Vlastnosti podmnožin množiny R

V celém tomto a následujícím oddílu M značí neprázdnou podmnožinu množiny **R**.

I.10 Definice. Říkáme, že *množina* M *je omezená shora*, resp. *zdola*, existuje-li číslo $k \in \mathbf{R}$, resp. $l \in \mathbf{R}$, takové, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ je $x \leq k$, resp. $x \geq l$. Číslo k se nazývá *horní mez množiny* M a číslo l se nazývá *dolní mez množiny* M.

Říkáme, že *množina* M *je omezená*, je-li omezená shora i zdola.

Příklad. Je-li $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\ 2 \leq x < 3\}$, potom každé číslo $k \in \langle 3, +\infty)$, např. $k = 3, \frac{7}{2}, 5, 150, \ldots$, je horní mez množiny M a každé číslo $l \in (-\infty, 2\rangle$, např. $l = 2, 1, \frac{1}{2}, 0, -10^4, \ldots$, je dolní mez množiny M.

I.11 Poznámky.

1. Existuje-li aspoň jedna horní, resp. dolní, mez množiny M, pak existuje nekonečně mnoho horních, resp. dolních, mezí množiny M.

2. Je-li množina M interval s krajními body a a b, $a < b$, pak podle definice I.10 je tento interval omezená množina (*omezený interval*); číslo a je jednou z dolních mezí intervalu a číslo b je jednou z horních mezí intervalu. Intervaly $(a, +\infty)$ a $\langle a, +\infty)$ jsou množiny, které jsou omezené zdola a nejsou omezené shora, intervaly $(-\infty, a)$ a $(-\infty, a\rangle$ jsou množiny, které jsou omezené shora a nejsou omezené zdola, a interval $(-\infty, +\infty)$ je množina, která není omezená ani shora ani zdola; jsou to vesměs tzv. *neomezené intervaly*.

I.12 Věta. *Množina* M *je omezená, právě když existuje číslo* $K \in \mathbf{R}_0^+$ *takové, že pro každé* $x \in \mathsf{M}$ *platí* $|x| \leq K$.

Příklad. Je-li $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\ 2 \leq x < 3\}$, potom např. $K = 3$, neboť pro každé číslo $x \in \mathsf{M}$ platí $|x| \leq 3$ neboli $-3 \leq x \leq 3$.

I.13 Definice. Existuje-li číslo $x_1 \in \mathsf{M}$ takové, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ je $x \leq x_1$, pak číslo x_1 nazýváme *maximum* nebo *největší prvek (číslo) množiny* M a značíme $\max \mathsf{M}$.

Existuje-li číslo $x_2 \in \mathsf{M}$ takové, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ je $x \geq x_2$, pak číslo x_2 nazýváme *minimum* nebo *nejmenší prvek (číslo) množiny* M a značíme $\min \mathsf{M}$.

Poznámka. Maximum nebo minimum množiny M nemusí existovat. Je-li např. $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\ 2 \leq x < 3\}$, potom $\min \mathsf{M} = 2$, ale $\max \mathsf{M}$ neexistuje. Je-li např. $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\ 2 < x < 3\}$, potom neexistuje ani maximum ani minimum množiny M.

Porovnejte definice I.10 a I.13 a *uvědomte si* toto: Je-li množina M omezená shora, pak její horní mez může, ale nemusí do ní patřit, zatímco její maximum, pokud existuje, do ní patří. Je-li množina M omezená zdola, pak její dolní mez může, ale nemusí do ní patřit, zatímco její minimum, pokud existuje, do ní patří.

I.14 Věta. *Maximum i minimum konečné množiny* M *vždy existují.*

c) $M = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbf{N}\}$.
$\sup M = 1,\ 1 \in M,\ \max M = \sup M = 1,$
$\inf M = 0,\ 0 \notin M,\ \min M$ neexistuje.

d) $M = \langle 0, +\infty)$.
$\sup M$ neexistuje, $\max M$ neexistuje,
$\inf M = 0,\ 0 \in M,\ \min M = \inf M = 0.$

Vztah mezi množinou bodů a jejím prvkem

I.18 Definice. Bod $c \in M$ se nazývá *vnitřní bod množiny* M, existuje-li jeho okolí $U(c) \subset M$. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá *vnitřek množiny* M a značí M°.

