverguje a jeho hodnota je 1.

Příklad Vypočtěte nevlastní integrál $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, pokud konverguje.

Řešení Definiční obor $D(f): x \in (-1, 1)$. Body -1 a $1 \notin D(f)$ a funkce $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ není omezená na pravém okolí bodu -1 a na levém okolí bodu 1.

$\lim\limits_{t\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ a také $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$

Integrand $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je na intervalu $(-1, 1)$ spojitá funkce a má primitivní funkci $\arcsin x$. Integrál I má tedy dva singulární body integrace 1 a -1. Pomocí bodu $c \in (-1, 1)$ rozdělíme integrál I na dva integrály I_1 a I_2; položíme $c = 0$.

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1^+} \int_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1^+} [\arcsin x]_t^0 = \lim_{t\to -1^+} (\arcsin 0 - \arcsin t) =$$

$$= \lim_{t\to -1^+} (0 - \arcsin t) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-} [\arcsin x]_0^t = \lim_{t\to 1^-} (\arcsin t - \arcsin 0) =$$

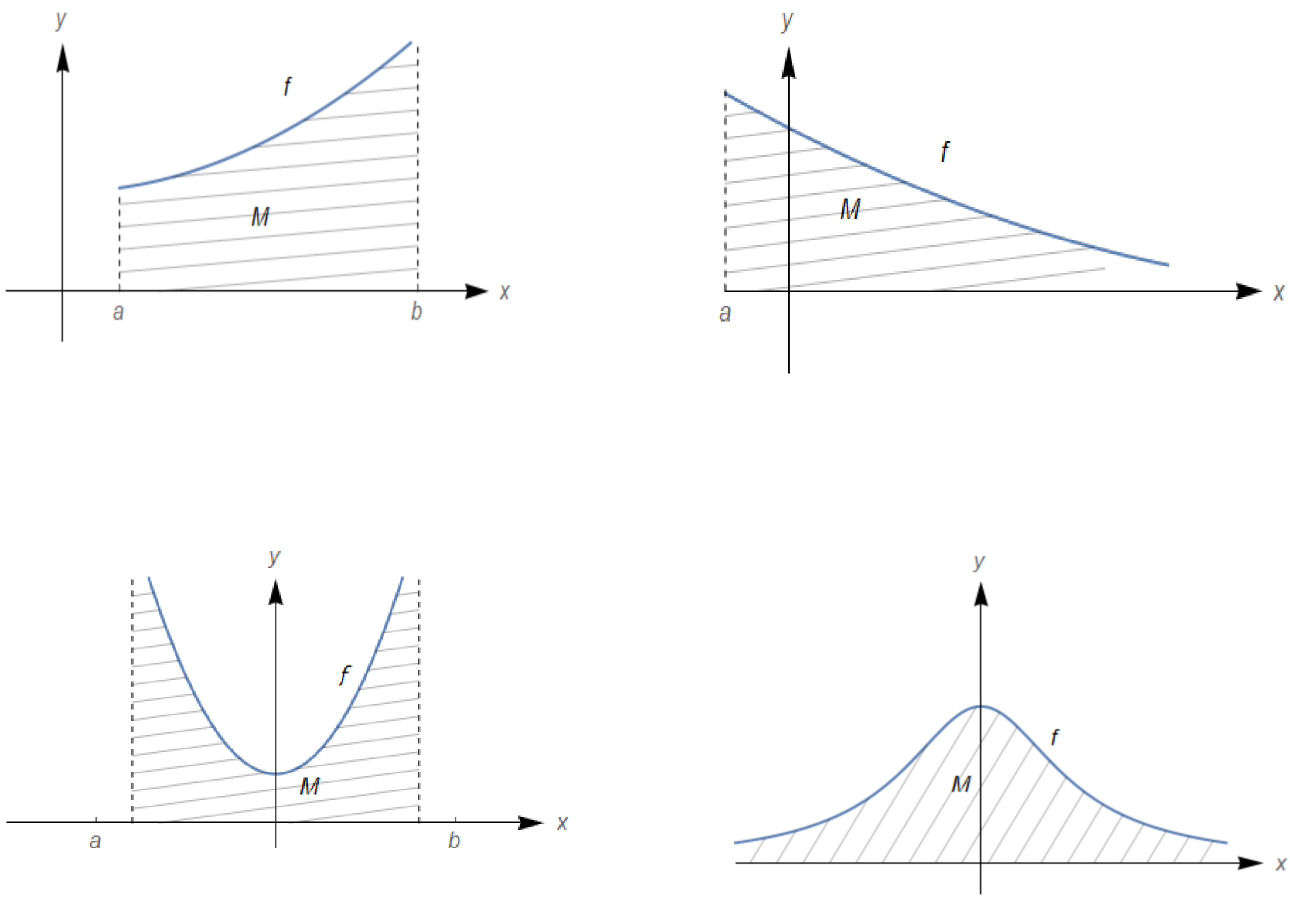
$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Oba integrály I_1 a I_2 konvergují, tedy integrál I také konverguje a jeho hodnota $I = I_1 + I_2 =$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Geometrická interpretace nevlastních integrálů

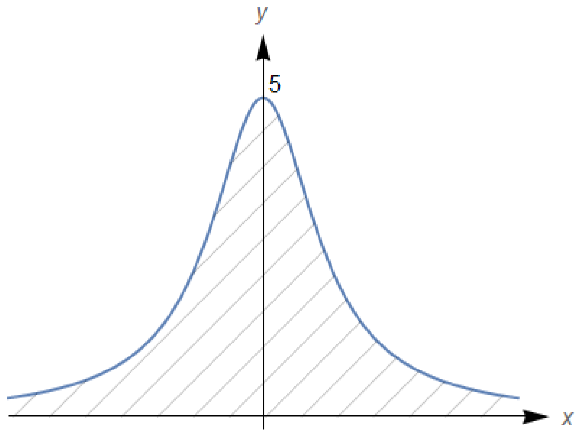
Je-li f spojitá a nezáporná funkce, můžeme nevlastní integrál, pokud konverguje, považovat za obsah příslušného neomezeného geometrického obrazce M.



Obrázek 6.4 $M = \{[x, y] \in R^2, x \in (a, b), 0 \leq y \leq f(x)\}$

Příklad Vypočítejte obsah P části roviny ohraničené osou x a grafem funkce $f(x) = \frac{5}{1+x^2}$.

Řešení Nejprve sestrojíme graf funkce f.



Obrázek 6.5 Graf funkce $f(x) = \frac{5}{1+x^2}$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{5}{1+x^2} dx$$

Integrál má dva singulární body integrace: $+\infty$ a $-\infty$. Je to nevlastní integrál vlivem meze. Rozdělíme jej na dva integrály I_1 a I_2, zvolíme bod $c = 0$.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{5}{1+x^2} dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{5}{1+x^2} dx = \lim_{t\to-\infty} [5\, arctg\, x]_t^0 =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (5 arctg\, 0 - 5 arctg\, t) = 0 - 5\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}\pi$$

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} \frac{5}{1+x^2} dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{5}{1+x^2} dx = \lim_{t\to\infty} [5\, arctg\, x]_0^t =$$

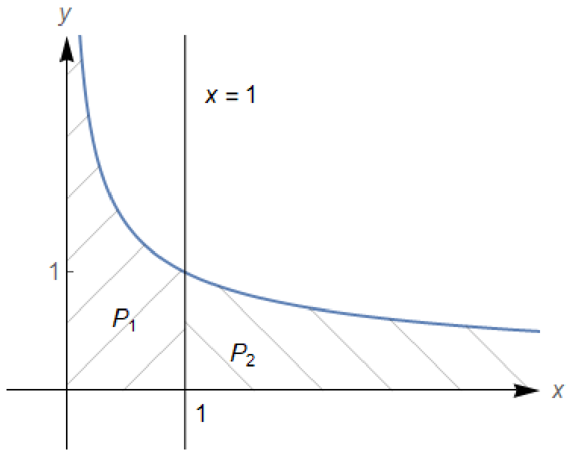
$$= \lim_{t\to\infty} (5\, arctg\, t - 5\, arctg\, 0) = 5\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{5}{2}\pi$$

$P = I_1 + I_2 = 5\pi$

Obsah neomezeného obrazce je konečný a je $P = 5\pi(j^2)$.

Příklad Vypočítejte obsahy P_1 a P_2 části roviny ležící v I. kvadrantu ohraničené křivkou $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ a přímkou $x = 1$.

Řešení Sestrojíme graf funkce $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.



Obrázek 6.6 Graf funkce $\frac{1}{\sqrt{x}}$ a přímky $x = 1$

Přímka $x = 1$ rozdělí uvažovanou část roviny na dvě části. Označme

$$P_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_t^1 = 2\lim_{t\to 0^+}\left(1-\sqrt{t}\right) = 2(1-0) = 2$$

a

$$P_2 = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^t = 2\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t-1}\right) = 2(\infty-1) = \infty$$

Obrazec P_1 má konečný obsah $2(j^2)$, naproti tomu obrazec P_2 má nekonečný obsah.

Poznámka Obecnější případ, kdy singulárních bodů uvnitř intervalu (a,b) je více nebo jsou to krajní body intervalu. Nechť body $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, kde $a=c_0<c_1<\ldots<c_n=b$ jsou singulární body integrace funkce f a nechť každý z integrálů ♥ $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$, i=1,2,…, n obsahuje jen jeden singulární bod. Potom $\int_a^b f(x)dx$ konverguje, konvergují-li všechny integrály ♥. V tom případě definujeme $\int_a^b f(x)dx$ $= \sum_{i=1}^{n}\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$. Jestliže některý z integrálů ♥diverguje, říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ diverguje.

Poznámka Konvergentní nevlastní integrály mají tytéž základní vlastnosti jako vlastní integrály. Platí pro ně věta o linearitě, věta o monotonii a věta o aditivitě.

S Riemannovým (určitým) integrálem, tj. integrálem, jehož integrační obor i integrand jsou omezené, v aplikacích nevystačíme. Řada fyzikálních, technických i matematických problémů vyžaduje integrál, jehož integrand nebo integrační obor jsou neomezené. Takové integrály nazýváme nevlastní a definujeme je jako limity určitých integrálů s proměnnou mezí. Existuje-li příslušná vlastní limita, pak nevlastní integrál konverguje, jinak diverguje.

1. Co rozumíme pojmem integrál jako funkce horní, resp. dolní meze?
2. Vysvětlete, které body nazýváme singulárními body integrace.
3. Jak jsou definovány nevlastní integrály?
4. Kdy mluvíme o nevlastním integrálu vlivem funkce?
5. Kdy mluvíme o nevlastním integrálu vlivem meze?
6. Jaký je geometrický význam nevlastních integrálů?
7. Vypočítejte nevlastní integrály.

a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^4}$ [konverguje; $\frac{1}{3}$]

b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ [konverguje; $\sqrt{2}$]

c) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ [diverguje; $+\infty$]

d) $\int_1^5 \frac{2}{x-1} dx$ [diverguje; $+\infty$]

e) $\int_1^5 \frac{2}{x-1} dx$ [konverguje; e]

8. Vyšetřete konvergenci nevlastního integrálu.

a) $\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^3} dx$ [diverguje]

b) $\int_{-1}^4 \frac{1}{2-x} dx$ [diverguje]

9. Vypočítejte obsah P části roviny ležící v I. kvadrantu ohraničené křivkou $y = e^{-x}$ a přímkou $y = 0$.

[P=1(j^2)]

10. Vypočítejte obsah P části roviny ohraničené čarami.

a) $x = 1, y = \frac{1}{x^3}$ osou x. [P=$\frac{1}{2}(j^2)$]

b) $y = e^{-\frac{x}{3}}, x = 0, y = 0$ [P=3(j^2)]

c) $x = 1, y = \frac{1}{x}, y = 0$ [Obrazec nemá konečný obsah]

d) $x = 0, x = 1, y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y = 0$ [P=$\frac{\pi}{2}(j^2)$]

Základní literatura:

[1] BÍLKOVÁ, A. *Matematika I*. Praha: SPN, 1980. 382 stran. ISBN 17-536-80 (skripta)

[2] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. 459 stran. ISBN 80-7200-587-1

[3] KARÁSEK, J. *Matematika II.* Brno: VUT, 2002. 242 stran. ISBN 80-214-9092-8 (skripta)

Kapitola 7

Diferenciální počet funkce více proměnných

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat dvojrozměrný a trojrozměrný prostor a uvést jeho geometrickou interpretaci
- načrtnout okolí a redukované okolí bodu v rovině
- definovat funkci dvou proměnných
- určovat definiční obory, případně obory hodnot a grafy
- chápat dvojnou a dvojnásobnou limitu funkce
- určovat limity

Klíčová slova:

Dvojrozměrný a trojrozměrný prostor, okolí bodu v rovině, dvojná limita, dvojnásobná limita, spojitost funkce.

Základní pojmy

V diferenciálním počtu funkce jedné proměnné byla základní množinou množina všech reálných čísel, tzn. jednorozměrný euklidovský prostor, jehož geometrickou interpretací byla množina R^1 všech bodů reálné přímky.

Pro funkce více proměnných je třeba zavézt další základní množiny, a to především dvojrozměrný euklidovský prostor R^2, jehož geometrickou interpretací je rovina a trojrozměrný euklidovský prostor R^3, jehož geometrickou interpretací je prostor.

Množinu všech uspořádaných dvojic $[x,y]$ reálných čísel x a y nazveme **rovinou**, označíme ji R^2 (dvojrozměrný euklidovský prostor). Každou uspořádanou dvojici $[x,y]$ nazveme **bodem** v rovině, čísla x a y jsou **souřadnice** tohoto bodu. Dva body $[x,y]$ a $[\xi,\eta]$ považujeme za stejné (totožné), právě když je $x=\xi$, $y=\eta$ a píšeme $[x,y]=[\xi,\eta]$.

Vzdálenost dvou bodů $A=[x_1,x_2]$ a $B=[y_1,y_2]$ budeme měřit euklidovsky, tj. při označení vzdálenosti $\rho(A,B)$ bude $\rho(A,B)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$

$$\text{Rovina } R^2=\{[x,y];x\in R,y\in R\};R^2=R\times R$$

Podobně: Množinu všech uspořádaných trojic $[x,y,z]$ reálných čísel x, y a z nazveme **prostorem**, označíme jej R^3 (trojrozměrný euklidovský prostor). Každou uspořádanou trojici $[x,y,z]$ nazveme **bodem** v prostoru, čísla x, y a z jsou **souřadnice** tohoto bodu. $[x,y,z]=[\xi,\eta,\zeta]\Leftrightarrow x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$. Vzdálenost bodů $A=[x_1,x_2,x_3]$ a $B=[y_1,y_2,y_3]$ je dána vztahem

$$\rho(A,B)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i-x_i)^2}$$

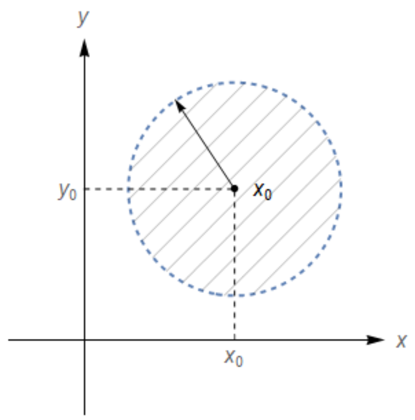
$$\text{Prostor } R^3=\{[x,y,z];x\in R,y\in R,z\in R\};R^3=R\times R\times R$$

Definice 7.1 Buď δ kladné číslo. **δ-ovým okolím** bodu $X_0=[x_0,y_0]$ rozumíme množinu všech bodů $X=[x,y]$, pro jejich souřadnice platí $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$.

$\mathrm{U}_\delta(X_0)=\mathrm{U}_\delta(x_0,y_0)=\{X\in R^2:\rho(X_0,X)<\delta\}$ δ- okolí bodu X_0

$\mathrm{U}^*_\delta(X_0)=\mathrm{U}^*_\delta(x_0,y_0)=\{X\in R^2:0<\rho(X_0,X)<\delta\}$ redukované δ -okolí bodu X_0.

Grafické znázornění:



Obrázek 7.1 Grafické znázornění $U_\delta(X_0)$

Okolí $U_\delta(X_0)$ je vnitřek kruhu (otevřený kruh) se středem v bodě X_0 a poloměrem δ. Jak se liší $U_\delta(X_0)$ a $U_\delta^*(X_0)$? – Vyjmeme-li z $U_\delta(X_0)$ bod X_0, obdržíme $U_\delta^*(X_0)$.

Pojem funkce dvou proměnných

Definice 7.2 **Reálná funkce dvou reálných proměnných** je zobrazení množiny $D \subset R^2$ do množiny R (jinak zobrazení z R^2 do R). (Dále jen **funkce dvou proměnných**.)

Podrobněji

Buď D libovolná množina bodů v R^2 (tj. v rovině). Nechť ke každému bodu $[x, y] \in D$ je přiřazeno jediné číslo $z \in$ R. Pak říkáme, že na D je definována funkce dvou proměnných x a y a píšeme $z = f(x, y)$, kde x, y jsou nezávislé proměnné, z je závisle proměnná.

Množina D se nazývá **definiční obor** funkce f značíme $D(f)$, množina všech hodnot z se nazývá **obor funkčních hodnot** funkce f, značíme $H(f)$.

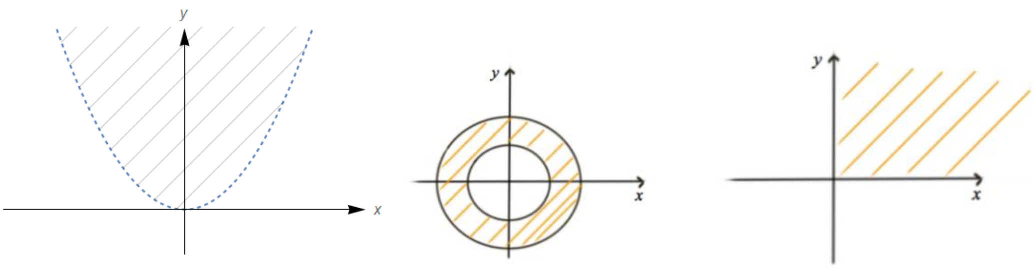
Příklad

1. $f(x, y) = \dfrac{2^y}{\sin^2 x - 1}$
2. $z = x\, arctg\, y - x^2\, e^y$

3. Objem V rotačního válce o výšce v a poloměru r je $V = \pi r^2 v$. Tedy V je funkcí r a v; tedy $V = V(r,v), r > 0, v > 0$; $D(V) = \{[r,v] \in R^2;\, r > 0, v > 0\}$.

Poznámka Stejně jako funkce jedné proměnné je funkce dvou proměnných určena svým přepisem a definičním oborem.

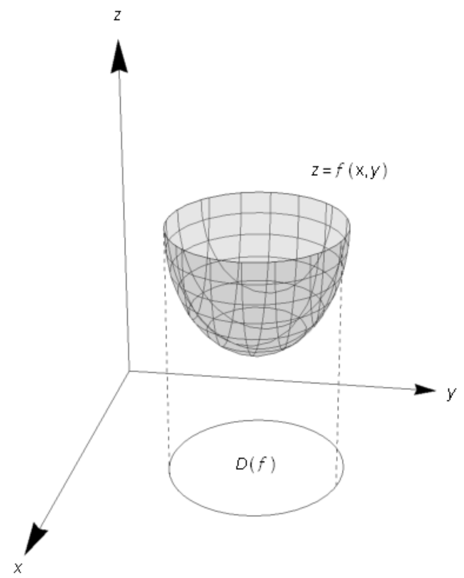
Je-li funkce určena pouze rovnicí $z = f(x,y)$, je nutné najít její definiční obor – tj. množinu všech těch bodů, pro které má výraz $f(x,y)$ smysl. Definičním oborem, na rozdíl od funkce jedné proměnné, jsou velmi různorodé množiny např. vnitřek paraboly, mezikruží, I. kvadrant apod.



Obrázek 7.2 Příklady definičních oborů

Definice 7.3 **Grafem funkce** f (též plochou o rovnici $z = f(x,y)$) nazýváme množinu všech bodů $\left[x, y, \overbrace{f(x,y)}^{z}\right] \in R^3$, kde $[x,y] \in D(f)$, reálného prostoru R^3. Značíme jej $G(f)$.

Tedy $G(f) = \{[x,y,z] \in R^3;\ [x,y] \in D(f),\ z = f(x,y)\}$.



Příklad Určete $D(f), H(f)$ a graf funkce $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Řešení $D(f): 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$

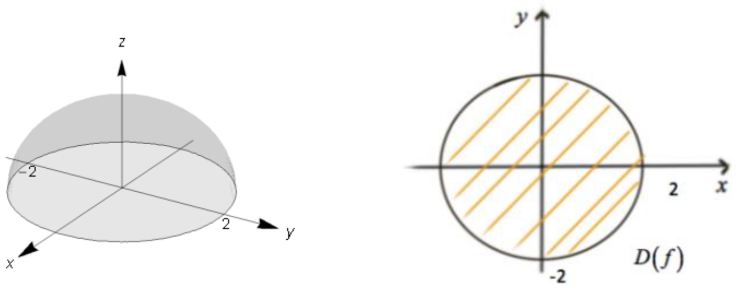
$D(f) = \{(x,y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$. Definičním oborem je kruh se středem v počátku souřadnic a poloměrem 2 v rovině R^2.

Graf: $z = f\ (x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ /umocníme

$z^2 = 4 - x^2 - y^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ je rovnice kulové plochy se středem v počátku souřadnic a poloměrem 2

Grafem $G(f)$ je horní polovina kulové plochy se středem v počátku souřadnic a poloměrem 2 v prostoru R^3.
Obor hodnot $H(f)$ je uzavřený interval $\langle 0, 2\rangle$ na ose z.



Obrázek 7.4 $D(f)$ a $G(f)$ funkce $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Uvědom si **!** $D(f) \subset R^2, H(f) \subset R,\ G(f) \subset R^3$.

Geometrickým modelem grafu je často souvislá plocha v prostoru, může to být i křivka. Kolmý průmět geometrického modelu $G(f)$ do roviny (xy) je geometrický model $D(f)$. Každá rovnoběžka s osou z protne $G(f)$ nejvýše v jednom bodě.

Geometrický model grafu můžeme vyšetřovat pomocí jeho řezů rovinami rovnoběžnými s rovinami souřadnic. Pravoúhlý průmět řezu rovinou rovnoběžnou se souřadnicovou rovinou (xy) do roviny (xy) nazýváme **vrstevnice**.

Poznámka

Pojmy jako jsou omezenost, maximum a minimum se definují právě tak, jako pro funkci jedné proměnné. Operace s funkcemi více proměnných se provádí právě tak, jako tomu bylo v případě funkcí jedné proměnné. Lze tvořit i funkce složené.

Limita

Definice 7.4 Buď f funkce definovaná na množině D a buď $[x_0, y_0]$ hromadný bod D. Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu L, píšeme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ nebo $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = L$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $U_\delta^*(x_0, y_0)$ tak, že nerovnost $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ platí pro všechny body $[x, y] \in D \cap U_\delta^*(x_0, y_0)$.

Stručný zápis limity:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\, U_\sigma^*(x_0, y_0) : \forall[x, y] \in D \cap U_\sigma^*(x_0, y_0) \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Poznámka Bod $[x_0, y_0] \in R^2$ je **hromadným bodem** množiny D, když v každém jeho δ-okolí leží aspoň jeden bod množiny D různý od bodu $[x_0, y_0]$. Samotný bod $[x_0, y_0]$ do množiny D může, ale nemusí patřit.

Vlastnosti limity

Pro limity funkcí dvou proměnných platí analogické věty jak pro limitu funkcí jedné proměnné.

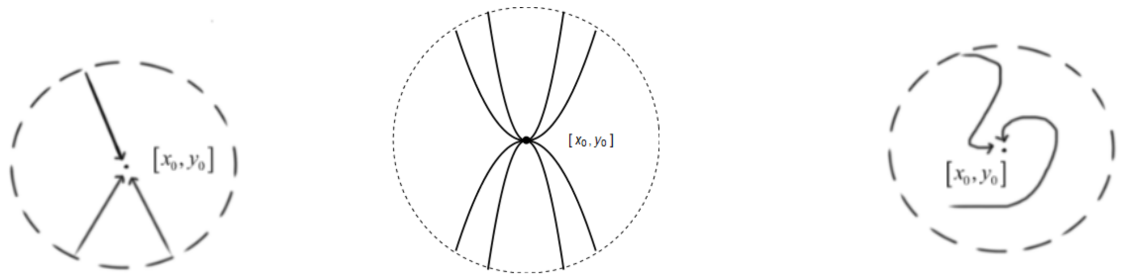
Zejména platí:

1. Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ limitu, pak je jediná.
2. Platí věty o limitě, součtu, součinu a podílu dvou funkcí, za předpokladu, že v daném bodě existuje limita každé funkce a v případě podílu je limita funkce ve jmenovateli různá od nuly.
3. Někdy se hovoří o limitě funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ jako o **dvojné limitě**.

Stejně jako u funkce jedné proměnné i limita funkce dvou proměnných vypovídá, jak se chová funkce v redukovaném okolí bodu. Je zde však složitější situace. U funkce jedné proměnné, jsme se z bodu v okolí mohli blížit k bodu, v němž jsme limitu určovali, pouze po přímce. U funkce dvou proměnných máme nekonečně mnoho možností, jak se z bodu $[x, y] \in U^*_\delta(x_0, y_0)$ blížit k bodu $[x_0, y_0]$.

Můžeme se blížit například

1. po přímkách 2. po parabolách 3. zcela libovolně



Obrázek 7.5

Nechť $P = [x, y] \in U^*_\delta(P_0)$, kde $P_0 = [x_0, y_0]$ je bod, v němž určujeme limitu funkce f.

Probíhá-li limitní proces tak, že souřadnice bodu P jsou vázány rovnicí $y = \varphi(x)$, pak $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ vypočteme po dosazení $\varphi(x)$ za y jako limitu funkce jedné proměnné pro $x \to x_0$. Rovnice $y = \varphi(x)$ vyjadřuje zpravidla jednoparametrický systém křivek, jež je možno prokládat body P a P_0. Je-li vypočtená hodnota $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ závislá na parametru systému křivek, pak limita v bodě P_0 neexistuje. Není-li závislá na parametru, pak limita může existovat.

Je-li tato hodnota pro různé cesty $y = \varphi(x)$ stejná, pak lze pouze říci, že limita může (ale nemusí) existovat. Najdeme-li jen dvě různé cesty vedoucí k různým hodnotám $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$, pak limita neexistuje.

Příklad Vyšetřete existenci limity funkce $f(x, y) = \frac{y-3}{x+y-5}$ v bodě $[2, 3]$.

Řešení

Po dosazení za x a y obdržíme

$$\lim_{\substack{x\to2 \\ y\to3}} \frac{y-3}{x+y-5} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Budeme se k bodu $[2, 3]$ blížit po přímkách. Přímky budou mít rovnici

$$y - 3 = k(x - 2)$$

$$y = kx - 2k + 3$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3\\ y=kx-2k+3}} \frac{y-3}{x+y-5} = \lim_{x\to 2}\frac{kx-2k+3-3}{x+kx-2k+3-5} = \lim_{x\to 2}\frac{k(x-2)}{x(1+k)-2(k+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{k(x-2)}{(x-2)(1+k)} = \lim_{x\to 2}\frac{k}{1+k} = \frac{k}{1+k}; k \neq -1$$

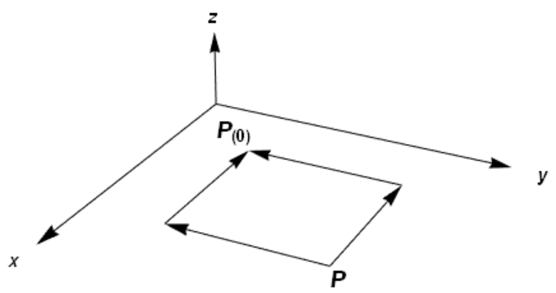
Vypočítaná hodnota závisí na k, proto daná limita neexistuje.

Dvojnásobná limita

Někdy se tato limita nazývá také postupná nebo opakovaná limita.

Bod $P \in U_\delta^*(P_0)$ se může přibližovat k bodu $P_0 = [x_0, y_0]$ dvojím způsobem po pravoúhlé cestě, tj. po přímkách rovnoběžných s osami.

V případě dvojnásobné limity se bod $P \in U_\delta^*(P_0)$ přibližuje k bodu P_0 po pravoúhlých cestách, tj. po přímkách rovnoběžných s osami x a y. A to je možné dvojím způsobem, viz obr. 7.6



Obr. 7.6 Bod P se blíží k bodu P_0 po pravoúhlých cestách

Pak můžeme spočítat dvojnásobnou limitu funkce f postupným limitním přechodem vždy funkce jedné proměnné, přičemž druhou proměnnou považujeme za konstantu.

Zápis: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right]=L_1,\ \lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right]=L_2$

Věta 7.1 Nechť $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L$ *E existují-li dvojnásobné limity* L_1 *a* L_2*, pak platí* $L=L_1=L_2$.

Rovnost obou postupných limit je nutnou, nikoliv však postačující podmínkou pro existenci dvojné limity.

Tzn., že je-li $L_1=L_2$, pak L může existovat, je-li $L_1\neq L_2$, pak L neexistuje.

Příklad Vyšetřete existenci limity.

a) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x-y}{x+y}$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

Řešení

a) Užijeme dvojnásobnou limitu.

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1=L_1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right]=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{y}{y}\right)=\lim_{y\to 0}(-1)=-1=L_2$$

Protože $L_1\neq L_2$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x-y}{x+y}$ neexistuje.

b) Opět spočteme dvojnásobnou limitu.

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0}0=0=L_1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=\lim_{y\to 0}0=0=L_2$$

Limita může existovat, protože $L_1=L_2$. Zkusíme se blížit k bodu $[0,0]$ po přímkách $y=kx$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+(x-kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{x^2[k^2x^2+(1-k)^2]}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^2+(1-k)^2}$$

$$=\frac{0}{(1-k)^2};k\neq 1$$

Ale je-li $\mathrm{k} = 1$, pak rovnice přímky je $y = x$ a $\lim\limits_{y \to 0} \frac{x^4}{x^4 + (x-x)^2} = \lim\limits_{y \to 0} 1 = 1.$

Vypočítaná hodnota dvojné limity je pro $\mathrm{k} = 1$ různá od 0 i od L_1 a L_2, tedy

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ neexistuje.

Výpočet limit funkce dvou proměnných je složitější než výpočet limity funkce jedné proměnné. Proto nejdříve zjišťujeme, zda limita může existovat. Tedy pomocí dvojnásobné limity a blížení se po různých cestách vyloučíme případy, kdy limita neexistuje. Pokud nevyloučíme existenci limity, snažíme se ji vypočítat.

Výpočet limity

Výpočet limity funkce více proměnných je často obtížnější než výpočet limity funkce jedné proměnné. Navíc k počítání neurčitých výrazů $\left(\frac{0}{0}\right)$ nebo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ nemáme k dispozici žádnou analogii l'Hospitalova pravidla. Pří výpočtu používáme různé úpravy předpisu funkce, obdobně jako pří výpočtu limit funkce jedné proměnné - užíváme vzorce, rozkládáme, rozšiřujeme atd. a nově počítáme limity zavedením polárních souřadnic. Užíváme také obdobu vzorců základních limit funkce jedné proměnné

Postup při výpočtu limity $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$:

- Přímým dosazením, je-li f spojitá v bodě $[x_0, y_0]$.
- Úpravou:

a. Jde-li o racionální lomenou funkci – rozložíme, krátíme apod.
b. Jde-li o lomené funkce obsahující rozdíl eventuálně součet s odmocninami – rozšíříme vhodným výrazem, krátíme atd.

- Převedeme dvojnou limitu na limitu funkce jedné proměnné užitím polárních souřadnic:
  Je-li $[x_0, y_0] = [0, 0]$, pak užijeme rovnice $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$; když $x \to 0, y \to 0, \text{ pak } \rho \to 0$.

  Pokud $[x_0, y_0] \neq [0, 0]$, pak mají rovnice tvar $x = x_0 + \rho\cos\varphi,\ y = y_0 + \rho\sin\varphi$; když $x \to x_0$ a $y \to y_0$, pak $\rho \to 0$.

- Užitím základních limit:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left(1+g\left(x,y\right)\right)^{\frac{1}{g(x,y)}} = e$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{\sin g\left(x,y\right)}{g\left(x,y\right)} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{tg\ g\left(x,y\right)}{g\left(x,y\right)} = 1, \text{ jestliže } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g\left(x,y\right) = 0$$

Příklad Vypočtěte limity

$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 3}}(2x^2-3y+5)$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(6x^2+6y^2)}{2(x^2+y^2)}$

$b)\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{5x^2-3y^3}{x+2y}$

$$c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$$

Řešení

$$a)\ \lim_{\substack{x\to -2\\ y\to 3}}(2x^2-3y+5) = 2(-2)^2-3\,.\,3+5 = 4$$

V tomto případě šlo přímo dosadit a limita je rovna funkční hodnotě v bodě $[-2,3]$, což svědčí o tom, že daná funkce je v tomto bodě spojitá.

$$b)\ \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

$$c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{x^2+y^2+4-4} = 3\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)$$

$$= 3\,.\,4 = 12$$

$$\text{d) } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(6x^2+6y^2)}{2(x^2+y^2)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3\,.\sin(6x^2+6y^2)}{6x^2+6y^2} = 3\,.\,1 = 3$$

$$\text{e) } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{5x^2-3y^3}{x+2y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\rho\to 0} \frac{5\rho^2 cos^2\varphi - 3\rho^2 sin^2\varphi}{\rho\, cos\varphi + 2\rho\, sin\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(5cos^2\varphi - 3sin^2\varphi)}{\rho(cos\varphi + 2sin\varphi)} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}[\rho\,.\,k\,(\varphi)] = 0\,.\,k(\varphi) = 0$$

Výraz $\frac{5cos^2\varphi-3sin^2\varphi}{cos\varphi+2sin\varphi}$ je vzhledem k ρ konstanta závislá jen na φ, označili jsme ji $k(\varphi)$.

Spojitost funkce dvou proměnných

Definice 7.5 Nechť bod $[x_0, y_0] \in D(f)$ a je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že funkce f <u>je spojitá v bodě</u> $[x_0, y_0]$, je-li $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině M, je-li spojitá v každém bodě množiny M.

Množinu všech bodů, v nichž je funkce spojitá, nazveme **oborem spojitosti** funkce f.

Poznámka Na rozdíl od limity – bod $[x_0, y_0]$ musí patřit do $D(f)$.

V izolovaném bodě $D(f)$ je funkce spojitá.

Platí analogické věty jako pro spojitost funkce jedné proměnné:

1. Věty o operacích se spojitými funkcemi: součet, rozdíl, součin, podíl (v případě, že je definován) spojitých funkcí a absolutní hodnota spojité funkce je opět funkce spojitá.
2. Funkce složená ze spojitých funkcí je spojitá.
3. Elementární funkce v R^2 jsou spojité ve všech bodech svého $D(f)$.
4. Je-li f spojitá v bodě, potom je v dostatečně malém okolí tohoto bodu omezená.
5. Funkce spojitá na kompaktní (tj. na uzavřené a omezené) množině
   a) je na této množině omezená,
   b) má v ní nejmenší a největší hodnotu (nabývá na ní svého globálního maxima a globálního minima),

c) je-li navíc tato množina souvislá, nabývá funkce každé hodnoty mezi $f(A)$ a $f(B)$ pro libovolné dva body A a B z této množiny.

Poznámka U elementárních funkcí se shoduje $D(f)$ s oborem spojitosti.

Příklad Vyšetřete spojitost funkce.

$$a)\ f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x+y}$$

$$b)\ f(x,y)=\frac{3x+y}{(x-2)^2+(y+3)^2}$$

$$c)\ f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$$

$$d)\ f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-4}$$

Řešení

Všechny funkce jsou elementární, jsou tedy spojité na svém definičním oboru. Budeme tedy určovat jejich $D(f)$.

a) $D(f): x+y\neq 0 \Rightarrow y\neq -x$

Obor spojitosti je rovina R^2, z níž je vyňata přímka o rovnici $y=-x$, jejíž všechny body jsou body nespojitosti.

Obor spojitosti: $R^2 \setminus \{[x,y]\in R^2; y=-x\}$.

b) $D(f): (x-2)^2+(y+3)^2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2 \wedge y\neq -3$

Obor spojitosti je rovina R^2, z níž je vyňat bod $[2,-3]$, který je jediným bodem nespojitosti.

Obor spojitosti: $R^2 \setminus \{2,-3\}$.

c) $D(f): x^2-y^2\neq 0 \Rightarrow y\neq \pm x$

Body nespojitosti jsou všechny body přímky $y=x$ a $y=-x$.

Obor spojitosti je rovina R^2 s výjimkou přímek $y=x$ a $y=-x$,

tj. $R^2 \setminus \{[x,y]\in R^2; y=x\ \vee y=-x\}$.

d) $D(f): x^2+y^2-4\neq 0 \Rightarrow x^2+y^2\neq 4$

Všechny body kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem 2 jsou body nespojitosti.

Obor spojitosti je rovina R^2 s výjimkou všech bodů kružnice, které má střed v počátku soustavy souřadnic a poloměr 2.

Obor spojitosti: $R^2 \setminus \{[x,y] \in R^2; x^2 + y^2 = 4\}$

Σ

S funkcemi se setkáváme v technických, přírodních, ekonomických a jiných vědách, ba i v běžném životě. Je to všude tam, kde se zkoumají hodnoty dvou a více veličin, které se obecně mění a jsou za daných podmínek vázány jistým vztahem. V praxi bývá častější závislost jedné veličiny na větším počtu jiných veličin, což vede k pojmu funkce více proměnných.

I když ve většině uvedených definic a vět shledáváme jistou analogii s definicemi a větami platnými pro funkci jedné proměnné, některé problémy jsou nové a definice a věty je nutné pro případ funkcí více proměnných znovu řádně formulovat.

Pří výkladu teorie funkce více proměnných jsme se soustředili především na funkci dvou a tří proměnných. Důvodem je větší názornost a možnost vizualizace, což jistě přispěje k lepšímu pochopení studované problematiky. Zobecněním úvah na větší počet nezávisle proměnných je pak snadné a je více méně formální.

?

1. Vysvětlete pojem funkce dvou a více proměnných.
2. Graficky znázorněte okolí bodu $[x_{0,}y_0]$.
3. Načrtněte možný definiční obor funkce dvou proměnných.
4. Co může být grafem funkce dvou proměnných?
5. Jaký je rozdíl mezi dvojnásobnou a dvojnou limitou?
6. Kdy je funkce $z = f(x,y)$ spojitá v bodě $[x_{0,}y_0]$?
7. Formulujte některé vlastnosti spojité funkce.
8. Je dána funkce $f(x,y) = e^{xy} + x^2 - y^2 + 2xy$.

   Určete $f(1,1); f(1,0); f\left(a,\frac{1}{a}\right), f(a,-a)$.

   $$\left[e + 2, 2, e + a^2 - \frac{1}{a^2} + 2, e^{-a^2} - 2a^2\right]$$
9. Je dána funkce $f(x,y) = \frac{x}{x-y}$. Ukažte, že pro každý bod $[a,b]$ z $D(f)$ platí rovnost $f(a,b) + f(b,a) = 1$.