Bod $c \in \mathbf{R}$ se nazývá *hraniční bod množiny* M, leží-li v každém jeho okolí $U(c)$ aspoň jeden bod množiny M a aspoň jeden bod množiny $\mathbf{R}$, který do množiny M nepatří. Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá *hranice množiny* M a značí $h(M)$.

Sjednocení množiny M a její hranice se nazývá *uzávěr množiny* M a značí $\overline{M}$. Tedy $\overline{M} = M \cup h(M)$.

Bod $c \in \mathbf{R}$, který není ani vnitřním ani hraničním bodem množiny M, se nazývá *vnější bod množiny* M. Množina všech vnějších bodů množiny M se nazývá *vnějšek množiny* M; vnějšek množiny M je tedy množina $\mathbf{R} \setminus \overline{M}$.

Množina M se nazývá *otevřená*, je-li $M = M^\circ$, a *uzavřená*, je-li $M = \overline{M}$.

Bod $c \in \mathbf{R}^*$ se nazývá *hromadný bod množiny* M, leží-li v každém jeho okolí $U(c)$ nekonečně mnoho bodů množiny M. Množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá *derivace množiny* M a značí M'.

Bod $c \in \mathbf{R}$ se nazývá *hromadný bod množiny* M *zprava*, resp. *zleva*, leží-li v každém jeho pravém okolí $U_+(c)$, resp. levém okolí $U_-(c)$, nekonečně mnoho bodů množiny M.

Bod množiny M, který není jejím hromadným bodem, se nazývá *izolovaný bod množiny* M. Množina, jejíž všechny body jsou izolované, se nazývá *diskrétní* nebo *izolovaná*.

I.19 Poznámky.

1. Vnitřní bod a izolovaný bod množiny M je prvkem množiny M, hraniční bod a hromadný bod množiny M může, ale nemusí být prvkem množiny M.

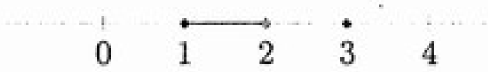
2. Množina M je otevřená, právě když je disjunktní se svou hranicí, tj. když $M \cap h(M) = \emptyset$; vnitřní body množiny M jsou právě ty její body, které nejsou jejími hraničními body. Množina M je uzavřená, právě když obsahuje svou hranici. Hromadný bod množiny M je bodem jejího uzávěru, bod uzávěru množiny M může, ale nemusí být jejím hromadným bodem.

3. Je-li množina M interval, např. $M = \langle a, b)$, potom místo názvu hraniční bod užíváme název krajní bod. Vnitřek intervalu M je interval (a, b), hranice intervalu

M je množina $\{a, b\}$, uzávěr intervalu M je interval $\langle a, b\rangle$, vnějšek intervalu M je sjednocení intervalů $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, derivace intervalu M je interval $\langle a, b\rangle$. Interval M není ani otevřená ani uzavřená množina.

Příklady. Promyslete si řešení!

a) $\mathsf{M} = (1,2) \cup \{3\}$.



$\mathsf{M}^\circ = (1,2)$, $h(\mathsf{M}) = \{1,2,3\}$, $\overline{\mathsf{M}} = \langle 1,2\rangle \cup \{3\}$, $\mathbf{R}\setminus\overline{\mathsf{M}} = (-\infty,1)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$, $\mathsf{M}' = \langle 1,2\rangle$, přitom body intervalu $\langle 1,2)$ jsou hromadné body množiny M, které jsou jejími prvky, a bod 2 je hromadný bod množiny M, který není jejím prvkem, body intervalu $\langle 1,2)$ jsou hromadné body množiny M zprava, body intervalu $(1,2\rangle$ jsou hromadné body množiny M zleva, bod 3 je izolovaný bod množiny M, $\mathsf{M} \neq \mathsf{M}^\circ \wedge \mathsf{M} \neq \overline{\mathsf{M}}$, takže množina M není ani otevřená ani uzavřená.

b) Množina **N** je diskrétní, neboť všechny její body jsou izolované.

Poznámka. Některé pojmy, které jsme zavedli v tomto a předchozích oddílech pro podmnožinu M množiny **R** a její body, je potřebné (např. v teorii reálné funkce n reálných proměnných, $n \in \mathsf{N}$) zobecnit pro podmnožinu M množiny $\mathbf{R}^2$ (reálné roviny — dvojrozměrného reálného prostoru) a její body, podmnožinu M množiny $\mathbf{R}^3$ (trojrozměrného reálného prostoru) a její body, ..., podmnožinu M množiny $\mathbf{R}^n$ (n-rozměrného reálného prostoru) a její body.

Kartézský součin množin a zobrazení

Dříve než budeme definovat pojem funkce, zopakujeme si potřebné pojmy. V celém tomto oddílu množina A je neprázdná množina určitých matematických objektů a množina B je rovněž neprázdná množina určitých (stejných nebo jiných) matematických objektů.

I.20 Definice. *Kartézským součinem množin* A a B nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic $[a,b]$, kde $a \in \mathsf{A}$ a $b \in \mathsf{B}$. Kartézský součin množin A a B značíme $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$.

Vybereme-li z kartézského součinu $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ jen ty dvojice $[a,b]$, kde čísla a a b jsou vázána nějakým vztahem (např. $a < b$, a dělitelno b apod.), dostaneme binární relaci.

I.21 Definice. *Binární relací R mezi množinami* A a B nazýváme neprázdnou podmnožinu R kartézského součinu $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$. Místo zápisu $[a,b] \in R$ zpravidla píšeme $a\,R\,b$.

I.22 Definice. Binární relaci R mezi množinami A a B nazýváme *zobrazení množiny* A *do množiny* B, existuje-li ke každému prvku $a \in \mathsf{A}$ právě jeden prvek $b \in \mathsf{B}$ takový, že $[a,b] \in R$. Zobrazení množiny do množiny značíme zpravidla kurzívním malým nebo velkým písmenem latinské abecedy.

*Radost vidět a rozumět
je nejkrásnější dar přírody.*

Albert Einstein

II
Funkce

Pojem funkce

II.1 Definice. *Reálná funkce jedné reálné proměnné* (dále jen *funkce*) je zobrazení f množiny $A \subset \mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$. Proměnné číslo $x \in A$ nazýváme *nezávisle proměnná* nebo *argument*, proměnné číslo $y \in \mathbb{R}$, pro které je $[x, y] \in f$, nazýváme *závisle proměnná*.
Zápis: $y = f(x)$.
Množinu A nazýváme *definiční obor* funkce f, značíme $D(f)$.
Množinu všech hodnot funkce f v bodech $x \in A$ nazýváme *obor hodnot* funkce f, značíme $H(f)$.
Funkce je zadána svým zobrazovacím předpisem (zpravidla $y = f(x)$) a definičním oborem $D(f)$. Není-li $D(f)$ udán, pak jím rozumíme množinu všech hodnot nezávisle proměnné $x \in \mathbb{R}$, pro kterou existuje číslo $f(x) \in \mathbb{R}$.
Při určování definičního oboru funkce vycházíme zejména z těchto podmínek:

1. Jmenovatel zlomku musí být různý od čísla 0.
2. Pod sudou odmocninou musí být nezáporný odmocněnec.
3. Argument logaritmu musí být kladný.
4. Argument funkce tangens, resp. kotangens, musí být různý od lichých, resp. sudých, násobků čísla $\frac{\pi}{2}$.
5. Argument funkcí arkussinus a arkuskosinus musí patřit do intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

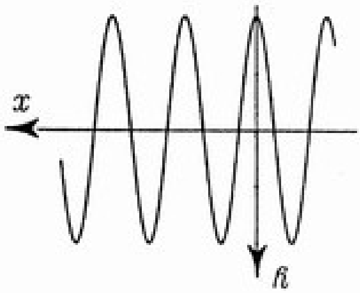
II.2 Definice. *Grafem funkce* f (též křivkou o rovnici $y = f(x)$) nazýváme množinu všech bodů $[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2$, kde $x \in D(f)$. Značíme jej $G(f)$.