10. Určete $D(f), H(f) a\ G(f)$ funkce $z = 4 - 2x - 8y$.

$[D(f) = R^2;\ H(f) = R; G(f) je\ rovina]$

11. Určete definiční obor a obor hodnot funkce.

a) $z = \sqrt{xy}$

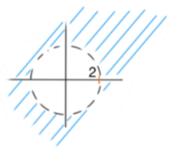
[

$D(f)\,, H(f) = \langle 0, \infty)$

]

b) $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 4}\right)^{-1}$

[



$D(f)\,, H(f) = (0, \infty)$

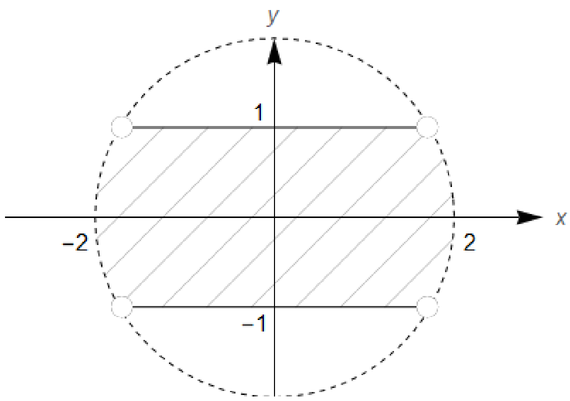
]

12. Určete definiční obor funkce.

a) $f(x,y) = \arcsin y + ln(4 - x^2 - y^2)$

[

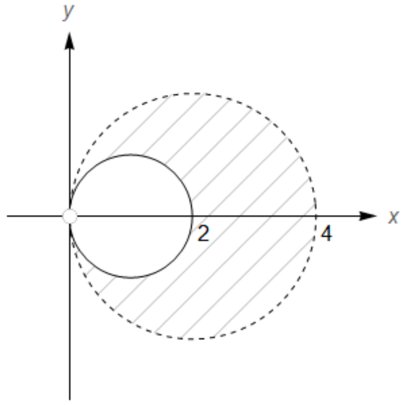
$D(f)$



]

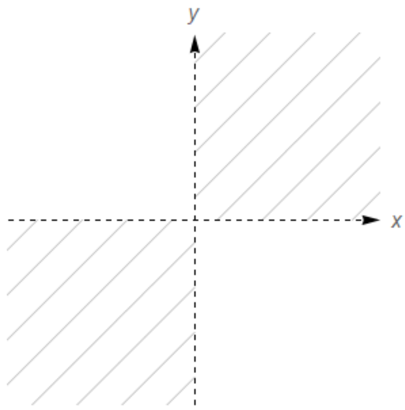
b) $f(x,y) = \sqrt{\frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-4x}}$

Df

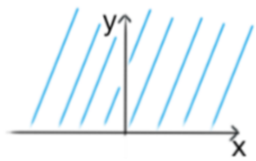


c) $f(x,y) = \frac{2}{\sqrt{xy}}$

$D(f)$



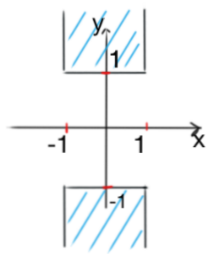
d) $f(x,y) = x + \sqrt{y}$



$D(f)$

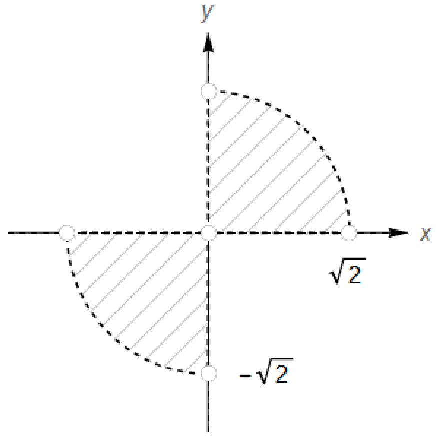
e) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$

$D(f)$



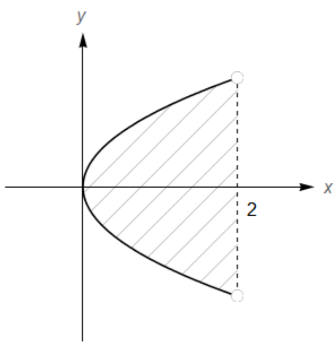
f) $f(x,y) = \frac{\ln(xy)}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$

$D(f)$

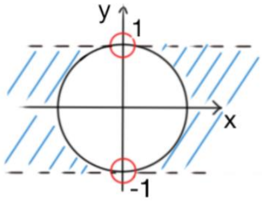


g) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y^2}}{\sqrt{2-x}}$

$D(f)$

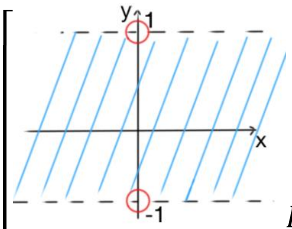


h) $f(x,y) = \sqrt{ln\frac{x^2}{1-y^2}}$



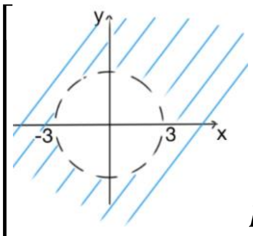
$D(f)$

$ch)\ f\ (x,y) = \frac{x^2}{1-y^2}$



$D(f)$

i) $f(x,y) = \ln{(x^2 + y^2 - 9)}$



$D(f)$

13. Pomocí dvojnásobné limity dokažte neexistenci limity.

$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $[L_1 = 1, L_2 = -1,\quad L\ neexistuje\ ]$

$b)\ \lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} sin\frac{\pi x}{2x+y}$ $[L_1 = 0, L_2 = 1,\quad L\ neexistuje\ ]$

$c)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3x^2y^2}{4x^2y^2+5(y-x)^2}$ $[L_1 = L_2 = 0,\ existenci\ nelze\ vyloučit]$

14. Vypočtěte limity

$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

$b)\ \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}} \frac{tg\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}$ $\left[\frac{1}{16}\right]$

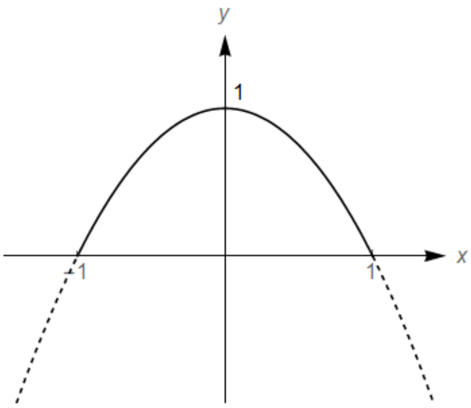
$c)\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} \frac{\sin(3x-2y)}{12x-8y}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

$d)\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\mathrm{tg}\,(xy)}{y}$ $[3]$

15. Určete obory spojitosti dané funkce a napište na jaké křivce leží její body nespojitosti.

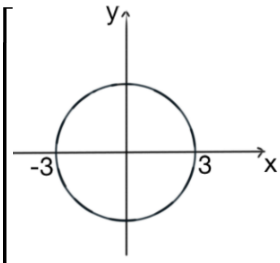
a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y-1}$

[



$\mathrm{R}^2 \setminus \{[x,y] \in R^2; y = -x+1\}$;
křivka je parabola.]

b) $f(x,y) = \frac{e^y}{9-x^2-y^2}$



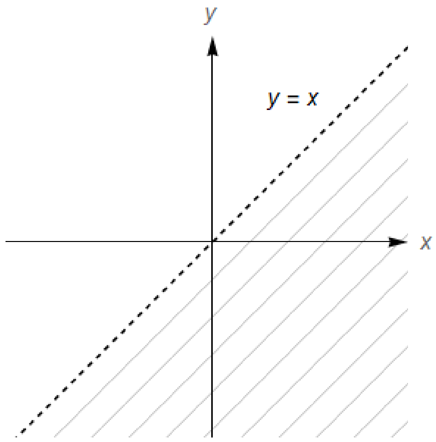
$\left[R^2 \setminus \{[x,y] \in R^2; x^2 + y^2 = 9\}; \right.$ křivka je kružnice. $\left. \right]$

c) $f(x,y) = \frac{4x^2-3y}{5[(x+1)^2+(y-4)^2]}$

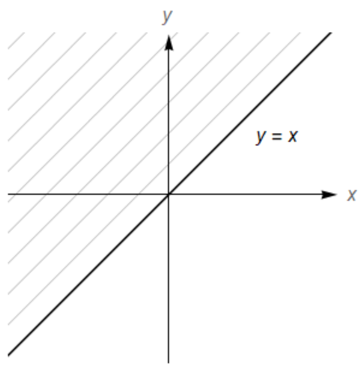
$\left[\mathrm{R}^2 \setminus \{-1, 4\}; \text{jediný bod nespojitosti } [-1, 4]\right]$

d) $f(x,y) = \ln(x - y)$

obor spojitosti



množina bodů nespojitosti



Obor spojitosti je polorovina v R^2 vyťatá přímkou $y = x$ obsahující bod $[1, 0]$, bez hraniční přímky. Body nespojitosti vyplňují polorovinu vyťatou přímkou $y = x$ obsahující bod $[-1, 0]$, včetně hraniční přímky.

Základní literatura:

[1] BÍLKOVÁ, A. *Matematika I*. Praha: SPN, 1980. 382 stran. ISBN 17-536-80 (skripta)

[2] BRABEC, J., HRŮZA, B *Matematická analýza II.* SNTL Praha, 1986. 580 stran. ISBN 04-017-86

[3] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. 459 stran. ISBN 80-7200-587-1

[4] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2)*. Ekopress Praha, 1997. 373 stran. ISBN 80-86119-01-7

[5] KARÁSEK, J. *Matematika II.* Brno: VUT, 2002. 242 stran. ISBN 80-214-9092-8 (skripta)

[6] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza II.* UP Olomouc, 2005. 134 stran. ISBN 80-244-1005-2 (skripta).

Kapitola 8

Parciální derivace a totální diferenciál

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat parciální derivace funkce
- vysvětlit pojem parciálních derivací vyšších řádů
- uvést geometrickou interpretaci parciálních derivací 1. řádu
- počítat parciální derivace
- objasnit pojem totálního diferenciálu
- uvést geometrickou interpretaci totálního diferenciálu
- určovat totální diferenciály
- určovat přibližně hodnoty výrazů
- napsat rovnici tečné roviny a normály

Klíčová slova:

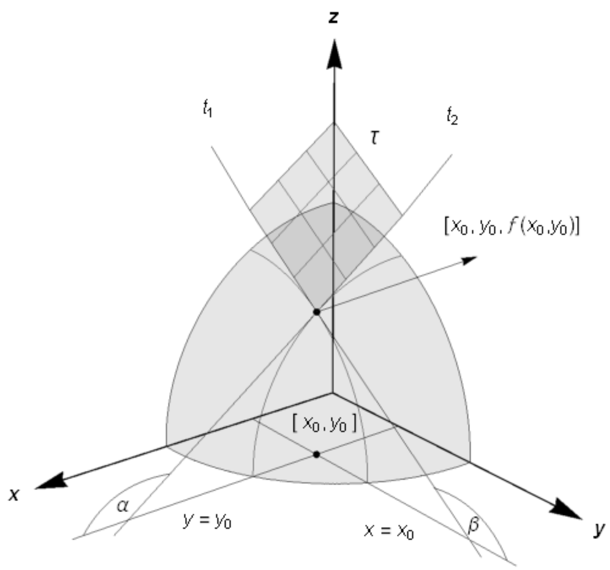
Parciální derivace, parciální derivace vyšších řádů, smíšené parciální derivace, totální diferenciál, tečná rovina, normála.

Parciální derivace

Definice 8.1 Buď $[x_0, y_0]$ vnitřní bod definičního oboru $D(f)$ funkce $z = f(x, y)$. Dosaďme do funkce $f(x,y)$ za y pevnou hodnotu y_0, tím dostaneme funkci jedné proměnné a to $g(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce g derivaci v bodě x_0, to znamená, že existuje limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ říkáme, že **funkce** f **má v bodě** $[x_0, y_0]$ **parciální derivaci podle proměnné** x a označíme ji $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, resp. $f'_x(x_0, y_0)$.

Podobně se může stát, že funkce $f(x_0, y)$ (tj. funkce proměnné y) má derivaci v bodě y_0, tj. že existuje limita $\lim\limits_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$. Tuto limitu nazýváme **parciální derivací funkce f podle proměnné** y **v bodě** $[x_0, y_0]$ a označíme ji $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ resp. $f'_y(x_0, y_0)$.

Geometrický význam parciálních derivací



Obrázek 8.1

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = tg\alpha$ - je směrnice tečny v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ ke křivce na ploše $z = f(x, y)$, přičemž křivka je řezem roviny $y = y_0$ a plochy $z = f(x, y)$.

Podobně $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = tg\beta$.

Úhly α a β hledáme tak, že najdeme úhel mezi příslušnou tečnou a kladným směrem příslušné osy.

Rozdíl oproti funkce jedné proměnné!

Existence parciálních derivací v bodě nezajistí spojitost funkce v tomto bodě. Srovnej s funkcí jedné proměnné! Parciální derivace totiž popisují chování dané funkce pouze ve směrech souřadných os, kdežto pojem spojitosti funkce se týká celého okolí daného bodu.

Parciální derivace na množině

Podobně jako u funkce jedné proměnné rozšiřujeme pojem parciální derivace v bodě na pojem parciální derivace na množině.

Definice 8.2 Nechť funkce f je definována na množině $D(f) \subset R^2$ a nechť $M \neq \emptyset$ je množina všech bodů $[x, y] \in D(f)$, v nichž existuje (vlastní) parciální derivace $f_x'(x, y)$. Funkci g definovanou na množině M předpisem $g(x, y) = f_x'(x, y)$ **nazýváme parciální derivací funkce f podle proměnné x na množině M** a značíme ji f_x', resp. $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Obdobně definujeme funkci f_y', resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Poznámky

- Zřejmě $M \subset D(f)$.
- Počítáme-li parciální derivace funkce f v libovolném bodě $[x, y] \in D(f)$, pak píšeme stručně $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$, resp. f_x' a f_y'.
- Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$ uvažovaná ve všech bodech $[x, y] \in D(f)$, v nichž nabývá vlastní hodnoty je funkcí dvou proměnných x a y s definičním oborem $D(f_x') \subset D(f)$, resp. $D(f_y') \subset D(f)$.
- Parciální derivace funkce f na množině jsou funkce týchž nezávislé proměnných jako funkce f.

- Funkce f'_x a f'_y nazýváme také parciální derivace 1. řádu, stručně 1. parciální derivace.
- Funkce dvou proměnných má dvě 1. parciální derivace, pokud existují.
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ stejně jako $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ je **číslo** $\in R$, kdežto $\frac{\partial f}{\partial x}$ na množině stejně jako $\frac{\partial f}{\partial y}$ na množině je **funkce** dvou proměnných.

Výpočet derivací

Parciální derivaci funkce v libovolném bodě podle určité proměnné vypočítáme tak, že funkci derivujeme jen podle této proměnné, přičemž zbývající proměnnou považujeme za konstantu.

Při výpočtu užíváme týchž pravidel a vzorců jako při výpočtu derivace funkce jedné proměnné.

Při výpočtu parciální derivace v daném bodě C obvykle nejprve stanovíme parciální derivaci v obecném bodě X a pak dosadíme C za X.

Definiční obor každé parciální derivace funkce f je podmnožinou definičního oboru funkce f, tedy $D(f'_x) \subset D(f)$ a $D(f'_y) \subset D(f)$.

Příklad Vypočítejte parciální derivace funkce f v bodě A podle obou proměnných.

a) $f(x,y) = x^2y;\ \ A = [4,6]$
b) $f(x,y) = 3x^2y + \sin(xy^2);\ A = [1,0]$

Řešení

a) $f(x,y) = x^2y; \quad D(f) = R^2$

$f'_x = 2xy;\ f'_y(A) = 2.4.6 = 48 \qquad D(f'_x) = D(f'_y) = R^2$

$f'_y = x^2;\ f'_y(A) = 4^2 = 16$

b) $f(x,y) = 3x^2y + \sin(xy^2); \quad D(f) = R^2$

$f'_x = 6xy + y^2\cos(xy^2); \qquad D(f'_x) = R^2 = D(f'_y)$

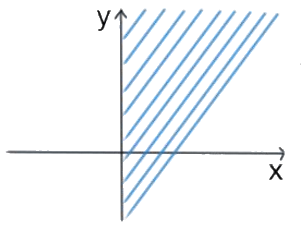
$f'_y = 3x^2 + 2xy\, cos(xy^2)$

$f'_x(A) = 6.1.0 + 0^2\cos(1.0^2) = 0 + 0.cos0 = 0$

$f'_y(A) = 3.1^2 + 2.1.0.\cos(1.0^2) = 3 + 0.cos0 = 3$

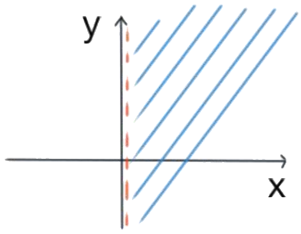
Příklad Vypočítejte parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt[4]{x}y^2 + \frac{y^3}{3}$ a určete jejich definiční obory.

Řešení $f(x,y) = \sqrt[4]{x}y^2 + \frac{y^3}{3}$; $\quad D(f) = \{[x,y] \in R^2; x \geq 0\}$



$D(f)$

$$f'_x = \frac{y^2}{4\sqrt[4]{x^3}}; \quad D(f'_x) = \{[x,y] \in R^2; x > 0\}; \; D(f'_x) \subset D(f)$$



$D(f'_x)$

$$f'_y = 2\sqrt[4]{x}y + y^2\,; \; D(f'_y) = D(f)$$

Poznámka Derivováním se může definiční obor funkce zúžit.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace 1. řádu, tj. f'_x a f'_y, jsou funkce proměnných x a y. Tyto funkce můžeme opět derivovat podle x a y a dostaneme tak **parciální derivace 2. řádu**, což jsou opět funkce proměnných x a y. Pokud tyto funkce opět zderivujeme podle x a y, obdržíme parciální derivace 3. řádu atd. Obecně pak hovoříme o **parciálních derivacích n-tého řádu**.

Parciální derivace 2. řádu funkce f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

Funkce dvou proměnných má 4 parciální derivace 2. řádu.

Parciální derivace 3. řádu funkce f :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Obecně má funkce $f(x,y)$ celkem 2^n parciálních derivací n - tého řádu.

Poznámka Příslušnou parciální derivaci vyššího řádu dostaneme postupným derivováním podle x či podle y v tom pořadí v jakém jsou uvedeny ve jmenovateli symbolického zápisu.

Parciální derivace, kde derivujeme podle obou proměnných, nazýváme **smíšené parciální derivace**, Parciální derivace, kde derivujeme jen podle proměnné y nebo jen podle proměnné x, někdy nazýváme **ryzí parciální derivace**.

U smíšených parciálních derivací obecně záleží na pořadí derivování. Kdy na pořadí nezáleží, uvádí následující věta.

Věta 8.1 (O záměnnosti smíšených parciálních derivací.)

*Má-li funkce $f(x,y)$ spojité smíšené parciální derivace podle všech proměnných až do řádu n, **záleží** při výpočtu derivací řádu $\leq n$ pouze na tom, **kolikrát** derivujeme podle té které proměnné a **nikoliv** na tom, v jakém **pořadí** derivujeme podle jednotlivých proměnných.*

Poznámka Má-li $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2. a 3. řádu, pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

Příklad Vypočítejte 1., 2. a 3. parciální derivace funkce f a porovnejte smíšené parciální derivace.

funkce $f(x,y) = x^3 - 2y^2 + 4x^2y^2 - 6x + 2y - 3$

Řešení $D(f) = R^2$

$$f'_x = 3x^2 + 8xy^2 - 6 \qquad f'_y = -4y + 8x^2y + 2$$

$$f''_{xx} = 6x + 8y^2 \qquad f''_{yy} = -4 + 8x^2$$

$$f''_{xy} = 16xy \qquad f''_{yx} = 16xy$$

$$f'''_{xxx} = 6 \qquad f'''_{yyy} = 0$$

$$f'''_{xxy} = 16y \qquad f''_{yyx} = 16x$$

$$f'''_{xyx} = 16y \qquad f'''_{yxx} = 16y$$

$$f'''_{xyy} = 16x \qquad f'''_{yxy} = 16x$$

Definiční obor všech parciálních derivací funkce f je rovina R^2 a všechny funkce jsou na R^2 spojité.

Porovnáme smíšené parciální derivace.

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 16xy$$

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} = 16y$$

$$f'''_{xyy} = f'''_{yyx} = f'''_{yxy} = 16x$$

Totální diferenciál

Definice 8.3 Nechť parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ funkce $z = f(x, y)$ jsou definovány v bodě $[x_0, y_0]$ a jeho okolí a nechť jsou v bodě $[x_0, y_0]$ spojité. Označme dx, dy přírůstky proměnných x a y. Potom výraz $dz = df(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$ nazýváme **1. totálním diferenciálem** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Poznámka Totální diferenciál je funkcí dx a dy, je tedy opět funkcí dvou proměnných. Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál, pak říkáme, že f je **diferencovatelná** v bodě $[x_0, y_0]$.

Jaký praktický význam má totální diferenciál říká následující věta.

Věta 8.2 *Nechť funkce $f(x,y)$ má v bodě $[x_0,y_0]$ totální diferenciál. Označme $\Delta f(x_0,y_0)$ přírůstek funkční hodnoty funkce f v bodě $[x_0,y_0]$ pro přírůstky dx, dy nezávisle proměnných x, y, tedy $\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+dx,y_0+dy)-f(x_0,y_0)$. Potom platí*

$$\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{df(x_0,y_0)-\Delta f(x_0,y_0)}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}=0$$

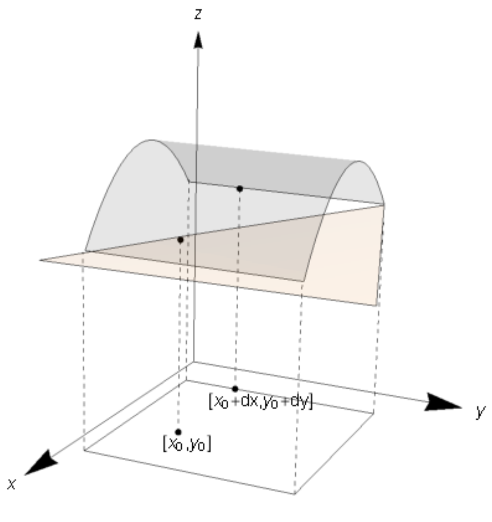
Poznámka Na základě věty lze skutečný přírůstek funkční hodnoty přibližně nahradit diferenciálem.