II.3 Příklad. Určeme, zda závislost y na x daná vztahem:

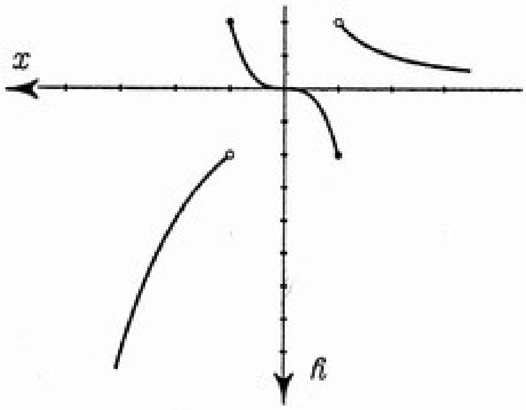
a) $2x + 3y = 0,\ x \in (-\infty, +\infty)$,
b) $y^2 = 6x,\ x \in \langle 0, +\infty)$,

je funkce $y = f(x)$. V případě záporné odpovědi stanovme, kterými funkcemi je možné příslušnou závislost popsat. Ilustrujme grafem.

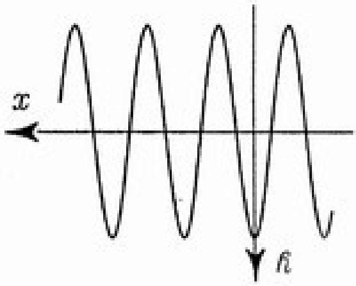
215. $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{2})$



216. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \\ -2x^3 & \text{pro } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ 2^x & \text{pro } x \in (1, +\infty) \end{cases}$



217. $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$
Návod: Výraz na pravé straně zjednodušte!



Globální vlastnosti funkce

II.20 Definice. Funkce f se nazývá *periodická*, existuje-li reálné číslo $p \neq 0$ takové, že

(1) $x \in D(f) \Leftrightarrow x + p \in D(f)$,
(2) pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x+p) = f(x)$.

Číslo p se nazývá *perioda* funkce f. Nejmenší kladné číslo této vlastnosti se nazývá *primitivní perioda* funkce f.

II.21 Definice. Funkce f se nazývá *sudá*, resp. *lichá*, jestliže

(1) $x \in D(f) \Leftrightarrow -x \in D(f)$,
(2) pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$.

Poznámky. Definiční obor sudé i liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic. Graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

II.22 Definice. Funkce f se nazývá *prostá* na množině $M \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ taková, že $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

II.23 Definice. Funkce f se nazývá $\left\{\begin{array}{l} \textit{rostoucí} \\ \textit{neklesající} \\ \textit{klesající} \\ \textit{nerostoucí} \end{array}\right\}$ na množině $M \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ taková, že $x_1 < x_2$, platí $\left\{\begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{array}\right\}$.

II.24 Definice. Funkce $\left\{\begin{array}{l} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \end{array}\right\}$ na množině $M \subset D(f)$ se nazývá *ryze monotónní* na množině M.

Funkce $\left\{\begin{array}{l} \textit{nerostoucí} \\ \textit{neklesající} \end{array}\right\}$ na množině $M \subset D(f)$ se nazývá *monotónní* na množině M.

II.25 Definice. Říkáme, že funkce f je *omezená shora*, resp. *omezená zdola*, na množině $M \subset D(f)$, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$, resp. $l \in \mathbb{R}$, takové, že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq k$, resp. $f(x) \geq l$.
Říkáme, že funkce f je *omezená na množině* $M \subset D(f)$, je-li omezená shora i zdola na množině M.

II.26 Věta. *Funkce f je omezená na množině $M \subset D(f)$, právě když existuje $K \in \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí $|f(x)| \leq K$.*

II.27 Příklad. Najděme primitivní periodu funkce $f(x) = 2\sin(3x+5) - 1$.

Řešení: Nejprve určíme $D(f) = \mathbb{R}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $x + p \in \mathbb{R}$.
Hledáme nejmenší kladné číslo p takové, aby pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platila rovnost $2\sin[3(x+p)+5] - 1 = 2\sin(3x+5) - 1$.
Po úpravách dostaneme

$$\sin[3(x+p)+5] = \sin(3x+5),$$

$$\sin[3(x+p)+5] - \sin(3x+5) = 0.$$

Užitím vzorce $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ obdržíme

268. $f(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$

Je omezená, pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\frac{5}{2} \le -\frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \le \frac{7}{2}$.