Věta 8.3 *Má-li funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ totální diferenciál, pak je v bodě $[x_0,y_0]$ spojitá.*

Poznámka Srovnání s funkcí jedné proměnné: Tam stačila ke spojitosti funkce existence vlastní derivace. U funkce dvou proměnných existence obou parciálních derivací ještě nezaručuje spojitost funkce.

Poznámka Totální diferenciál funkce $z=f(x,y)$ v libovolném bodě $[x,y]$ je výraz $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$.

Rozlišuj $df(x,y)$ a $df(x_0,y_0)$!



Z obrázku lze vyčíst geometrický význam totálního diferenciálu: $df(x_0,y_0)$ je přírůstek funkce f v bodě (x_0+dx,y_0+dy) k tečné rovině τ ke grafu funkce f v bodě $[x_0,y_0]$, kdežto $\Delta f(x_0,y_0)$ je přírůstek funkce f v bodě (x_0+dx,y_0+dy) ke grafu funkce f.

Výraz df dává přírůstek funkce Δf s jistou chybou.

Užití totálního diferenciálu

Podobně jako jsme nahrazovali u funkce jedné proměnné v prvním přiblížení přírůstek funkce diferenciálem (geometricky – přírůstek funkce nahrazujeme přírůstkem k tečně), tak také u funkce dvou proměnných nahrazujeme přírůstek funkce totálním diferenciálem (geometricky – přírůstek funkce nahrazujeme přírůstkem k tečné rovině).

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) \doteq \mathrm{f}(x_0, y_0) + \mathrm{df}(x_0, y_0)$$

Užití totálního diferenciálu

- k přibližným numerickým výpočtům
- k lokální aproximaci dané funkce lineární funkcí
- v teorii chyb

Tečná rovina a normála

U funkce jedné proměnné jsme určovali rovnici tečny a normály grafu funkce $y = f(x)$ v daném bodě.

Pro funkci dvou proměnných může určovat rovnici tečné roviny a normály plochy $z = f(x, y)$ v daném bodě.

Věta 8.5 *Tečná rovina τ plochy $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$, která není rovnoběžná s osou z existuje, právě když je funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$.*

Rovnice tečné roviny τ je dána vzorcem

$$\tau : z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),$$

resp. $z = z_0 + z'_x(x_0\ \ y_0)\,(x - x_0) + z'_y(x_0\ \ y_0)\,(y - y_0)$

Rovnice normály n je dána vzorcem

$$n : \frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}, \text{ resp. } \frac{x - x_0}{z'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0 y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Příklad Vypočítejte totální diferenciál funkce $z = \frac{x^2-y^2}{xy}$

a) v libovolném bodě [x, y] pro libovolné přírůstky dx a dy,
b) v bodě [1, 1] pro libovolné přírůstky dx a dy,
c) v libovolném bodě [x, y] pro $dx = 0{,}01\ a\ dy = -0{,}01$,
d) v bodě [2, 2] pro $dx = 0{,}03\ a\ dy = 0{,}01$,

a)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x^2y - (x^2 - y^2)y}{(xy)^2} = \frac{x^2y + y^3}{x^2y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x^2y - (x^2 - y^2)x}{(xy)^2} = \frac{-x^3 - xy^2}{x^2y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{xy^2}$$

$$dz(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2y}dx - \frac{x^2 + y^2}{xy^2}dy = \frac{x^2 + y^2}{xy}\left(\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy\right)$$

b)

dosadíme do dz $x = 1\ a\ y = 1$

$$dz(1,1) = \frac{1^2 + 1^2}{1 \cdot 1}\left(\frac{1}{1}dx - \frac{1}{1}dy\right) = 2\,(dx - dy)$$

c)

dosadíme do dz $dx = 0{,}01\ a\ dy = -0{,}01$

$$dz(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}\left(\frac{1}{x}.\,0{,}01 + \frac{1}{y}.\,0{,}01\right) = 0{,}01\frac{x^2 + y^2}{xy}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

d)

dosadíme do dz $x = 2, y = 2, dx = 0{,}03\ a\ dy = 0{,}01$

$$dz(2,2) = \frac{2^2 + 2^2}{2.2}\left(\frac{1}{2}.\,0{,}03 - \frac{1}{2}.\,0{,}01\right) = \frac{8}{4}\cdot\frac{1}{2}(0{,}03 - 0{,}01) = 0{,}02$$

Příklad Vypočítejte přibližně hodnotu výrazu $0{,}53^3 - 2 \cdot 1{,}15^2$.

Řešení Sestrojíme vhodnou funkci $f(x, y) = x^3 - 2y^2$, určíme bod $[x_0, y_0]$, v jehož blízkém okolí se nachází bod $[x_0 + dx, y_0 + dy]$,

$$[x_0, y_0] = \left[\tfrac{1}{2}, 1\right],$$

vypočteme $dx = 0{,}53 - 0{,}5 = 0{,}03$ a $dy = 1{,}15 - 1 = 0{,}15$.

Určíme diferenciál funkce f.

$$df(x, y) = 3x^2 dx - 4y\, dy$$

Využijeme vztahu $f(x_0 + dx, y_0 + dy) \triangleq f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$.

Pro náš případ tedy bude

$f(0{,}53; 1{,}15) \triangleq f\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) + df\left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$, kde $dx = 0{,}03$ a $dy = 0{,}15$.

$$f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2.1 = -\frac{15}{8} = -1{,}875$$

$$df\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 .\ 0{,}03 - 4.1.0{,}15 = \frac{0{,}09}{4} - 0{,}60 = 0{,}0225 - 0{,}60 = -0{,}5775$$

$$f(0{,}53; 1{,}15) \triangleq -1{,}875 - 0{,}5775 = -2{,}4525$$

Výsledek: $0{,}53^3 - 2.\,1{,}15^2 \triangleq -2{,}4525$

Příklad Napište rovnici tečné roviny τ a normály n plochy $z = 4x^3 - 5xy$ v bodě $T = [1, -1,\ ?\,]$.

Řešení

Určíme $z(T) = 4.1^3 - 5.1.(-1) = 4 + 5 = 9;\ T = [1, -1,\ 9]$

$$z'_x = 12x^2 - 5y \quad z'_x(T) = 12.1^2 - 5(-1) = 12 + 5 = 17$$

$$z'_y = -5x \qquad\qquad z'_y(T) = -5.1 = -5$$

Rovnice tečné roviny τ:

$$\tau: z = z_0 + z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\tau: z = 9 + 17(x - 1) - 5(y + 1)$$

$$\tau: 17x - 5y - z - 13 = 0$$

Rovnice normály n:

$$n: \frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

$$n: \frac{x - 1}{17} = \frac{y + 1}{-5} = \frac{z - 9}{-1}$$

Σ

Parciální derivace jsou definovány prostřednictvím derivace funkce jedné proměnné. Při jejich výpočtu užíváme týchž pravidel a vzorců jako při výpočtu derivací funkce jedné proměnné. Funkci derivujeme podle zadané proměnné, přičemž zbývající proměnnou považujeme za konstantu. Má-li funkce $f(x, y)$ totální diferenciál v bodě, pak je v tomto bodě spojitá. Pomocí totálního diferenciálu můžeme určit přibližně přírůstek funkce v bodě. Parciální derivace jsou součástí rovnice tečné roviny a normály.

?

1. Vyslovte definici $\frac{\partial f}{\partial x}$, resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Načrtněte graf fce $z = f(x, y)$ a vysvětlete geometrický význam $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_O)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_O)$.
3. Jaká je podmínka záměnnosti pořadí derivování?
4. Jaký je vztah mezi spojitostí funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a parciálními derivacemi, resp. totálním diferenciálem v tomto bodě?
5. Jaký je geometrický význam totálního diferenciálu?
6. Vypočítejte obě první parciální derivace funkce

   $f(x, y) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + 3x^2y - \frac{y^3}{4} - 5x + 150$ a jejich hodnotu v bodě

   $A = [1, 0],\ B = [-1, 1],\ C = \left[a, \frac{1}{a}\right]$.

$$[f'x(A) = 4;\ f'y(A) = 3;\ f'x(B) = -1; f'y(B) = \frac{5}{4}; f'x(C) = 9a^2 - \frac{1}{a} + 1; f'y(C)$$
$$= -a + 3a^2 - \frac{3}{4a^2}; a \neq 0]$$

7. Určete 1. parciální derivace funkce.

a) $f(x,y) = \sqrt{x-y^2}$ $\left[f'x = \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}}; f'y = \frac{-y}{\sqrt{x-y^2}}\right]$

b) $f(x,y) = x\ln(x+y^2)$ $\left[f'x = \ln(x^2+y^2) + \frac{x}{x+y^2}; f'y = \frac{2xy}{x+y^2}\right]$

c) $f(x,y) = y^x$ $[f'x = y^x \ln y; f'y = xy^{x-1}]$

d) $f(x,y) = e^{-\frac{x}{y}}$ $\left[f'x = -\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}; f'y = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}\right]$

e) $f(x,y) = arctg\frac{x+y}{x-y}$ $\left[f'x = \frac{-y}{x^2+y^2}; f'y = \frac{x}{x^2+y^2}\right]$

f) $f(x,y) = e^{y^{x^2}}$ $\left[f'x = 2xy^{x^2}e^{y^{x^2}}\ln y; f'y = x^2y^{x^2-1}e^{y^{x^2}}\right]$

g) $f(x,y) = ln^{x^2y-3x}$ $[f'x = 2xy-3; f'y = x^2]$

8. Vypočítejte parciální derivace 1. – 3. řádu funkce $z = \frac{x^2}{y^3}$ a určete jejich hodnotu v bodě $A = [1,-1]$.

$$\left[\begin{array}{c} z'x(A) = -2, z'y(A) = -3, z''xx(A) = -2, z''xy(A) = -6, \\ z''yy(A) = -12, z'''xxx(A) = 0, z'''xxy(A) = -6, z'''xyy(A) = -24, z'''yyy(A) = -60 \end{array}\right]$$

9. Vypočítejte $\frac{\partial^4 f}{\partial^3 \partial y}$ funkce $f(x,y) = arctg\frac{x}{y}$ a její hodnotu v bodě $T = [1,-1]$.

$\left[-\frac{3}{2}\right]$

10. Určete přibližně hodnotu výrazu $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$. $[4{,}998]$

11. Napište rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $z = 3x^2 + 5y^2$ v bodě $T = [1,-1,?]$. $[\tau: 6x - 10y - z - 8 = 0]$

$\left[n: \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-10} = \frac{z-8}{-1}\right]$

12. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

a) v libovolném bodě $[x,y]$, $\left[df(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(xdx + ydy)\right]$

b) v bodě $A = [1,2]$, $\left[df(1,2) = \frac{1}{5}(dx + 2dy)\right]$

c) v bodě $[x,y]$ pro $dx = 0{,}01$ a $dy = 0{,}02$,

$\left[df(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(0{,}01x + 0{,}02y)\right]$

d) v bodě $B = [-1,1]$ pro $dx = 0{,}1$ a $dy = -0{,}1$. $[df(-1,1) = -0{,}1]$

Základní literatura:

[1] BÍLKOVÁ, A. *Matematika I*. Praha: SPN, 1980. 382 stran. ISBN 17-536-80 (skripta)

[2] BRABEC, J., HRŮZA, B *Matematická analýza II.* SNTL Praha, 1986. 580 stran. ISBN 04-017-86

[3] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. 459 stran. ISBN 80-7200-587-1

[4] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2)*. Ekopress Praha, 1997. 373 stran. ISBN 80-86119-01-7

[5] KARÁSEK, J. *Matematika II.* Brno: VUT, 2002. 242 stran. ISBN 80-214-9092-8 (skripta)

[6] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza II.* UP Olomouc, 2005. 134 stran. ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 9

Extrémy funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- vysvětlit rozdíl mezi lokálním, globálním a vázaným extrémem
- geometricky znázornit extrémy
- vyhledat lokální extrémy
- určovat globální extrémy

Klíčová slova:

Lokální, globální a vázaný extrém, maximum a minimum funkce, stacionární bod, sedlový bod, vazba.

Extrémy funkce dvou proměnných

Lokální extrémy

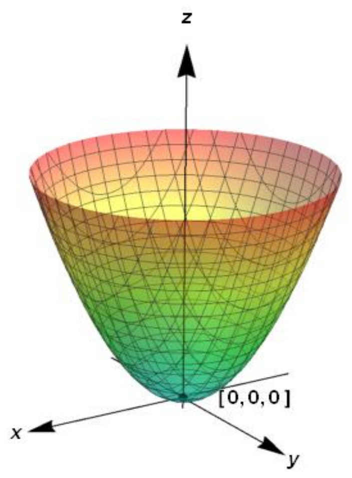
Definice 9.1 Říkáme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ **lokální maximum [minimum]**, když existuje okolí $U_\delta(x_0, y_0)$ takové, že $f(x,y) \le f(x_0, y_0)$ $[f(x,y) \ge f(x_0, y_0)]$ pro všechny body $[x, y] \in U_\delta(x_0, y_0)$.

Říkáme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ **ostré lokální maximum [minimum]**, když existuje redukované okolí $U_\partial^*(x_0, y_0)$, takové, že $f(x,y) < f(x_0, y_0)$ $[f(x,y) > f(x_0, y_0)]$ pro všechny body $[x, y] \in U_\partial^*(x_0, y_0)$.

Lokální minima a lokální maxima nazýváme souhrnně **lokální extrémy**. Hodnota $f(x_0, y_0)$ se nazývá lokální minimum (lokální maximum) funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Příklad Funkce $z = x^2 + y^2$ nabývá v bodě $[0,0]$ ostrého lokálního minima 0, neboť $x^2 + y^2 > 0$ dokonce pro každý bod $[x, y] \in R^2 \setminus [0,0]$, nejen z redukovaného okolí bodu $[0,0]$.

Bod $[0,0]$ je zároveň bodem, v němž má funkce globální maximum 0.



Obrázek 9.1 Graf funkce $z = x^2 + y^2$

Poznámka Lokální extrémy hledáme na otevřené množině, tedy ve vnitřních bodech $D(f)$.

Věta 9.1 *(Nutná podmínka pro existenci extrému.)*

Nechť funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém. Existují-li v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivace 1. řádu této funkce, pak jsou rovny nule. Tj. platí $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ =0.

Příklad Funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ má 1. parciální derivace $f'_x = 2x$ a $f'_y = 2y$. Najdeme bod, pro nějž je splněna nutná podmínka.

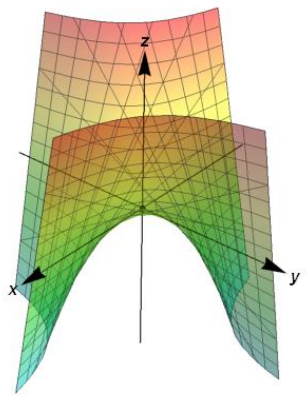
$$f'_x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

V bodě $[0,0]$ extrém nastává, jeho hodnota je 0 – vysvětleno v předcházejícím příkladě. Určíme-li rovnici tečné roviny τ v bodě $[0, 0, 0]$, pak obdržíme $\tau\colon \mathrm{z} = 0$. Tečná rovina splývá se souřadnicovou rovinou (xy).

Příklad který, dokumentuje, že podmínka uvedená ve větě 9.1 není postačující pro existenci extrémů.

Funkce $z = xy$ má $z'_x(0,0) = z'_y(0,0) = 0$ a přitom funkce $z = xy$ v bodě $[0,0]$ nenabývá lokálního extrému, neboť ve vnitřních bodech v I. a III. kvadrantu je $xy > 0$ a tedy $z > 0$, zatímco ve II. a IV. kvadrantu je $xy < 0$ a tedy $z < 0$. V každém okolí $[0,0]$ tedy nabývá funkce z jak kladných, tak i záporných hodnot, přičemž $z(0,0) = 0$. Podle definice v bodě $[0,0]$ nemá funkce extrém, funkce má v tomto bodě sedlo.



Obrázek 9.2 Graf funkce $\boldsymbol{z = xy}$

Definice 9.2 Řekneme, že bod $[x_0, y_0]$ je **stacionárním bodem** funkce $f(x, y)$, když v tomto bodě existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ a $\frac{\partial f}{\partial x}$ a platí $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Poznámka Bod $[0,0]$ v předcházejících příkladech je stacionární bod.

Věta 9.2 (O postačujících podmínkách pro extrém.)

Nechť funkce $f(x, y)$ má v okolí stacionárního bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace 2. řádu. Potom platí:

Je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) \,.\, f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$, má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém, a to maximum pro případ $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ a minimum pro $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) \,.\, f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 < 0$, nemá funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém.

Poznámka

- Věta neříká nic o případu, kdy $f''_{xx}(x_0, y_0) \,.\, f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 = 0$. V tomto případě totiž extrém někdy nastane a někdy nikoliv. Případ takového stacionárního bodu se musí studovat zvlášť. Musíme vyšetřit chování funkce v okolí tohoto bodu, tj. vyšetřit existenci extrému podle definice 9.1.

- Označíme-li $D_1 = f''_{xx}(x_0, y_0)$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - -\left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2,$$

kde D_1, resp. D_2, je determinant 1., resp. 2. řádu., pak postačující podmínku můžeme stručně zapsat takto:

Je-li $D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě $\left[x_0, y_0\right]$ ostrý lokální extrém, a to maximum pro $D_1 < 0$ a minimum pro $D_1 > 0$.

Je-li $D_2 < 0$, nemá funkce f v bodě $\left[x_0, y_0\right]$ lokální extrém, ale **sedlo**.

Je-li $D_2 = 0$, nelze o existenci extrému rozhodnout, neboť ten může, ale nemusí nastat.

Kromě stacionárních bodů může vést k lokálnímu extrému funkce $z = f(x, y)$ také takový bod $\left[x_0, y_0\right]$, v němž obě parciální derivace neexistují nebo takový bod, v němž jedna parciální derivace je rovna nule a zbývající neexistuje. Funkce samotná samozřejmě musí být v bodě $\left[x_0, y_0\right]$ definována a bod $\left[x_0, y_0\right]$ musí být vnitřním bodem $D(f)$.

Analyzovat body, v nichž parciální derivace neexistují, je zpravidla složitější a je nutné postupovat v jednotlivých případech různě. Má-li funkce skutečně v takovém bodě $\left[x_0, y_0\right]$ extrém, zjistíme vyšetřováním chování funkce v okolí bodu $\left[x_0, y_0\right]$ a to zpravidla určením znaménka rozdílu $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ pro body $[x, y] \in U^*_\partial(x_0, y_0)$.

Nemění-li se znaménko rozdílu, pak extrém nastane. Je-li rozdíl kladný, je v bodě $\left[x_0, y_0\right]$ ostré lokální minimum, je-li rozdíl záporný, pak je v bodě $\left[x_0, y_0\right]$ ostré lokální maximum.

Mění-li se znaménko rozdílu, pak extrém nenastane.

Body podezřelé z lokálního extrému jsou:

(A) stacionární body; získáme je řešením soustavy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(B) body, v nichž jedna parciální derivace neexistuje a zbývající je rovna nule nebo body, v nichž obě parciální derivace neexistují; získáme je z $D(f'_x)$ a $D(f'_y)$.

Geometrická interpretace lokálních extrémů

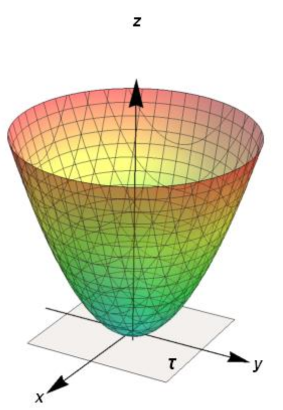
Výpočet lokálních extrémů funkce $z = f\,(x, y)$ vede ke stacionárním bodům $[x_0, y_0]$. Tečná rovina τ sestrojená v bodě $[x_0, y_0, f\,(x_0, y_0)]$ k ploše $z = f\,(x, y)$ je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou (x, y).

Stacionárním bodům, v nichž extrém nastane, odpovídají na ploše $z = f\,(x, y)$ body, v jejichž okolí se plocha rozprostírá buď nad nebo pod tečnou rovinou τ.

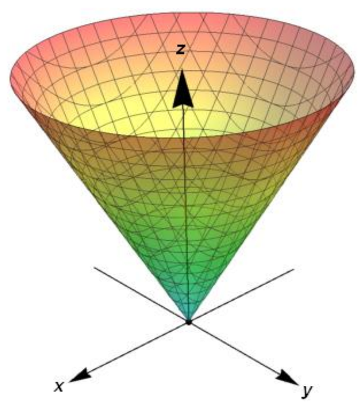
Příklad funkce, která má ostré lokální minimum v bodě $[0, 0)]$

a) Ve stacionárním bodě

b) v bodě, v němž obě 1. parciální derivace neexistují



Obr. 9.3 Graf funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Obr.9.3 Graf funkce $z = x^2 + y^2$

Grafem funkce je rotační paraboloid;

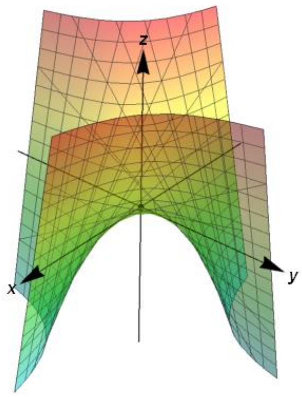
$$\tau\text{: } z = 0$$

Grafem funkce je kuželová plocha s vrcholem v počátku souřadnic; τ, nelze sestrojit.

funkce je kuželová plocha s vrcholem v počátku souřadnic; τ, nelze sestrojit.

Stacionárním bodům, které nevedou k extrémům odpovídají na ploše body, v jejichž okolí má plocha tvar sedla. (Tyto body jsou jistou analogií s inflexními body křivek). Sedlem funkce f rozumíme bod grafu, v němž je funkce hladká, obě její parciální derivace jsou rovny nule a současně nenastává lokální extrém. Bod $D(f)$, v němž sedlo funkce f nastává, se nazývá **sedlový bod**.

Příklad funkce, která má ve stacionárním bodě $[0, 0]$ sedlo.



$z = xy$

Postup při určování lokálních extrémů na otevřené množině

1. Určíme body podezřelé z lokálních extrémů, tj.
   (A) stacionární body,
   (B) body, v nichž některá (případně obě) parciální derivace neexistuje a zbývající je rovna nule.

2. Rozhodneme o existenci a typu lokálního extrému.
   V případě bodů (A) rozhodneme podle postačující podmínky pro extrém.

   V případě bodů (B) rozhodneme na základě definice lokálních extrémů; vyšetříme, jak se chová funkce na okolí těchto bodů – tj. rozhodneme podle znaménka rozdílu $f(x,y) - f(x_0, y_0)$. Pokud pro každý bod $[x, y] \in U_\partial^*(x_0, y_0)$ je rozdíl kladný, pak v bodě $[x_0, y_0]$ nastává ostré lokální minimum; pokud je rozdíl záporný, pak v bodě $[x_0, y_0]$ nastává ostré lokální maximum. Mění-li se znaménko rozdílu, pak extrém nenastane.

Může nastat i neostré lokální maximum [minimum] a to v případě, že je rozdíl nekladný [nezáporný] pro každý bod $[x, y] \in U_\partial^*(x_0, y_0)$.

Příklad Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}$.

Řešení Určíme $D(f) = R^2$.

Vypočteme parciální derivace.

$$f'_x = -4x\,.\,e^{-(x^2+y^2)};\ f'_y = -4y\,.\,e^{-(x^2+y^2)} \quad D(f'_x) = D(f'_y) = R^2$$

$$f''_{xx} = -4e^{-(x^2+y^2)}(1 - 2x^2)$$

$$f''_{yy} = -4e^{-(x^2+y^2)}(1 - 2y^2)$$

$$f''xy = 8xy\ e^{-(x^2+y^2)}$$

$$D(f''_{xx}) = D(f''_{yy}) = D(f''_{xy}) = R^2$$

Určíme body podezřelé z lokálního extrému.

(A) z nutné podmínky určíme stacionární body

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow -4x\ e^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$f'_y = 0 \Leftrightarrow -4x\ e^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Funkce má 1 stacionární bod $A = [0, 0]$.

(B) body, v nichž aspoň jedna parciální derivace neexistuje – určíme je z definičních oborů $D(f'_x)$ a $D(f'_y)$

1. parciální derivace existují ve všech bodech $D(f) = R^2$, odtud žádný další bod podezřelý z extrému nezískáme, budeme psát Ø.

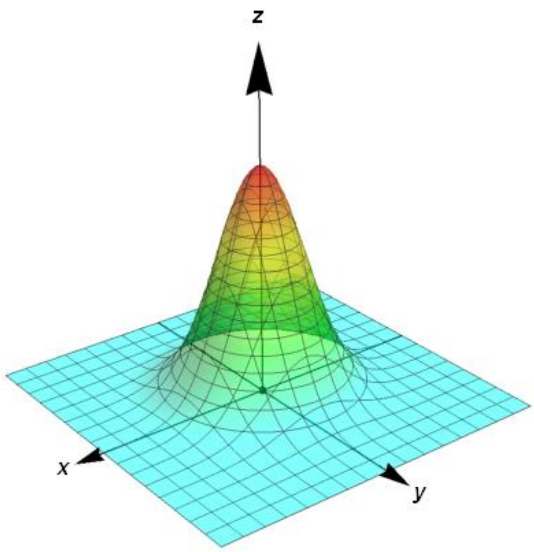
Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu extrému. Zjístíme hodnoty $f''_{xx}(A) = -4$; $f''_{yy}(A) = -4$; $f''_{xy}(A) = 0 = f''_{yx}$ a sestavíme z nich determinanty.

$$D_1 = |f''_{xx}(A)| = -4 < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{xy}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

$$f(A) = 2$$

Tečná rovina τ má v bodě A rovnici $z = 2$. Protože $D_2 > 0$ a $D_1 < 0$, má funkce ostré lokální maximum 2 v bodě $A = [0, 0]$.



Obrázek 9.5 $\boldsymbol{f(x, y) = 2e^{-(x^2+y^2)}}$

Příklad Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Řešení

Určíme $D(f)$ a 1. a 2. parciální derivace.

$D(f) = R^2; f'_x = 2x;\ f'_y = -2y;\ f''_{xx} = 2; f''_{yy} = -2; f''_{xy} = 0$.

Definičním oborem všech parciálních derivací je množina R^2.

(A) z nutné podmínky určíme body podezřelé z extrému.

$$f'_x = 2x\ = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'_y = 0 \Leftrightarrow -2y\ = 0 \Rightarrow y = 0$$

Funkce má 1 stacionární bod $A = [0, 0]$.

(B) tyto body určíme z $D(f'_x)$ a $D\left(f'_y\right)$: $\emptyset$

O existenci a typu extrému rozhodneme podle postačující podmínky.

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

Protože $D_2 < 0$, nemá funkce v bodě A lokální extrém, nýbrž sedlo. Bod $A = [0, 0]$ je sedlový bod. Sedlo je bod grafu – je to bod $[0, 0,0]$. Tečná rovina $\tau: z = 0$.

Příklad Určete lokální extrémy funkce $f\,(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Řešení Určíme $D(f) = R^2$

Stanovíme parciální derivace 1. a 2. řádu a jejich definiční obory.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

Definičním oborem všech parciálních derivací je množina R^2.

Určíme body, podezřelé z lokálních extrémů.

(A) stacionární body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \;/{:}\,3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 6xy - 12 = 0 \;\Rightarrow xy - 2 = 0$$

Obdrželi jsme soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$xy - 2 = 0 \Rightarrow \; y = \frac{2}{x}; x \neq 0;$$

dosadíme do 1. rovnice

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0 \;\; /\cdot x^2$$

$x^4 + 4 - 5x^2 = 0$ … bikvadratická rovnice

Zavedeme substituci $z = x^2$, obdržíme kvadratickou rovnici.

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \qquad z_1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$(z - 4)\,(z - 1) = 0 \qquad z_2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$$

potom $y_1 = 1;\ y_2 = -1;\ y_3 = 2;\ y_4 = -2.$

Obdrželi jsme 4 stacionární body:

$$A = [2, 1]; B = [-2, -1]; C = [1, 2]; D = [-1, -2]$$

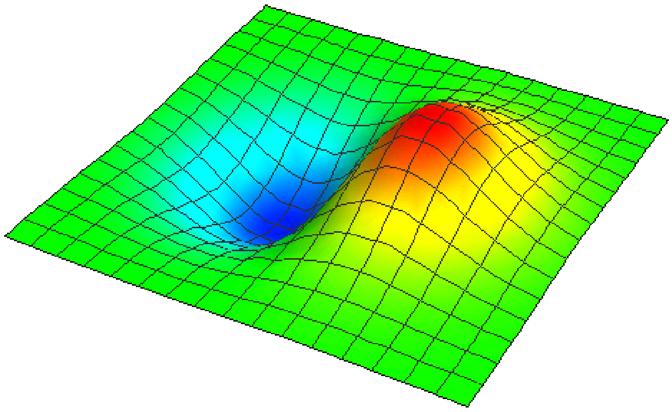
(B) body určíme z $D(f'_x)$ a $D(f'_y)$: ∅

Podle postačující podmínky rozhodneme o existenci a typu lokálního extrému. Pro přehlednost sestavíme tabulku pro stacionární body.

bod	$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_1}$	$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$	$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}}$	$\boldsymbol{D_2}$	**existence a typ. lok. ex.**
$\boldsymbol{A = [2, 1]}$	$12 > 0$	12	6	$144 - 36 = 108 > 0$	o. l. min
$\boldsymbol{B = [-2, -1]}$	$-12 < 0$	-12	-6	$144 - 36 = 108 > 0$	o. l. max
$\boldsymbol{C = [1, 2]}$	6	6	12	$36 - 144 = -108 < 0$	neexistuje
$\boldsymbol{D = [-1, -2]}$	-6	-6	-12	$36 - 144 = -108 < 0$	neexistuje

$$f(A) = -28\,;\ f(B) = 28$$

Funkce má ostré lokální maximum 28 v bodě $B = [-2, -1]$ a ostré lokální minimum -28 v bodě $A = [2, 1]$.



Obrázek 9.6 Graf funkce, která má ostré lokální maximum a ostré lokální minimum

Globální extrémy

Definice 9.3 Buď f funkce definovaná na množině D. Říkáme, že f nabývá v bodě $[x_0, y_0] \in D$ globálního maxima [minima], když pro každý bod $[x, y] \in D$ je

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \quad [f(x,y) \ge f(x_0,y_0)].$$

Poznámka

- Funkce nemusí mít ve svém $D(f)$ žádné lokální extrémy nebo jich naopak může mít i nekonečně mnoho, ale globální maximum, resp. minimum, v $D(f)$ je jen jedno (pokud existuje), ale může ho funkce nabývat i v nekonečně mnoha bodech.
- Globálním maximem [minimem] funkce f rozumíme největší [nejmenší] hodnotu funkce f, kterou nabývá na svém $D(f)$.
- Lze určovat i globální extrémy na množině $M \subset D(f)$.

Určování globálních extrémů na kompaktní množině

V aplikacích bývá nejčastější úlohou vyhledávání globálních extrémů spojité funkce na kompaktní (uzavřené a omezené) množině. V tomto případě máme zaručeno Weierstrassovou větou, že na takové množině funkce nabývá svého globálního maxima i globálního minima, a to buď v bodech lokálních extrémů ležících uvnitř množiny nebo v některém hraničním bodě množiny.

Postup při vyhledávání globálních extrémů funkce f na množině M

1. Zjistíme, zda je množina M kompaktní a f na ní spojitá. Pokud ano – existují globální extrémy.
2. Najdeme a shromáždíme všechny body z M, které jsou podezřelé z toho, že by v nich funkce f mohla mít globální extrém na M.

Jsou to následující body:

(A) Body z vnitřku množiny *M* podezřelé z lokálního extrému funkce f (to jsou stacionární body a ty, v nichž některá derivace neexistuje).

(B) Body z hranice množiny *M* podezřelé z vázaného lokálního extrému funkce f (hranice je vazbou – jde o lokální extrémy funkce jedné proměnné).

(C) Body hranice množiny *M*, které dosud nebyly v žádné úvaze (tj. v (a) nebo (b)) zahrnuty; jsou to body, v nichž se hranice M láme a krajní body intervalů.

3. Vypočítáme funkční hodnoty ve všech bodech podezřelých z globálních extrémů. Největší z těchto hodnot je pak globální maximum a nejmenší globální minimum funkce f na množině M.

Poznámka Nemusíme určovat typ lokálního extrému (tj. zda se jedná o maximum či minimum), stačí určit pouze funkční hodnoty.

Poznámka Je-li množina M otevřená, pak funkce f nemusí mít na M globální extrémy. Pokud je má, pak je to maximum a minimum z lokálních extrémů funkce f na množině M.

Vázané extrémy

Při studiu globálních extrémů funkce na hranici jsme se setkali s dalším typem extrémů, a to s extrémy vázanými (podmíněnými, s vedlejší podmínkou). U těchto extrémů jde o vyhledávání extrémů funkce na nějaké podmnožině jejího $D(f)$.

Definice 9.4 Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ **vázané lokální maximum [minimum]** při vazbě $g(x,y)=0$, existuje-li takové okolí $\mathrm{U}(x_0, y_0)$, že pro každý bod $[x,y]\in \mathrm{U}(x_0,y_0)$, jehož souřadnice splňují vazbu $g(x,y)=0$, platí $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ $[f(x,y)\geq f(x_0,y_0)]$.

Vázané extrémy funkce $z=f(x,y)$ jsou tedy extrémy jen v množině bodů určité křivky q ležící v $D(f)$. Křivka q je určena buď explicitně rovnicí $y=\varphi(x)$ nebo implicitně rovnicí $g(x,y)=0$, kde φ a y mají spojité derivace.

Funkce $z=f(x,y)$ ve spojení s rovnicí $g(x,y)=0$, eventuelně $y=\varphi(x)$, je vlastně funkcí jedné proměnné. Z rovnice $g(x,y)=0$ vyjádříme jednu proměnnou a dosadíme ji do z za y, případně za x, a obdržíme buď $z=f_1(x)$ případně $z=f_2(y)$. Daný úkol přejde v určení extrému funkce jedné proměnné.

Geometrická interpretace

Vázané extrémy znamenají maximální a minimální hodnotu z-ové souřadnice bodů ležících na prostorové křivce q^*, která leží na ploše určené rovnicí $z=f(x,y)$ nad nebo pod křivkou q (q leží v souřadnicové rovině (xy)). Křivka q^* je řezem plochy $z=f(x,y)$ a plochy, která je kolmá k souřadnicové rovině (xy) a jejíž stopou v rovině (xy) je křivka q.

Příklad Najděte vázaný lokální extrém funkce $f(x,y)=xy-x+y-1$ při vazbě $x+y-1=0$.

Řešení $D(f)=R^2$

Z vazby vyjádříme $y=1-x$ a dosadíme do funkce f. Obdržíme tak funkci F jedné proměnné,

a to x.

$$F(x)=x(1-x)-x+1-x-1=x^2-x$$

Najdeme lokální extrém funkce F.

$$F'(x)=-2x-1, F'(x)=0 \Leftrightarrow -2x-1=0 \Longrightarrow x=-\frac{1}{2}; y=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

Bod $A=\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ je stacionární bod funkce F.

$F''(x)=-2;\ F''(A)=-2<0 \Longrightarrow$ v bodě A nastává ostré lokální maximum, přičemž

$$f(A)=\frac{1}{4}.$$

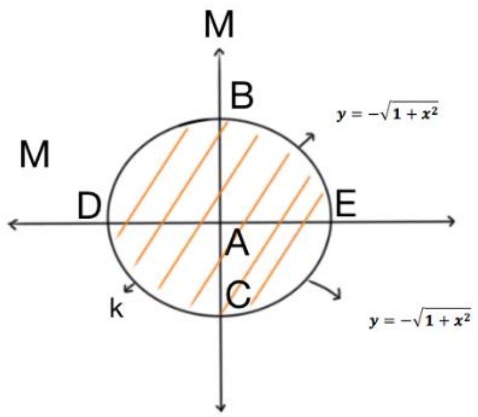
Daná funkce má při vazbě $g(x,y) = x + y - 1$ ostré lokální maximum $\frac{1}{4}$ v bodě $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Příklad Vyhledejte globální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ na množině

$$M = \{[x,y] \in R^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Řešení $D(f) = R^2$

1) Množina M je kruh se středem v počátku soustavy souřadnic o poloměru 1 včetně ohraničující kružnice k. Jde o kompaktní množinu a funkce f je na ní spojitá, což znamená, že globální extrémy f na M existují.



$$\boldsymbol{y = -\sqrt{1 + x^2}}$$

Obrázek 9.7 Grafické znázornění množiny M

2) Shromáždíme všechny body množiny M podezřelé z globálního extrému.

(a) body ležící uvnitř M podezřelé z lokálního extrému

(A) $f'_x = \frac{x}{2}$; $\quad f'_x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'_y = 2y$; $\quad f'_y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Získali jsme 1 stacionární bod $A = [0, 0]$.

Přesvědčíme se, že $A \in M$.

(B) $\emptyset$

Poznámka

Pokud by nalezené body nepatřily do dané množiny M, pak bychom takové body z dalších úvah vyloučili.

(b) body ležící na hranici M, v nichž by mohl nastat vázaný lokální extrém

Hranice množiny M je kružnice k o rovnici $x^2 + y^2 = 1$, a ta je vazbou.

Z rovnice $x^2 + y^2 = 1$ vypočteme $|y| = \sqrt{1 - x^2}$.

„Horní“ půlkružnice má rovnici $y = \sqrt{1 - x^2}; x \in (-1, 1)$.

Dosadíme za y do funkce f, obdržíme tak funkci jedné proměnné, označíme ji F.

$$F_{(x)} = \frac{x^2}{4} + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + 1 - x^2 = 1 - \frac{3}{4}x^2$$

Tutéž funkci F obdržíme i po dosazení $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Určíme stacionární body funkce F.

$$F'_{(x)} = -\frac{3}{2}x;\ F'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Obdrželi jsme 2 body: $B = [0, 1]$ a $C = [0, -1]$ ležící na kružnici k.

(c) body, které dosud nebyly uvažovány jsou body $D = [-1, 0]$ a $E = [1, 0]$

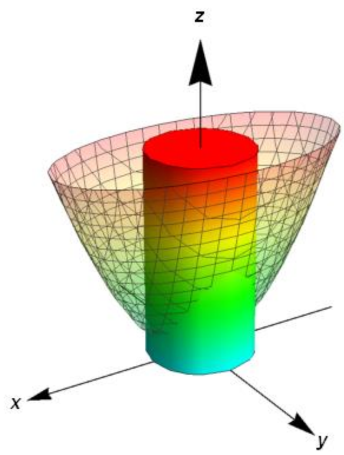
3) Vypočteme funkční hodnoty ve všech získaných bodech.

$$f(A) = 0 \qquad f(C) = 1 \qquad f(E) = \frac{1}{4}$$

$$f(B) = 1 \qquad f(D) = \frac{1}{4}$$

Funkce $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ má na dané množině M globální maximum 1 v bodech $B = [0, 1]$ a $C = [0, -1]$ a globální minimum 0 v bodě $A = [0, 0]$.

Poznámka Grafem funkce je eliptický paraboloid.



Obrázek 9.8 Eliptický paraboloid

Funkce tří proměnných

Teorii diferenciálního počtu funkce více proměnných jsme vyložili na příkladu funkce dvou proměnných, protože pro tuto funkci můžeme řadu zaváděných pojmů graficky znáznornit. Vizualizace základních definovaných pojmů přispívá k jejich lepšímu pochopení a hlubšímu porozumění.

Snadno se pak dají úvahy uvedené pro funkci dvou proměnných analogicky formulovat pro funkci tří proměnných, až pro funkci n proměnných.

Formulaci některých základních pojmů ukážeme na příkladu funkce tří proměnných.

Funkce f tří proměnných je zobrazení z R^3 do R.

Zápis: $u = f(x, y, z)$.

$$D(f) \subset R^3, H(f) \subset R, G(f) \subset R^4$$

$D(f)$ a $H(f)$ lze graficky znázornit, $G(f)$ již ne. Okolím $U_\partial(X_0)$ bodu $X_0 \subset R^3$ rozumíme vnitřek koule (otevřenou kouli) se středem v bodě X_0 a poloměrem ∂; $\partial > 0$.
Limita a spojitost je definována jako pro funkci dvou proměnných, jen tam přibude souřadnice z.
Parciální derivace a extrémy jsou opět definovány obdobně jako u funkce dvou proměnných, opět však přibude z-ová souřadnice.

Také body podezřelé z lokálního extrému vyhledáváme obdobně jako u funkce dvou proměnných:

(A) stacionární body: $f'_x = 0,\ f'_y = 0,\ f'_z = 0$

(B) body, v nichž některé nebo všechny 1. parciální derivace neexistují

A jak vypadají postačující podmínky pro lokální extrém uvádí následující věta.

Věta 9.3 (Postačující podmínky pro extrém.)