269. $f(x) = \frac{e^{\sin x}}{4}$

Je omezená, pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{4e} \le \frac{e^{\sin x}}{4} \le 4e$.

270. $f(x) = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$

Návod: Výraz na pravé straně zjednodušte!

Je omezená, pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $-1 \le \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} \le 1$.

Početní operace s funkcemi

II.43 Definice. Říkáme, že *funkce f a g jsou si rovny na množině M*, jestliže pro všechna $x \in M$ je $f(x) = g(x)$. Jestliže přitom $\mathrm{M} = \mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(g)$, říkáme prostě, že funkce f a g jsou si rovny. Značíme $f = g$.

Poznámka. $f = g \Leftrightarrow D(f) = D(g) \wedge G(f) = G(g) \quad (\wedge\ H(f) = H(g))$.

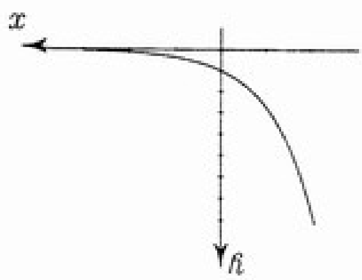
II.44 Definice. Nechť $M = D(f) \cap D(g)$.
Součtem funkcí f a g nazýváme funkci $f + g$ takovou, že pro všechna $x \in M$ je $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
Rozdílem funkcí f a g nazýváme funkci $f - g$ takovou, že pro všechna $x \in M$ je $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
Součinem funkcí f a g nazýváme funkci $f \cdot g$ takovou, že pro všechna $x \in M$ je $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Podílem funkcí f a g (v tomto pořadí) nazýváme funkci $\frac{f}{g}$ takovou, že pro všechna $x \in M \setminus \{x \in D(g); g(x) = 0\}$ je $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

II.45 Definice. *Absolutní hodnotou* funkce f nazýváme funkci $|f|$ takovou, že pro všechna $x \in D(f)$ je $|f|(x) = |f(x)|$.

II.46 Příklad. Rozhodněme, zda jsou si rovny funkce:
a) $f(x) = x^2 + 7x + 12$ a $g(x) = (x+3)(x+4)$,
b) $f(x) = -\sqrt[3]{x^3}$ a $g(x) = \sqrt{x^2}$,
c) $f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x - 3}$ a $g(x) = 3x + 9$.

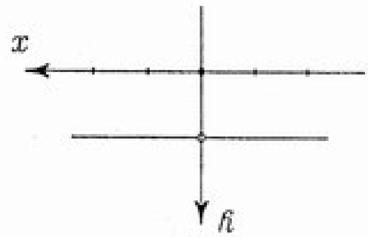
280. $f(x) = e^{-x}$

$|f|(x) = e^{-x}$



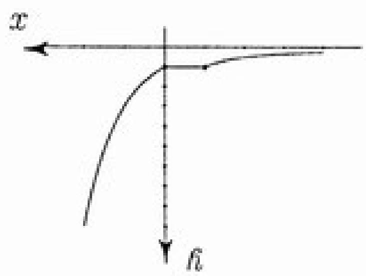
281. $f(x) = \operatorname{sgn} x$

$$|f|(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$



282. $f(x) = \begin{cases} -3^x & \text{pro } x \in \langle 0, \infty) \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 0) \\ \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (-\infty, -1\rangle \end{cases}$

$$|f|(x) = \begin{cases} 3^x & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty) \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 0) \\ -\frac{1}{x} & \text{pro } x \in (-\infty, -1\rangle \end{cases}$$



Složená funkce

II.50 Definice. Nechť $y = f(u)$ je funkce s definičním oborem $D(f)$ a $u = g(x)$ funkce s definičním oborem $D(g)$. Jestliže $H(g) \subset D(f)$, můžeme proměnnou y považovat za závislou na proměnné x, tj. za funkci $y = f[g(x)]$ s definičním oborem $D(g)$. Tuto funkci nazýváme *funkcí složenou z funkcí f a g* (v tomto pořadí), stručně *složenou funkcí* $f[g]$. Funkci f nazýváme *vnější funkcí* a funkci g nazýváme *vnitřní funkcí* složené funkce $f[g]$.