Nechť f má spojité parciální derivace 2. řádu v okolí stacionárního bodu $[x_0, y_0, z_0]$. Označme:

$$D_1 = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \Big/ \ [x_0, y_0, z_0]$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} \Big/ [x_0, y_0, z_0]$$

Potom, je-li

$D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$ má funkce f v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ ostré lokální minimum $f(x_0, y_0, z_0)$

a je-li

$D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$ má funkce f v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ ostré lokální maximum $f(x_0, y_0, z_0)$.

Σ

Vyhledávání největší a nejmenší hodnoty sledovaného ukazatele (veličiny) dosažené v probíhajícím reálném procesu bývá častým problémem v praxi. Abychom tuto úlohu zvládli musíme pochopit a umět určovat globální, lokální a vázané extrémy. Lokální extrémy jsou extrémní hodnoty vzhledem k okolí bodu, globální pak vzhledem k části definičního oboru funkce.

Lokální extrémy vyhledáváme na základě nutné podmínky a jejich existenci potvrzujeme a typ určujeme na základě postačujících podmínek. Stanovování globálních extrémů je aplikací metod vyhledávání lokálních a vázaných lokálních extrémů. Oproti lokálním extrémům, kterých může funkce mít i nekonečně mnoho, globální extrém, pokud existuje, je jen jeden.

1. Jaký je rozdíl mezi lokálním a globálním extrémem? Jak jsou tyto extrémy definovány?
2. Jaká je nutná podmínka pro existenci lokálního extrému?
3. Jaké jsou postačující podmínky pro lokální extrém?
4. Co jsou stacionární body? Který bod je stacionární?
5. Ve kterých bodech může nastat lokální (globální) extrém?
6. Co víte o tečné rovině ve stacionárních bodech?
7. Načrtněte graf funkce, která má ostré lokální minimum ve stacionárním bodě (v bodě, v němž parciální derivace neexistují).
8. Jak se hledají globální extrémy funkce na uzavřené a souvislé množině?
9. Stanovte lokální extrémy funkce.

   a) $f(x, y) = y^4 + 32x^2 - 32xy$

   [3 stacionární body, o. l. minimum – 16 v bodech $[1, 2]$ a$[-1, -2]$]

   b) $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

   [4 stacionární body, o. l. minimum 0 v bodě $[0, 0]$]

10. Najděte vázané lokální extrémy funkce f při dané vazbě.

    a) $f(x, y) = x^2 + y^2$; vazba $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$

    [o. l. maximum $\frac{49}{24}$ v bodě $\left[\frac{1}{6}, \frac{11}{4}\right]$]

    b) $f(x, y) = y^2 - 4x^3$; vazba $2x - y + 1 = 0$

    [o. l .maximum 5 v bodě $[1, 3]$]

    [o. l. minimum $\frac{7}{27}$ v bodě $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$]

11. Určete největší a nejmenší hodnotu (globální extrémy) funkce f na dané množině M.

a) $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$; $M = \{[x, y] \in R^2; x \geq 0, y \geq 0, y \leq 9 - x\}$

[glob. max. 4 v bodě $[1, 1]$]

[glob. min. -61 v bodech $[9, 0]$ a $[0, 9]$]

b) $f(x, y) = 3xy$; $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 \leq 2\}$

[glob. max. 3 v bodech $[1, 1]$ a $[-1, -1]$]

[glob. min. -3 v bodech $[-1, 1]$ a $[1, -1]$]

Základní literatura:

[1] BÍLKOVÁ, A. *Matematika I*. Praha: SPN, 1980. 382 stran. ISBN 17-536-80 (skripta)

[2] BRABEC, J., HRŮZA, B *Matematická analýza II.* SNTL Praha, 1986. 580 stran. ISBN 04-017-86

[3] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. 459 stran. ISBN 80-7200-587-1

[4] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2)*. Ekopress Praha, 1997. 373 stran. ISBN 80-86119-01-7

[5] KARÁSEK, J. *Matematika II.* Brno: VUT, 2002. 242 stran. ISBN 80-214-9092-8 (skripta)

[6] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza II.* UP Olomouc, 2005. 134 stran. ISBN 80-244-1005-2 (skripta)

Kapitola 10

Implicitní funkce

Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozhodnout, zda rovnicí $F(x,y) = 0$ je definována funkce y proměnné x
- derivovat implicitní funkci
- určovat extrémy implicitní funkce
- určovat rovnice tečny a normály

Klíčová slova:

implicitní funkce

V předchozím textu jsme již zmínili, že funkci můžeme zadat analyticky, a to buď explicitně rovnicí $y = f(x)$ nebo implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$. Známe řadu křivek, které jsou zadány rovnicí $F(x,y) = 0$: kružnice, elipsa, kardioida apod.

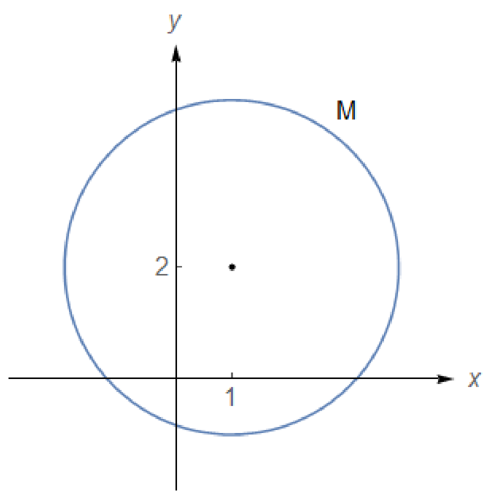
Příklad Kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r je daná rovnicí $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Kružnice však není grafem funkce, poněvadž každému $x \in \langle -r, r \rangle$ není přiřazeno jenom jedno y.

Příklad Mějme dánu funkci dvou proměnných $F(x,y)$ a ptejme se, které body $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ vyhovují rovnici $F(x,y) = 0$.

a) $F(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$
b) $F(x,y) = 2y - 3x$
c) $F(x,y) = x^2 + y^2 + 1$
d) $F(x,y) = xy - 1$
e) $F(x,y) = \sqrt{y^2 - 2xy + x^2} - y + x$

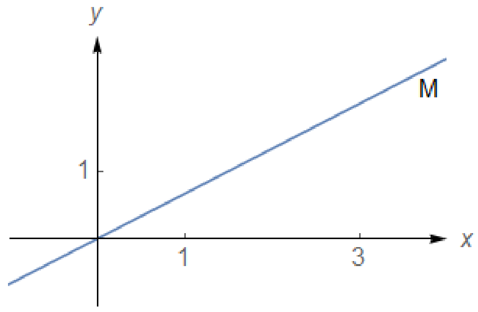
Řešení Označme M množinu všech bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, které vyhovují rovnici $F(x,y) = 0$.

a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$
M je množina všech bodů kružnice se středem v bodě $S[1;2]$ a poloměrem $r = 3$.



Obrázek 10.1 Množina M, kružnice

b) $2y - 3x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$
M je množina všech bodů přímky, která prochází počátkem soustavy souřadnic a má rovnici $y = \frac{2}{3}x$.



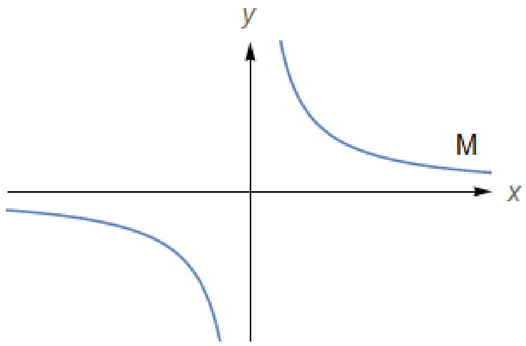
Obrázek 10.2 Množina M, přímka

c) $x^2 + y^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = -1$

$$\mathrm{M} = \emptyset$$

d) $xy - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

M je množina všech bodů hyperboly se středem $S = [0,0]$.

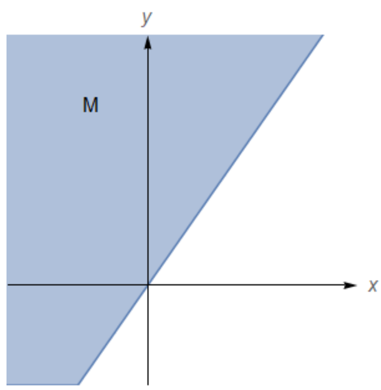


Obrázek 10.3 Množina M, hyperbola

e) $\sqrt{y^2 - 2xy + x^2} - y + x = 0 \Rightarrow \sqrt{(y-x)^2} = y - x \Rightarrow |y - x| = y - x$

Množina M je polorovina s hraniční přímkou $y = x$.

Jen v případě, že $y - x \geq 0$ platí $|y - x| = y - x$.



Obrázek 10.4 Množina M, polorovina

Uvedené příklady dokládají, že množina M může být velmi různorodá. Pouze v některých případech je množina M křivkou (a, b, d) a pouze v některých případech je grafem funkce (b a d).

Nabízí se otázka, kdy je množina M grafem nějaké funkce, tj. kdy je možné najít takovou spojitou funkci f, aby všechny body množiny M byly právě ty body $[x, y]$, které vyhovují rovnici $y = f(x)$.

Přechod od explicitního tvaru k implicitnímu tvaru dané funkce je jednoduchý – stačí anulovat pravou stranu funkčního předpisu. Opačný přechod – od implicitního k explicitnímu tvaru je často složitý a někdy dokonce nemožný.

Bude nás tedy především zajímat kdy rovnice $F(x, y) = 0$ definuje jednoznačně funkci f jedné reálné proměnné x a jaké má funkce f vlastnosti, např. je-li spojitá, jak se vypočítá její derivace atd. Obecně jde o to, zda rovnicí $F(x, y) = 0$ je určena nějaká funkce $y = f(x)$ a nikoli o to, zda ji umíme explicitně vyjádřit.

Odpovědi dává následující věta.

Věta 10.1 (O existenci implicitní funkce.)

Má-li funkce $F(x, y)$

1. *spojité parciální derivace F'_x a F'_y v okolí bodu $[x_0, y_0]$,*
2. *je-li $F(x_0, y_0) = 0$,*
3. *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,*

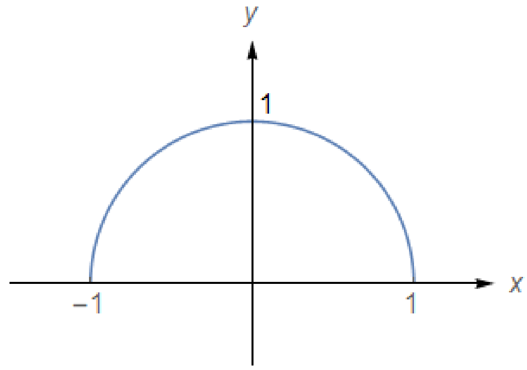
pak existuje okolí $U_\delta(x_0)$ a právě jedna spojitá funkce $y = f(x)$ taková, že platí:

(a) $f(x_0) = y_0$,
(b) $F[x, f(x)] = 0$ pro každé $x \in U_\delta(x_0)$,
(c) $f'(x) = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ pro každé $x \in U_\delta(x_0)$.

Definice 10.1 Funkci $y = f(x)$ (z věty 10.1), která je řešením rovnice $F(x, y) = 0$ nazýváme funkcí definovanou implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ nebo stručně **implicitní funkcí**.

Příklad Zadání funkce f:

- implicitní: $x^2 + y^2 - 1 = 0, y \geq 0$
- explicitní: $y = \sqrt{1 - x^2}$



Obrázek 10.5 Funkce f, kladná část kružnice

Příklad Zjistěme, zda rovnice $\sin^2 y - 3 + \cos x = 0$ definuje y jako funkci proměnné x.

Řešení Ověříme, zda jsou splněny předpoklady věty 10.1.

Zřejmě $F(x,y) = \sin^2 y - 3 + \cos x$.

1) Vypočteme $F'_x = -\sin x$ a $F'_y = 2\sin y \cos y = \sin 2y$.
   Obě parciální derivace jsou spojité na $\mathbb{R}^2$.
   Dále by měl existovat bod $[x_0, y_0]$, pro nějž by platilo $F(x_0, y_0) = 0$, ale $F(x,y) = \sin^2 y - 3 + \cos x \neq 0$ vždy, poněvadž $|\sin^2 y| \leq 1$ a $|\cos x| \leq 1$.
   Neexistuje žádný bod v rovině $\mathbb{R}^2$, na jehož okolí by daná rovnice definovala y jako funkci proměnné x.

Příklad Zjistěme, zda rovnice $y^2 - 2x^3y + x^6 - x^4 + x^2 = 0$ určuje na okolí $U_\delta(0,0)$ y jako funkci proměnné x.

Řešení Ověříme, zda jsou splněny předpoklady věty 10.1.

1) $F'_x = -6x^2y + 6x^5 - 4x^3 + 2x$
   $F'_y = 2y - 2x^3$
   Obě parciální derivace jsou spojité na $\mathbb{R}^2$.

2) $F(0,0) = 0 - 2 \cdot 0 + 0 - 0 + 0 = 0$
3) Ale $F'_y(0,0) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0^3 = 0$; má být $F'_y \neq 0$

Daná rovnice nedefinuje na žádném okolí bodu $[0,0]$ y jako funkci x.

Skutečně: Když vyjádříme z dané rovnice y, pak obdržíme $y = x^3 \pm |x|\sqrt{x^2 - 1}$ a tato funkce je definovaná pro $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

Příklad Rozhodněme, zda rovnice $F(x,y)=xe^y+ye^x-1=0$ definuje funkci $y=f(x)$ na okolí bodu $[1,0]$.

Řešení Ověříme předpoklady věty 10.1.

1) $\left.\begin{matrix} F'_x = e^y + ye^x \\ F'_y = xe^y + e^x \end{matrix}\right\}$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$
2) $F(1,0) = 1\cdot e^0 + 0\cdot e^1 - 1 \Rightarrow 1-1=0$
3) $F'_y(1,0) = 1\cdot e^0 + e^1 \Rightarrow 1+e \neq 0$

Na okolí bodu $[1,0]$ daná rovnice definuje spojitou funkci $y=f(x)$. Derivace této funkce je

$$f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^y+ye^x}{xe^y+e^x}$$

Příklad Vypočítejme derivace f' a f'' funkce $y=f(x)$, která je definována implicitně rovnicí $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, x, y \neq 0.$

Řešení Převedeme rovnici na tvar $F(x,y)=0$ a určíme f' podle vzorce uvedeného ve větě 10.1.

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$$

$$F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$F'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$F'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

$$f'(x) = -\frac{F'x}{Fy} = -\frac{\frac{x+y}{x^2+y^2}}{\frac{y-x}{x^2+y^2}} = \frac{x+y}{x-y}, y \neq x$$

Derivaci f' jsme mohli spočítat i přímo, bez použití vzorce. Derivujeme rovnici podle x za předpokladu, že y je funkcí x, kterou explicitně neznáme. Funkci y derivujeme jako funkcí složenou; vnitřní složka není konkrétně vyjádřena, proto derivace vnitřní složky zůstane jen naznačena, tj. y'.

$\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ |derivujeme podle x

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-y\cdot 1}{x^2}$$

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{y'x-y}{x^2+y^2} \quad /\cdot (x^2+y^2)$$

$$x+yy' = y'x-y$$

$$y'(y-x) = -y-x$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, y \neq x \quad (y' = f'(x))$$

Vzorce pro derivace vyšších řádů funkce určené implicitně jsou složité, proto vyšší derivace počítáme postupným derivováním, bez použití vzorců.

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{/ derivujeme podle } x, y \text{ je funkcí x}$$

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{x+xy'-y-yy'-x-y+xy'+yy'}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2}$$

Za y' dosadíme $\frac{x+y}{x-y}$.

$$y'' = \frac{2\left(x\frac{x+y}{x-y}-y\right)}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}, y \neq x$$

Příklad Napište rovnici tečny t a normály n ke křivce dané implicitně rovnicí $2x^2-xy+y^2-3x+2y=0$ v bodě $T=[0;y<0]$.

Řešení Vypočteme $y(0)$; do rovnice dosadíme $x=0$.

$$0-0+y^2-0+2y=0$$

$$y(y+2)=0$$

$$y=0, y=-2 \quad T=[0;-2]$$

$$T=[x_0, f(x_0)]$$

$$y' = -\frac{F'x}{F'y} = -\frac{4x-y-3}{-x+2y+2}$$

$$y'(0,-2) = -\frac{0+2-3}{0-4+2} = -\frac{1}{2}$$

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$
$$y = -\frac{1}{2}x - 2$$

$$n: y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$
$$y + 2 = 2(x - 0)$$
$$y = 2x - 2$$

Rovnice tečny $t: -\frac{1}{2}x - 2$; rovnice normály $n: y = 2x - 2$.

Příklad Určete lokální extrémy funkcí $\big(y = f(x)\big)$ definovaných implicitně rovnicí $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 4 = 0$.

Řešení Určíme y'.

$$y' = -\frac{F'x}{F'y} = -\frac{2x + 2}{-2y + 6} = \frac{x + 1}{3 - y},\ y \neq 3$$

Bod podezřelý z lokálního extrému získáme když $y' = 0$. (nutná podmínka pro extrém)

$$\frac{x + 1}{3 - y} = 0 \Rightarrow x = -1$$

Vypočteme druhou souřadnici dosazením $x = -1$ do rovnice funkce.

$$\begin{aligned} (-1)^2 - y^2 + 2 \cdot (-1) + 6y - 4 &= 0 \\ -y^2 + 6y - 5 &= 0 \\ y^2 - 6y + 5 &= 0 \\ (y - 1)(y - 5) &= 0 \\ y = 1, y &= 5 \end{aligned}$$

Určili jsme 2 stacionární body: $A = [-1{,}1]$ a $B = [-1{,}5]$.

Podle hodnoty y'' v bodech A a B rozhodneme o existenci a typu extrému.

Vypočteme y'' z y'.

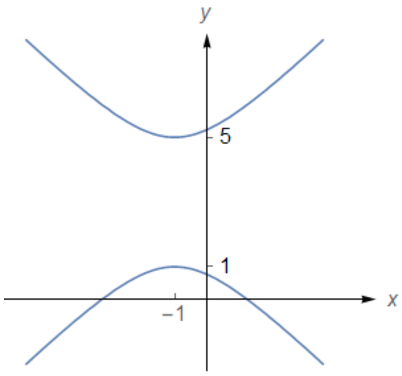
$$y' = \frac{x + 1}{y - 3} \quad \text{/zderivujeme}$$

$$y'' = \frac{y - 3 - (x + 1)y'}{(y - 3)^2}$$

$$y''(A) = \frac{1 - 3 - (-1 + 1) \cdot 0}{(1 - 3)^2} = \frac{-2}{(-2)^2} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \text{ostré lokální maximum}$$

$$y''(B) = \frac{5 - 3 - (-1 + 1) \cdot 0}{(5 - 3)^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{ostré lokální minimum}$$

Funkce f_1, resp. f_2, definovaná implicitně danou rovnicí a podmínkou $f_1(-1) = 1$, resp. $f_2(-1) = 5$, má v bodě -1 ostré lokální maximum 1, resp. ostré lokální minimum 5.



Obrázek 10.6 Graf funkcí f_1 a f_2

Σ

Vedle explicitního zadání funkce jedné proměnné existuje i možnost zadat funkci implicitně, tj. rovnicí $F(x, y) = 0$. Ne každá taková rovnice však definuje funkci $y = f(x)$. O existenci funkce f rozhodujeme podle podmínek uvedených ve větě o implicitní funkci. Tato věta také uvádí vzorec, jak derivovat implicitní funkci. Význam věty spočívá v tom, že jakmile známe jediný bod křivky $y = f(x)$, dovedeme v tomto bodě spočítat derivace.

Funkce dané implicitně studujeme pomocí derivací stejně jako funkce zadané explicitně: stanovujeme rovnici tečny a normály, určujeme extrémy apod.

?

1. Kdy mluvíme o implicitním zadání funkce?
2. Za jakých podmínek je rovnicí $F(x, y) = 0$ definována funkce $y = f(x)$?
3. Jak se počítají derivace implicitní funkce?

4.Zjistěte, zda rovnicí $ye^x - x\ln y - 1 = 0$ je určena funkce $y = f(x)$ na okolí bodu $P_0 = [0,1]$.

[ano]

5. Funkce $y = f(x)$ je dána implicitně rovnicí $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. Vypočtěte y' a y''.

$\left[y' = -\frac{y}{x}; y'' = \frac{2y}{x^2}\right]$

6. Funkce $y = f(x)$ je dána implicitně rovnicí $y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Určete y' a y''.

$\left[y' = \frac{y}{x}; y'' = 0\right]$

7. Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $(x^2+y^2)(y-1)^2-5y^2=0$ v bodě $C=[4,2]$.

$$\left[t: y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}; n: y=3x-10\right]$$

8. Určete lokální extrémy funkce $y=f(x)$ definované implicitně rovnicí.

a. $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$ [o. l. maximum 1 v bodě 1]

b. $x^2y^3+y-3=0$ [o. l. maximum 3 v bodě 0]

Základní literatura:

[1] BÍLKOVÁ, A. *Matematika I*. Praha: SPN, 1980. 382 stran. ISBN 17-536-80 (skripta)

[2] BRABEC, J., HRŮZA, B *Matematická analýza II.* SNTL Praha, 1986. 580 stran. ISBN 04-017-86

[3] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. 459 stran. ISBN 80-7200-587-1

[4] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2)*. Ekopress Praha, 1997. 373 stran. ISBN 80-86119-01-7

[5] KARÁSEK, J. *Matematika II.* Brno: VUT, 2002. 242 stran. ISBN 80-214-9092-8 (skripta)

[6] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza II.* UP Olomouc, 2005. 134 stran. ISBN 80-244-1005-2

Kapitola 11

Dvojný integrál

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat dvojný Riemannův interál
- převést dvojná integrál na dvojnásobný
- transformovat dvojný integrál do polárních souřadnic
- počítat geometrické aplikace dvojného integrálu

Klíčová slova:

Dvojný integrál, dvojnásobný integrál, Fubiniova věta, polární souřadnice

Dvojný integrál

Dvojný integrál zavedeme nejprve na dvojrozměrném uzavřeném intervalu $J \subset R^2$ formálně stejně, jako jsme zavedli Riemannův integrál funkce jedné proměnné na $\langle a,b \rangle$ (tedy jednorozměrný integrál.) Hodnota jednorozměrného integrálu je konstruována tak, že reprezentuje určitou plochu rovinného obrazce. Dvojný integrál pak odpovídá počítal objem jistého tělesa.

Integračním oborem jednorozměrného integrálu byl vždy interval. U dvourozměrného integrálu mohou být integrační obory rozmanitější: jednoduché (např. obdélník, čtverec), nebo složitější (např. kruh, kruhová výseč).

Postup, jakým budujeme dvojný integrál, lze aplikovat na případ trojného integrálu a dále i na případ n-rozměrného integrálu (pro každé $n \in N$).

Definice 11.1 Nechť jsou dány dva uzavřené intervaly, a to $\langle a,b \rangle$ na ose x a $\langle c,d \rangle$ na ose $\langle a,b \rangle$ y. Kartézský součin $\langle a,b \rangle \times \langle c,d \rangle$ nazveme **dvojrozměrným uzavřeným intervalem v** R^2 a označíme jej J.

Nechť posloupnost bodů $D_x = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$, resp. $D_y = \{b = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d\}$ je dělením intervalu $\langle a,b \rangle$, resp. $\langle c,d \rangle$. Potom uspořádanou dvojici $D = (D_x, D_y)$ nazveme **dělením intervalu** J.

Každý dvojrozměrný interval $J_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle$, kde i = 1,2,…,m, j =1,2,….,n, nazýváme **částečným intervalem dělení** J.

Maximum z čísel $v(D_x), v(D_y)$ označujeme $v(D)$ a nazveme ho **normou dělení** D. ($v(D_x)$ je normou dělení D_x - je to délka největšího částečného intervalu.)

Poznámka O tom, jak vypadá dělení, si můžeme udělat názornou představu. Vedeme-li dělícími body na osách x a y rovnoběžky se souřadnicovými osami, vznikne soustava obdélníků, které pokrývají uvažovaný dvojrozměrný interval J .

Uvažujme dělení D dvojrozměrného intervalu J na $m \cdot n$ částečných intervalů J_{ij}. Označme obsah (míru) intervalu J_{ij}. V našem případě míra $\mu(J_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$ se rovná obsahu obdélníka o stranách Δx_i a Δy_j.

Definice 11.2 Nechť f je funkce definovaná a omezená na intervalu $J=\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$ a nechť $D=(D_x,D_y)$ je dělením intervalu J (viz Def 11.1). Označme $m_{i,j}$,resp. $M_{i,j}$ infimum, resp. supremum funkce f na částečném intervalu $J_{ij}=\langle x_{i-1},x_i\rangle\times\langle y_{j-1},y_j\rangle$ a $\mu(J_{ij})$ obsah tohoto intervalu. Potom číslo

$s(f,D)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\mu(J_{ij})$ nazýváme **dolním součtem**, a číslo

$S(f,D)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\mu(J_{ij})$ **horním součtem funkce** f **na intervalu** J **při dělení** D.

Poznámka

- Omezenost funkce f na uzavřeném intervalu J nám zaručuje existenci suprema a infima funkce f na J_{ij}.
- V případě, že $f(x)>0$ na J, mají tyto součty následující geometrický význam:
  součin $m_{ij}\mu(J_{ij})$ je objem kvádru vepsaného ploše,
  součin $M_{ij}\mu(J_{ij})$ je objem kvádru opsaného ploše,
  součet $s(f,D)$je součtem objemů kvádrů vepsaných a součet $S(f,D)$ je součtem objemů kvádrů opsaných ploše $z=f(x,y)$.

Zřejmě platí vztah

(11.1) $$m\mu(J)\le s(f,D)\le S(f,D)\le M\mu(J),$$

kde $m=\inf\limits_{(x,y)\in J}f(x,y)$ a $M=\sup\limits_{(x,y)\in J}f(x,y)$.

Tím že množina všech dolních a horních součtů funkce f je omezená, má každá z uvažovaných množin své supremum a infimum.

Jednomu dělení intervalu J přísluší jeden dolní a jeden horní součet. Interval J můžeme rozdělit nekonečně mnoha způsoby. Uvažujme nyní všechna možná dělení D_n intervalu J. Dostaneme množinu příslušných dolních a příslušných horních součtů. Podle (11.1) mají tyto množiny supremum i infimum.

Definice 11.3 Číslo $\underline{\iint_J} f(x,y)dxdy=\sup\limits_{D_n}s(f,D_n)$ nazveme **dolním Riemannovým integrálem** a číslo $\overline{\iint_J} f(x,y)dxdy=\inf\limits_{D_n}S(f,D_n)$ **horním Riemannovým integrálem funkce** f **na intervalu** J.

Jestliže se obě tato čísla sobě rovnají, říkáme, že funkce f je (riemannovsky) integrovatelná na intervalu J. Pro obě tato čísla pak užíváme společné označení $\iint_J f(x,y)dxdy$ a toto číslo nazýváme **dvojným Riemannovým integrálem funkce f na intervalu** J.

Poznámka

- Z předpokladu omezenosti funkce f na intervalu J vyplývá, že horní a dolní součet, horní a dolní integrál a dvojný integrál funkce f na intervalu J jsou vlastně čísla.
- Pro dvojný integrál se také používá značení $\int_J f(x,y)dxdy$, přičemž podle dvojrozměrného intervalu J usoudíme, že jde o integrál dvojný.

Věta 11.1 *(O integrovatelnosti funkce.) Je-li funkce f spojitá na intervalu $J \subset R^2$, je na tomto intervalu integrovatelná (integrabilní) podle Riemanna. Píšeme pak* $f \in \mathrm{R}(J)$.

Definice 11.3 Funkce je skoro všude spojitá, pokud má konečný počet bodů nespojitosti nebo všechny její body nespojitosti leží na jednom nebo na více, avšak pouze na konečně mnoha, grafech spojitých funkcí.

Věta 11.2 *(O integrovatelnosti funkce.) Je-li funkce f omezená a skoro všude spojitá na intervalu $J \subset R^2$, pak je na tomto intervalu riemannovsky integrovatelná.*

Pro dvojný R-integrál platí věty analogické větám pro jednorozměrný Riemannův integrál.

Věta 11.3 *(vlastnosti riemannovsky integrovatelných funkcí) Nechť funkce $f, g \in \mathrm{R}(J)$ (jsou riemannovsky integrovatelné na J), $c \in R$, $f(x,y) \le g(x,y)$ pro $\forall (x,y) \in J$, pak*

1. $f+g \in \mathrm{R}(J)$ *a platí*

$$\iint_J f(x,y)+g(x,y)dxdy = \iint_J f(x,y)dxdy + \iint_J g(x,y)dxdy \quad \textit{(tzv. linearita integrálu)}$$

2. $c \cdot f \in \mathrm{R}(J)$ *a platí*

$$\iint_J c \cdot f(x,y)dxdy = c \cdot \iint_J f(x,y)dxdy$$

3. $f \cdot g \in \mathrm{R}(J)$

4. $\iint_J f(x,y)dxdy \le \iint_J g(x,y)dxdy$ *(tzv. monotonie integrálu)*

5. $|f| \in \mathrm{R}(J)$ *a platí*

$$\left|\iint_J f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_J |f(x,y)|\,dxdy$$

6. *Je-li pro* $\forall$ *bod* $(x,y) \in J$ *a* $A \le f(x,y) \le B$ *(konstanty* $A, B \in R$ *), pak platí*

$$A\,\mu(J) \le \iint_J f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le B\mu(J)$$

7. *(aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru) Jsou-li* $J_1, J_2 \subset R^2$ *dva uzavřené intervaly, které vznikly rozdělením intervalu* J *úsečkou rovnoběžnou s osou* x *resp.* y*, pak* $f \in \mathrm{R}(J_1)$, $f \in \mathrm{R}(J_2)$ *a platí*

$$\iint_J f(x,y)\,dxdy = \iint_{J_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{J_2} f(x,y)\,dxdy$$

Poznámky

- Tvrzení 1. a 2. Věty 11.3 lze zobecnit (na konečný počet funkcí)

  $$\iint_J (C_1 f_1 + C_2 f_2 + \dots\dots + C_n f_n)\,dxdy = C_1\iint_J f_1 dxdy + C_2\iint_J f_2 dxdy + \dots . C_n\iint_J f_n dxdy$$

- Zvolme $f(x,y) \equiv 1$ pro $\forall (x,y) \in J$. Potom obsah J

  $$\mu(J) = \iint_J f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_J \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

- Tvrzení 7. Věty 11.3 lze rozšířit na konečný počet podmnožin J_i (podintervalů J_i), $J_i \subset R^2$, $i = 1,2,\dots,n$

  $$\iint_J f(x,y)dxdy = \iint_{J_1} f(x,y)dxdy + \iint_{J_2} f(x,y)dxdy + \dots + \iint_{J_n} f(x,y)dxdy$$

- $\iint_J 0\,dxdy = 0$

Výpočet dvojného integrálu postupnými integracemi – dvojnásobný integrál

Výpočet dvojného integrálu se převádí na výpočet dvou jednorozměrných integrálů. V následujícím výkladu se dozvíme, jak se prakticky počítá dvojný integrál. Začneme nejjednodušším příkladem, kdy integračním oborem je dvojrozměrný interval.

Věta 11.4 *(Fubiniova) Nechť* f *je spojitá na uzavřeném intervalu* $J = \langle a,b \rangle \times \langle c,d \rangle$. *Potom platí*

$$\iint_J f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

Poznámka Integrály na pravé straně vzorce se vzhledem k dvojí integraci nazývají **dvojnásobné integrály**. Často se pro ně užívá i tento zápis:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy, \text{ resp. } \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Fubiniova věty říká, jak lze dvojný integrál převést na dvojnásobný.

Při výpočtu dvojnásobného integrálu integrujeme nejprve podle jedné proměnné (např. y) při konstantní druhé proměnné (x) a výsledek integrujeme podle této druhé proměnné. Obě pořadí integrováni jsou ekvivalentní, pokud jde o výsledek. Mohou se však lišit pracností výpočtu a může se také stát, že při jednom z obou možných pořadí dospějeme k integrálu, který neumíme vypočítat. Tzn., že volba integračního pořadí může hrát zásadní roli.

Poznámka (Geometrická interpretace věty 11.4.) Předpokládejme, že f je spojitá a kladná na J. Při pevném x dává integrál $\int_c^d f(x,y)\,dy = F(x)$ (integruje se jen podle y a výsledek závisí na x) obsah řezu tělesa rovinou x = konstanta (viz obrázek). Při malém Δx představuje $\Delta x \cdot F(x)$ neboli $\Delta x \cdot \int_c^d f(x,y)\,dy$ objem malé vrstvy uvažovaného tělesa. Výsledek (tj. $f(x)$) potom integrujeme podle x od a do b a získáme objem tělesa, jehož podstava je J, stěny jsou části roviny $x = a, x = b, y = c, y = d$ a horní podstava je část plochy $z = f(x,y)$.

K témuž výsledku dospějeme, rozřežeme-li těleso na vrstvy rovinami y = konstanta.

V obou případech platí, že hodnota „vnitřního“ integrálu může záviset té druhé proměnné.

Příklad Spočítejte dvojný integrál $\int_Q \int (x+y)\,dxdy$ přes obdélník $Q = \langle 1,3 \rangle \times \langle 1,2 \rangle$.

Řešení: Integrál spočteme podle Věty 11.4.

$$\iint_Q (x+y)\,dxdy = \int_1^3 \left(\int_1^2 (x+y)\,dy \right) dx = \int_1^3 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx = \int_1^3 \left(2x + 2 - x - \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$\int_1^3 \left(x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_1^3 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 7$$

Dvojný integrál přes měřitelné množiny

V praxi většinou potřebujeme integrovat přes množiny obecnějšího tvaru, než jsou uzavřené obdélníky. I v tomto případě převádíme dvojný integrál na dvojnásobný, s tím rozdílem, že meze nebudou konstanty.

Jako integrační obory dvojných integrálů budeme připouštět pouze měřitelné množiny, neboť většinou se v aplikacích setkáme s dvojnými integrály spojitých funkcí na měřitelných množinách. Pojem míry je zobecněním pojmu obsahu rovinného obrazce (v R^2) resp. pojmu objemu tělesa (v R^3). Vlastně všechny geometrické útvary, jejichž obsah, resp. objem známe z elementární geometrie jsou měřitelné a jejich míra je rovna jejich obsahu, resp. objemu.

Věta 11.5 Omezená **množina** $M \subset R^2$ je **měřitelná** (v R^2), právě když její hranice je tvořena grafy spojitých funkcí jedné proměnné definovaných na uzavřeném intervalu.

Poznámka Nejdůležitější z měřitelných množin jsou množiny těchto tří typů (s nimi v praktických případech vystačíme)

- **Elementární obor vzhledem k** x je množina $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in \langle a, b\rangle \wedge f(x) \le y \le g(x)\}$, kde f a g jsou funkce jedné proměnné definované a spojité na $\langle a, b\rangle$, přičemž pro každé $x \in (a, b)$ je $f(x) < g(x)$.
- **Elementární obor vzhledem k** y je množina $M = \{(x, y) \in R^2 \mid y \in \langle c, d\rangle \wedge \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$, kde φ a ψ jsou funkce jedné proměnné definované a spojité na $\langle c, d\rangle$, přičemž pro každé $y \in \langle c, d\rangle$ je $\varphi(y) < \psi(y)$.
- **Elementární obor** je uzavřená množina, kterou lze vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha elementárních oborů vzhledem k x či y, které se navzájem nepřekrývají.

Příklad Na následujícím obrázku je nakreslen obor, který je elementární vzhledem k ose y i vzhledem k ose x. Je patrné, že máme více možností jakým způsobem integrační obor vymezit.

Poznámka V některých učebnicích se místo pojmu elementární používá pojem normální nebo regulární a místo obor se používá oblast nebo, množina.

Věta 11.6 *(Fubiniova věta pro dvojný integrál přes obecnou měřitelnou množinu.) Nechť funkce* f *je spojitá na uzavřeném elementárním oboru* D *vzhledem k* x *(*$a \le x \le b, h(x) \le y \le g(x)$*). Potom*

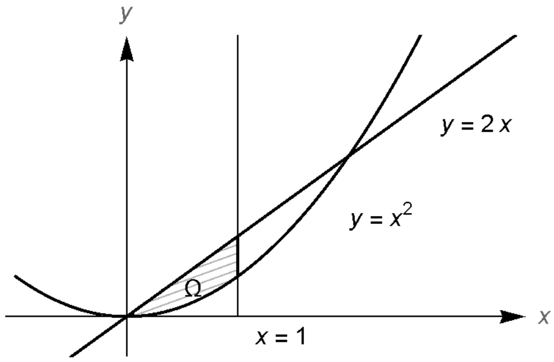
$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y)\,dy\right] dx$$

Věta 11.7 *(Fubiniova věta pro dvojný integrál přes obecnou měřitelnou množinu.) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném elementárním oboru D vzhledem k y ($c \le y \le d, \varphi(y) \le x \le \psi(y)$). Pak*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Příklad Spočítejte dvojný integrál $\iint_\Omega xy^2\,dxdy$, pro Ω: $0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 2x$.

Řešení: Podle obrázku Obr. 11.1 určíme meze oblasti Ω. Hodnotu integrálu spočteme podle Fubiniovy věty 11.6.



Obrázek 11.1 Oblast Ω

$$\iint_\Omega xy^2\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2x} xy^2\,dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^1 \frac{x}{3}(8x^3 - x^6)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[8\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{59}{120}.$$

Poznámka Pořadí integrace na elementárním oboru je třeba volit tak, aby meze v posledním integrálu byly konstanty.

Pro výpočet je důležité správné určení mezí.

Příklad Když A je trojúhelník o vrcholech (0,0), (0,1), (1,0), stanovte meze pro integraci přes obor A.

Řešení Postupujeme následovně:

a) Buď x je pevné, pak $A: x \in \langle 0,1 \rangle, y \in \langle 0, 1-x \rangle$,

b) nebo y je pevné, pak $A: y \in \langle 0,1 \rangle, x \in \langle 0, 1-y \rangle$.

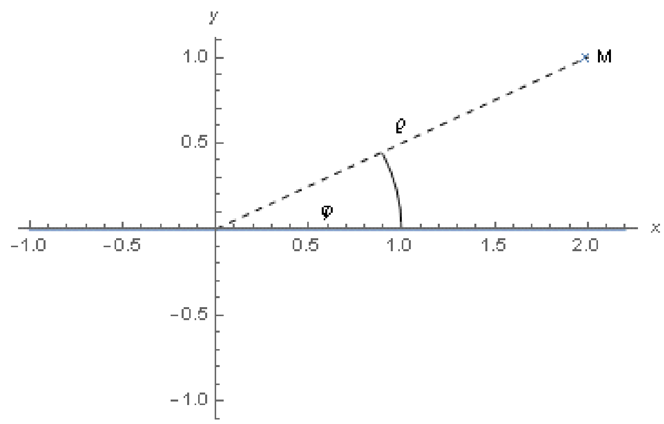
V žádném případě se nemůže jednat o kartézský součin intervalů $A: y \in \langle 0{,}1\rangle, x \in \langle 0{,}1-y\rangle$, který představuje čtverec a ne trojúhelník. To znamená, že jakmile vypadá integrál takto $\int_a^b dx \int_c^d f dy$, jde o čtverec nebo obdélník.

Transformace do polárních souřadnic

Věta 11.8 *(Substituce ve dvojném integrálu) Nechť* $\Omega^* \subset R^2$ *je otevřená, měřitelná množina, funkce* $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$ *určují prosté regulární zobrazení* $\Phi : \Omega^* \xrightarrow{na} \Omega \subset R^2$, *kterému přísluší Jacobiova matice* $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$, *funkce* $f : \Omega \to R$ *je na* Ω *spojitá. Pak*

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega^*} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))\ |\mathrm{det J}|\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta.$$

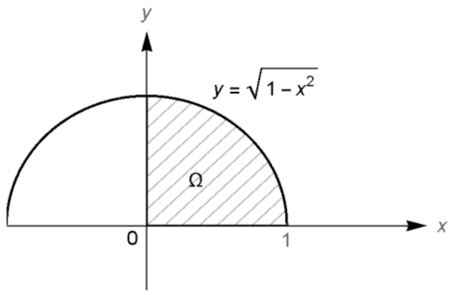
Poznámka V rovině je možné provádět transformaci do polárních souřadnic, která má tvar $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,$ kde $0 \le \rho,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$ Jacobián $J = \rho.$ (Viz Obr. 11.2)



Obrázek 11.2 Polární souřadnice

Příklad Pomocí transformace do polárních souřadnic spočítejte $\iint_{\Omega} y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, kde $\Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

Řešení: Položíme $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$; Jakobián $J = \rho$. Na základě obrázku určíme, že proměnná $\rho \in \langle 0{,}1\rangle$ a $\varphi = \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Hodnotu integrálu spočteme podle Věty 11.8.