286. $f(u) = \frac{1}{u}$, $g(x) = 2x - 4$ $\qquad f[g_1(x)] = \frac{1}{2x-4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

287. $f(u) = \ln u$, $g(x) = \ln x$ $\qquad f[g_1(x)] = \ln(\ln x)$, $x \in (1, \infty)$

288. Jsou dány funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^3$. Dokažte, že:
$f[g(2)] = g[f(2)]$,
$g[1 + f(1)] = 2f[1 + g(1)]$.

289. Jsou dány funkce $f(x) = x^3 - x$ a $g(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Najděte: $f[g(-\frac{1}{2})]$, $g[f(-\frac{1}{2})]$, $f[g(x)]$, $g\{g[g(x)]\}$, $f\{f[f(1)]\}$. $\qquad -6, \frac{8}{3}, \frac{1-x^2}{x^3}, \frac{1}{x}, 0$

290. Jsou dány funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a $g(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Najděte $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$. $\qquad \operatorname{sgn} x, x, \operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn} x$

Inverzní funkce

II.54 Definice. Nechť f je funkce prostá na svém definiční oboru. Funkci f^{-1}, která každému $y = H(f)$ přiřazuje $x \in D(f)$, pro které je $y = f(x)$, nazýváme *funkcí inverzní k funkci* f, stručně *inverzní funkcí* f^{-1}.

Poznámka. $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$. Grafy $G(f)$ a $G(f^{-1})$ jsou osově souměrné podle přímky $y = x$.

II.55 Příklad. Stanovme inverzní funkci f^{-1} k funkci $f(x) = 2^x - 3$. Sestrojme grafy funkcí f a f^{-1}.

Řešení: Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (-3, +\infty)$.
Přesvědčíme se, že funkce f je prostá.
Sporem: Nechť $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge f(x_1) = f(x_2)$, tedy $2^{x_1} - 3 = 2^{x_2} - 3$.
Po úpravě obdržíme $2^{x_1} = 2^{x_2}$, to nastane pro $x_1 = x_2$, což je spor s předpokladem $x_1 \neq x_2$. Daná funkce je tedy prostá.
Označme $y = f(x)$, tedy $y = 2^x - 3$.
Odtud $2^x = y + 3$, tedy $x = \log_2(y+3)$ a po záměně proměnných obdržíme inverzní funkci
$f^{-1} : y = \log_2(x+3)$, $D(f^{-1}) = (-3, +\infty) = H(f)$, $H(f^{-1}) = \mathbb{R} = D(f)$.

I

Schopností, kterých denně nepřibývá, denně ubývá.

(indonéské přísloví)

Posloupnost

Pojem posloupnosti

I.1 Definice. *Posloupnost reálných čísel* (dále jen *posloupnost*) je zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$. Posloupnost, kterou je každému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřazeno číslo $a_n \in \mathbb{R}$, zapisujeme

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

nebo stručně

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

nebo jen $\{a_n\}$; číslo a_n se nazývá *n-tý člen posloupnosti* $\{a_n\}$, číslo n *index členu posloupnosti* $\{a_n\}$.

Posloupnost můžeme zadat:

1. vzorcem pro n-tý člen,
2. rekurentně,
3. výčtem členů.

I.2 Definice. *Graf posloupnosti* $\{a_n\}$ je množina všech bodů $[n, a_n]$ v rovině $\mathbb{R}^2$. Značíme jej $G(\{a_n\})$.

I.3 Příklad. Nechť $a_n = 2 - 3n$. Napišme prvních 5 členů této posloupnosti a nakresleme její graf.