Obrázek 11.3 Oblast Ω

$$\iint_{\Omega} y\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\,\sin\varphi\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}\cdot\rho d\varphi\right)d\rho = \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^3\,\sin\varphi d\varphi\right)d\rho =$$
$$\int_0^1\rho^3\,[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}d\rho = \int_0^1\rho^3\,d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

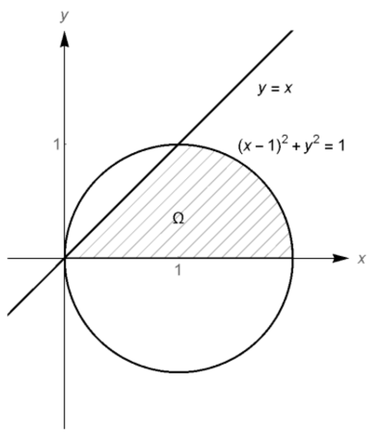
Geometrické aplikace dvojného integrálu

Pomocí dvojného integrálu můžeme spočítat

- **Obsah P plochy rovinného uzavřeného obrazce** $M \subset R^2$ (M je například obdélník, čtverec, elementární obor) je $P(M) = \iint\limits_M dxdy.$

Příklad Spočítejte míru rovinné oblasti $\Omega: x^2+y^2=2x, y=0, y=x.$

Řešení: Oblast je omezená kružnicí se středem $S=(1{,}0)$, osou 1. a 3. kvadrantu a osou x (viz Obr. 11.4).



Obrázek 11.4 Oblast Ω

$$\mu = \iint_{\Omega} dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} d\varphi \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\varphi d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi) d\varphi = \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

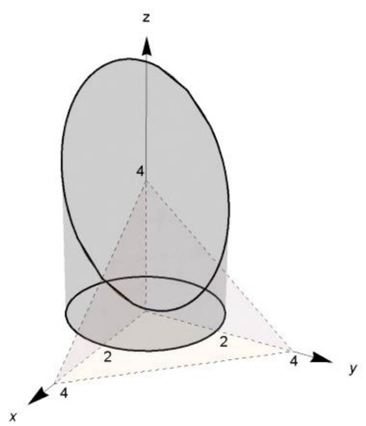
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

- **Objem V válcového tělesa** T. Nechť $M \subset R^2$ a f spojitá nezáporná funkce definovaná na M. Potom válcové těleso $T = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in M \wedge 0 \le z \le f(x, y)\}$ má objem $V(T) = \iint_M f(x, y) dxdy.$

  Příslušné těleso T je ohraničené shora plochou $y = f(x.y),$ zdola rovinou $z = 0$ a ze stran válcovou plochou, jejímž kolmým průmětem do roviny xy je plocha M.

Příklad Spočítejte objem přímého válce $x^2 + y^2 = 4$, omezeného rovinami $x + y + z = 4, z = 0$.

Řešení Na obrázku Obr. 11.4 je znázorněno těleso, jehož objem máme spočítat.



Obrázek 11.5 Oblast Ω

$$V = \iint_{\Omega} (\varphi - x - y)\, dxdy = \int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{\varphi - x^2}}^{\sqrt{\varphi - x^2}} (\varphi - x - y)\, dy \right) dx = \int_{-2}^{2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{\varphi - x^2}}^{\sqrt{\varphi - x^2}} dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (8\sqrt{\varphi - x^2} - 2x\sqrt{\varphi - x^2})\, dx = 8\int_{-2}^{2} \sqrt{\varphi - x^2}\, dx - 2\int_{-2}^{2} x\sqrt{\varphi - x^2} dx\ .$$

V dalším výpočtu využijeme toho, že integrovaná funkce v 1. integrálu je sudá a integrovaná funkce ve 2. integrálu je lichá (tzn. 2. intergrál=0).

$$V = 8 \cdot 2 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} = \left| \begin{array}{r} \text{subst.} \qquad x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \\ x = 0 \to t = \arcsin 0 = 0 \\ x = 2 \to t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt =$$

$$16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,(1 + \cos 2t) dt = 32 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\pi$$

Σ

Dvojný Riemannův integrál je zobecněním integrálu jednorozměrného definovaného na přímce, na integrál definovaný v rovině. Konstruuje se obdobně jako jednorozměrný: Integrovanou oblast aproximujeme sjednocením disjunktních obdélníků. Pro zvolené dělení určíme horní a dolní součty. Zvolené dělení postupně zjemňujeme. Když provedeme limitní přechod a limity horních a dolních součtů se rovnají, říkáme, že funkce je Riemannovsky integrovatelná v R^2.

Dvojné integrály se řeší převodem na integrály dvojnásobné. Eventuelně se ke zjednodušení integrace využívá transformace do polárních souřadnic.

?

1. Jaký je geometrický význam dvojného integrálu?
2. Jak se převede dvojný integrál na dvojnásobný?
3. Napište tvar transformace do polárních souřadnic.
4. Spočítejte $\iint_\Omega dx\,dy$, když $\Omega: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 4$.
   [Výsledek: 5π.]

Základní literatura:

[1] DRÁBEK, P., MÍKA, S. *Matematická analýza II*, 4. vyd. Plzeň, ZČU Plzeň, 2003. 269 stran. ISBN 80-7082-977-X

[2]DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy,* 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[3] M0ŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II*. 1.vyd, UP Olomouc 2005. 134 stran. ISBN 80-244-1005.

Kapitola 12

Trojný integrál

Po prostudování kapitoly budete umět:

- vysvětlit, jak byl odvozen Riemannův trojrozměrný integrál
- převést trojný integrál na trojnásobný
- aplikovat trojný integrál na praktické úlohy

Klíčová slova:

Trojný integrál, trojnásobný integrál, Fubiniova věta, transformace do cylindrických a sférických souřadnic

Definice trojného Riemannova integrálu

Odvození trojrozměrného Riemannova integrálu je obdobné jako u integrálu jednorozměrného a dvojrozměrného. Tentokrát se ale integruje přes integrační obor $\Omega \subset R^3$ a integrandem je obecně funkce tří proměnných. Integrál se pak definuje jako společná limita posloupnosti dolních a horních součtů pro zjemňující se dělení. Popřípadě je také možné definovat integrál jako limitu integrálních součtů pro zjemňující se dělení.

Definujme nyní trojný integrál

$$u = f(x, y, z) \text{ - omezená funkce na } Q = < a, b > \times < c, d > \times < p, q >$$

$$a \le x_0 < \ldots < x_n \le b, c \le y_0 < \ldots < y_m \le d,\ p \le z_0 < \ldots < z_r \le q$$

$$D: \left\{ Q_{ijk} = \left\langle x_{i-!}, x_i \right\rangle \times \left\langle y_{j-!}, y_j \right\rangle \times \left\langle z_{k-1}, z_k \right\rangle \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, r \right\}$$

$$\nu(D) = \max_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \\ 1 \le k \le r}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}$$

$$\xi_{ijk} = (\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) \in Q_{ijk}, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, r$$

$$\Xi = \left\{ \xi_{ijk} : i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, r \right\}$$

$$G(D, f, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} f(\xi_{ijk})(x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \cdot (z_k - z_{k-1})$$

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \lim_{\nu(D) \to 0} G(D_k, f, \Xi_k)$$

Výpočet trojného integrálu

Věta 12.1 (Integrace přes hranol) Nechť funkce $u = f(x, y.z)$ je na hranolu Q riemannovsky integrovatelná, pak $\iiint_Q f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_p^q f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

Příklad Spočítejte $\iiint\limits_{Q}(2x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \ Q: 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3.$

Řešení

$$\iiint_Q (2x-y+z)\,dxdydz = \int_0^1\left(\int_1^2\left[(2x-y)z+\frac{z^2}{2}\right]_0^3 dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_1^2\left(3(2x-y)\frac{9}{2}\right)dy\right)dx =$$

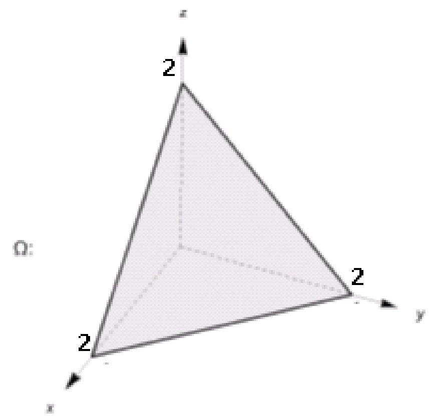
$$= \int_0^1\left(3\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^2+\frac{9}{2}[y]_1^2\right)dx = \int_0^1\left(3\left(2x-\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{2}\right)dx = \int_0^1 6\,xdx = 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 3.$$

Věta 12.2 (Fubiniova – integrace přes normální oblast) Nechť funkce $f\in R(\Omega)$ je na oblasti $\Omega=\{(x,y,z)\in R^3:(x,y)\in G,\, z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$, kde G označuje průmět Ω do roviny x, y, a existuje $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$ pro $\forall(x,y)\in G$, pak existuje také trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{G}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Příklad Spočítejte $\iiint\limits_{\Omega}(x+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \ \Omega: x+y+z=2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

Řešení Oblast Ω tvoří čtyřstěn (viz obrázek Obr. 12.1). Můžeme se na ní dívat jako na oblast normální vzhledem k ose x, která je vymezena nerovnostmi $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x,\ 0\le z\le 2-x-y.$ Zadaný trojný integrál pomocí Věty 12.2 převedeme na trojnásobný a spočteme.



Obrázek 12.1 Oblast Ω

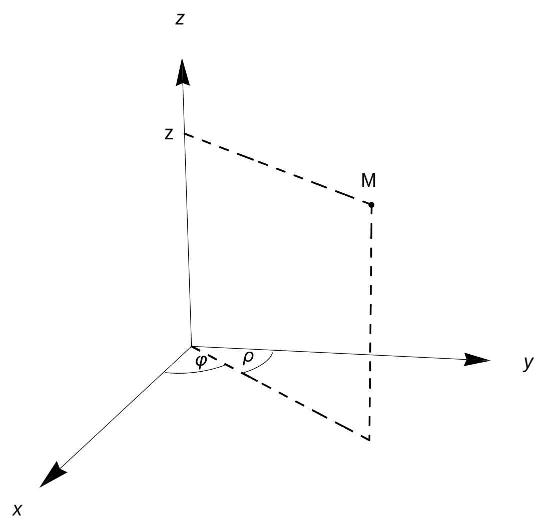
$\iiint_\Omega (x+y^2)\,dxdydz = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\int_0^{2-x-y} (x+y)^2\,dz\right) dy\right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} [xz + y^2 z]_0^{2-x-y}\,dy\right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (2x - x^2 - xy + 2y^2 - xy^2 - y^3)\,dy\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{12}(2-x)^4\right) dx = \begin{vmatrix} 2-x=t \\ -dx=dt \\ x=0 \to t=2 \\ x=2 \to t=0 \end{vmatrix} = -\int_2^0 \left(\frac{1}{2}(2-t)t^2 - \frac{1}{12}t^4\right) dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{t^4}{4}\right]_0^2 - \frac{1}{12}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^2 = \frac{2}{15}$.

Věta 12.3 (Substituce v trojném integrálu) Nechť $\Omega^* \subset R^3$ je otevřená měřitelná množina, funkce $x = x(\xi,\eta,\varsigma),\ y = y(\xi,\eta,\varsigma),\ z = z(\xi,\eta,\varsigma)$ určují prosté regulární zobrazení $\Phi : \Omega^* \to \text{na}\ \Omega \subset R^3$ a funkce $f : \Omega \to R$ je na Ω spojitá, pak

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} f(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta))\ |\det J|\ \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta,$$

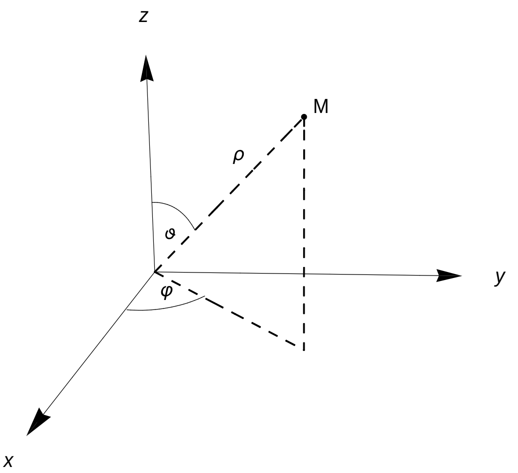
kde $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$ je Jacobiova matice transformace Φ.

Poznámka Transformace do cylindrických souřadnic má tvar $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z,$ kde $0 \le \rho,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ z \in R.$ Jacobián $J = \rho.$ (Viz Obr. 12.2)



Obrázek 12.2 Cylindrické souřadnice

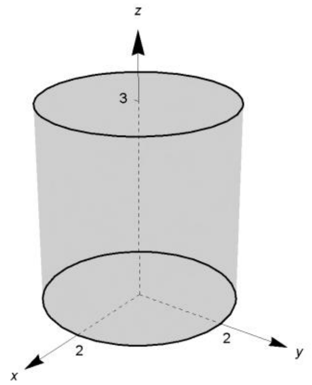
a transformace do sférických souřadnic $x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta,\ \ z = \rho\sin\vartheta,$ kde $0 \le \rho,$ $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$ Jacobián $J = \rho^2 \sin\vartheta.$



Obrázek 12.3 Sférické souřadnice

Příklad Spočítejte $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \ \Omega : x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3$

Řešení Oblast, přes kterou se integruje je válec (viz Obr. 12.4). Bude výhodné provést transformaci do cylindrických souřadnic $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z,$ kde $0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 3.$ Jacobián $J = \rho.$



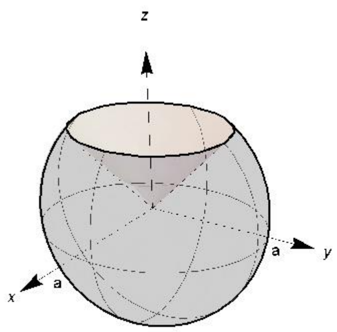
Obrázek 12.4 Oblast Ω

$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \rho^2\, dz\right) d\varphi\right) d\rho = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} [\rho^2 z]_0^3\, d\varphi\right) d\rho =$

$\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} 3\rho^2\, d\varphi\right) d\rho = \int_0^2 3\,\rho^2 [\varphi]_0^{2\pi} d\rho = \int_0^2 3\cdot 2\pi\rho^2 d\rho = 6\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 = 16\pi.$

Příklad Spočítejte $\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \ \Omega: x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ \ \sqrt{x^2+y^2} \le z,\ \ a>0.$

Řešení Oblast, přes kterou se integruje, tvoří koule se středem v počátku a poloměrem a, ze které je odstraněn vnitřek kuželu, který má vrchol v počátku jeho průnik s kulovou plochou je kružnice $x^2+y^2=a^2/2$ na ploše $z=a^2/\sqrt{2}$ (viz Obr. 12.5).



Obrázek 12.5 Oblast Ω

Integrál transformujeme do sférických souřadnic $x=\rho\cos\varphi\sin\vartheta,\ \ y=\rho\sin\varphi\sin\vartheta,\ \ z=\cos\vartheta,$ $J=\rho^2\sin\vartheta.$

Z rovnice kulové plochy máme

$$\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+\rho^2\cos^2\vartheta=a^2$$

$$\rho^2(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)=a^2$$

$$\rho^2=a^2 \text{ a tedy } 0\le\rho\le a.$$

Z rovnice kuželové plochy

$$\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}=\rho\cos\vartheta$$

$$\rho\sin\vartheta=\rho\cos\vartheta$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta=1 \text{ a tedy } 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{4}.$$

Současně $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a} \rho \sin\vartheta\, \rho^2 \sin\vartheta\; d\rho\right) d\vartheta\right) d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4}{4}\sin^2\vartheta\; d\vartheta\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4}{4}\,\frac{1}{2}(1-\cos 2\vartheta)\; d\vartheta\right) d\varphi = \frac{a^4}{4}\,2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^4}{4}\,\pi(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$$

$$= \frac{a^4}{16}\,\pi(\pi-2)$$

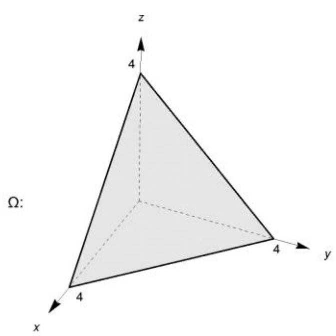
Aplikace trojného integrálu

Geometrické aplikace

Míra oblasti $\Omega \in R^3$ je $\mu = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Příklad Spočítejte objem čtyřstěnu Ω vymezeného nerovnostmi $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4 - x$, $0 \le x \le 4 - x - y$.

Řešení Na obrázku Obr. 12.6 je zadaný čtyřstěn.



Obrázek 12.6. Oblast Ω

$\iiint_\Omega dxdydz = \int_0^4 \left(\int_0^{4-x} \left(\int_0^{4-x-y} dz\right) dy\right) dx = \int_0^4 \left(\int_0^{4-x} [z]_0^{4-x-y}\, dy\right) dx = \int_0^4 \left(\int_0^{4-x} 4 - x - y\, dy\right) dx = \int_0^4 \left[4y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x} \mathrm{d}x = \int_0^4 \left(8 - 4x + \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[8x - 4\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$

Fyzikální aplikace

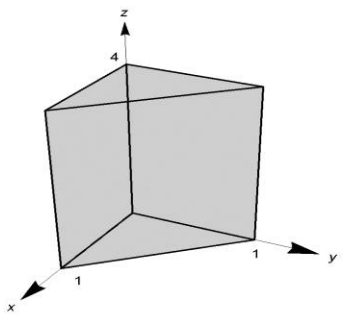
Nejprve označme h funkci hustoty tělesa $\Omega \subset R^3$ (v příkladech bývá často $h = 1$). Pak **hmotnost tělesa** Ω je $m = \iiint\limits_\Omega h(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$.

Statické momenty tělesa Ω **vzhledem k souřadným rovinám** jsou $M_{xy} = \iiint\limits_\Omega h(x, y, z) \cdot z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, $M_{zx} = \iiint\limits_\Omega h(x, y, z) \cdot y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, $M_{zy} = \iiint\limits_\Omega h(x, y, z) \cdot x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

Souřadnice těžiště T **tělesa** Ω: $x_T = \frac{M_{yz}}{m}$, $y_T = \frac{M_{zx}}{m}$, $z_T = \frac{M_{xy}}{m}$, $T = (x_T, y_T, z_T)$.

Příklad Stanovte souřadnice těžiště homogenního tělesa $\Omega \subset R^3$, které je omezené plochami $x + y = 1, \mathrm{z} = 4.$

Řešení Na obrázku Obr. 12.7 je nakreslené zadané těleso. Těžiště spočteme použitím vzorců pro výpočet těžiště homogenního tělesa.



Obrázek 12.7 Homogenní těleso

$m = \iiint_\Omega dx\, dydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^4 dz\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} [z]_0^4\, dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 4\, dy\right) dx = \int_0^1 4\, [y]_0^{1-x} dx = \int_0^1 4 \left[\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1 = 2.$

$M_{yz} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^4 x \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x \cdot 4dy \right) dx = \int_0^1 x \, 4[y]_0^{1-x} dx = \int_0^1 4 \, (x -$

$x^2)dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$M_{xz} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^4 y \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y \cdot 4dy \right) dx = \int_0^1 4 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 2 \, (1 - 2x +$

$x^2)dx = 2 \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$M_{xy} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^4 z \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right] dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 8 \, dy \right) dx =$

$\int_0^1 8 \, [y]_0^{1-x} dx = \int_0^1 2 \, (8 - 8x) dx = [8x - 4x^2]_0^1 = 4$

Těžiště tělesa $x_T = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2 \right)$.

Σ

Trojný integrál je zobecněním jednorozměrného Riemannova integrálu do trojrozměrného prostoru. Jeho výpočet lze realizovat převedením na integrál trojnásobný na základě Fubiniovy věty. Výpočet trojného integrálu přes složitější oblasti lze zjednodušit použitím transformace do křivočarých souřadnic (cylindrických nebo sférických).

?

1. Vysvětlete, jak se liší konstrukce trojného Riemannova integrálu od konstrukce integrálu dvojného.
2. Na základě jakého tvrzení lze převést trojný integrál na trojnásobný? Vyslovte příslušnou matematickou větu.
3. Vyslovte větu o transformaci trojného integrálu do křivočarých souřadnic.
4. Spočítejte objem tělesa omezeného plochami $z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = 1,$ $x = 2.$
5. Stanovte souřadnice těžiště homogenního tělesa $\Omega \subset R^3$, které je omezené plochami $x^2 + y^2 = 2z, \;\; z = 1.$

Základní literatura:

[1] DRÁBEK, P., MÍKA, S. *Matematická analýza II*, 4. vyd. Plzeň, ZČU Plzeň, 2003. 269 stran. ISBN 80-7082-977-X

[2] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy,* 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[3] M0ŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II*. 1.vyd, UP Olomouc 2005. 134 stran. ISBN 80-244-1005-2