Řešení: Posloupnost je zadána vzorcem pro n-tý člen. Za n postupně *dosazujeme* čísla $1, 2, 3, 4, 5$; potom

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 - 3 \cdot 1 = -1\,,\\
a_2 &= 2 - 3 \cdot 2 = -4\,,\\
a_3 &= 2 - 3 \cdot 3 = -7\,,\\
a_4 &= 2 - 3 \cdot 4 = -10\,,\\
a_5 &= 2 - 3 \cdot 5 = -13\,.
\end{aligned}$$

Výsledek: $\{2 - 3n\} = \{-1, -4, -7, -10, -13, \dots\}$.

Můžeme tedy psát $a_{n+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{a_n}+1} = \dfrac{1}{\frac{1+a_n}{a_n}} = \dfrac{a_n}{a_n+1}$.

Rekurentní zadání posloupnosti $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ je dáno vztahy: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+1}$.

Poznámka. Nejčastěji bývá posloupnost zadána symbolicky, tj. vzorcem pro n - ty člen. „Uhodnout" funkční vzorec pro a_n z daného rekurentního vzorce či výčtu členů posloupnosti se podaří jen v jednoduchých případech.

Vlastnosti posloupnosti

I.12 Definice. Posloupnost, jejíž všechny členy se sobě rovnají, se nazývá *konstantní* nebo *stacionární*.
Zápis: $\{a\}_{n=1}^{\infty} = \{a, a, a, \dots\}, a \in \mathbb{R}$.

I.13 Definice. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{rostoucí} \\ \textit{neklesající} \\ \textit{klesající} \\ \textit{nerostoucí} \end{array}\right\}, \text{ jestliže pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ platí } \left\{\begin{array}{l} a_n < a_{n+1} \\ a_n \leq a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{array}\right\}.$$

Posloupnost $\left\{\begin{array}{c} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \end{array}\right\}$ se nazývá ryze monotónní.

Posloupnost $\left\{\begin{array}{c} \textit{neklesající} \\ \textit{nerostoucí} \end{array}\right\}$ se nazývá monotónní.

I.14 Definice. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *omezená shora*, resp. *zdola*, existuje-li číslo $k \in \mathbb{R}$, resp. $l \in \mathbb{R}$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq k$ resp. $a_n \geq l$.
Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *omezená*, je-li omezená shora i zdola.

I.15 Věta. *Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, právě když existuje $K \in \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.*

I.16 Příklad. Zjistěme, zda je posloupnost $\left\{\dfrac{n+10}{4n-2}\right\}$ monotónní a omezená.

Řešení: Vypočítáme prvních pět členů posloupnosti a nakreslíme její graf. Užitečné bývá určit také některý z členů s velkým indexem, např. $n = 100$, $n = 1000$ apod.

34. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n-1}{n+1}\right\}$

Posloupnost je rostoucí,
tedy ryze monotónní,
a také monotónní, je omezená;
$\frac{1}{2} \le \frac{2n-1}{n+1} < 2$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

35. $\{a_n\} = \left\{\sin(\dfrac{n\pi}{2})\right\}$

Posloupnost není monotónní,
je omezená;
$|\sin(\frac{n\pi}{2})| \le 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

36. $\{a_n\} = \left\{n + \dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$

Posloupnost je neklesající,
tedy monotónní, není omezená,
je omezená zdola; $a_n \ge 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

37. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2}{3n-8}\right\}$

Posloupnost není monotónní,
je omezená;
$-1 \le \frac{2}{3n-8} \le 2$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

38. $\{a_n\} : a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+2} & \text{pro sudá } n \\ 2^{2-n} & \text{pro lichá } n \end{cases}$

Posloupnost není monotónní,
je omezená;
$-\frac{1}{4} \le a_n \le 2$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Limita posloupnosti

I.19 Definice. Říkáme, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu* $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \ge n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Zápis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nebo také $a_n \to a$.

Stručný zápis definice:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Poznámka. Uvědom si! Číslo n_0 je funkcí proměnné ε, tedy $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

I.20 Definice. Říkáme, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *má nevlastní limitu* $+\infty$, *resp.* $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ platí $a_n > K$, resp. $a_n < K$.

Zápis: $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad (a_n \to +\infty),$$
resp.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad (a_n \to -\infty)\,.$$

Stručný zápis definice:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < K\,.$$

Poznámka. Uvědom si! Číslo n_0 je funkcí proměnné K, tedy $n_0 = n_0(K)$.

I.21 Definice. Posloupnost, která má vlastní limitu se nazývá *konvergentní*. Posloupnost, která není konvergentní se nazývá *divergentní*.

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *konverguje*.
Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *diverguje* k $+\infty$, resp. $-\infty$.
Neexistuje-li $\lim a_n$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *osciluje*.

Divergentní posloupnost je tedy posloupnost, která má buď nevlastní limitu nebo posloupnost, jejíž limita neexistuje.

Poznámka. Limitu posloupnosti hledáme vždy jen pro $n \to \infty$, proto můžeme stručně psát pouze $\lim a_n$ místo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

I.22 Definice. Existuje-li číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ mají členy posloupnosti $\{a_n\}$ vlastnost V, jinými slovy, mají-li všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ vlastnost V s výjimkou jejich konečného počtu (tedy i bez výjimky), pak říkáme, že *skoro všechny členy* posloupnosti $\{a_n\}$ mají vlastnost V.

Poznámka. Připomínáme, že symbol $[x]$ jsme užívali pro funkci *celá část čísla* x.

I.23 Příklad. Dokažme podle definice limity, že platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n-2} = 2\,.$

Řešení: Dle definice I.19

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n-2} = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{2n}{n-2} - 2\right| < \varepsilon\,.$$

43. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{2n-7} = 0$ $\qquad n_0 = \left[\frac{7\varepsilon+3}{2\varepsilon}\right] + 1$

44. $\lim\limits_{n\to\infty} (1-2n) = -\infty$ $\qquad n_0 = \max\{1, \left[\frac{1-K}{2}\right] + 1\}$

45. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = +\infty$ $\qquad n_0 = \max\{1, \left[2K - \frac{2}{3}\right] + 1\}$

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-n}{3n+1} = -\dfrac{1}{3}$ $\qquad n_0 = \max\{1, \left[\frac{7-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right] + 1\}$

47. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-2}{n^2-1} = 1$ $\qquad n_0 = \max\{1, \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1\}$

Vlastnosti limity posloupnosti

I.26 Věta. *Jestliže pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

I.27 Věta. *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti takové, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = b_n$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje, právě když existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a obě limity jsou si rovny.*

I.28 Věta (o limitě posloupností vzniklých početními operacemi). *Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, a početní operace $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, a^m, $\sqrt[m]{a}$, $m \in \mathbb{N}$, jsou definovány na množině $\mathbb{R}^*$. Potom je*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^m = a^m\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}\,,$$ *pokud pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \geq 0$.*

Poznámka. Větu I.28 nelze užít, obdržíme-li na pravé straně rovností některý z neurčitých výrazů, tj. limitu typu $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.
V těchto případech je nutné n-té členy posloupností nejprve upravit, abychom mohli použít vhodné věty a vzorce.

I.29 Věta. *Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, pak*
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0\,.$$

I.30 Věta **(o limitě tří posloupností).** *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti, pro které platí:*
1. $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a,\ a \in \mathbb{R}^*$.

Potom existuje i limita c_n a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

I.31 Definice. Posloupnost $\{a_{k_n}\}$, kde $\{a_n\}$ je daná posloupnost a $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, se nazývá *vybraná posloupnost* z posloupnosti $\{a_n\}$.

I.32 Věta. *Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu a, $a \in \mathbb{R}^*$, pak každá posloupnost $\{a_{k_n}\}$ z ní vybraná má limitu a, tj.*

$$\lim_{k_n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Přehled limit význačných posloupností

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 \text{ pro } |a| < 1 \\ 1 \text{ pro } a = 1 \\ +\infty \text{ pro } a > 1 \\ \text{neexistuje pro } a \leq -1 \end{cases}$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = \begin{cases} +\infty \text{ pro } r > 0 \\ 1 \text{ pro } r = 0 \\ 0 \text{ pro } r < 0 \end{cases} \qquad r \in \mathbb{R}$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \begin{cases} 0 \text{ pro } a = 0 \\ 1 \text{ pro } a > 0\,. \end{cases}$

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\boxed{7}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 \text{ pro } 0 \leq a \leq 1 \\ +\infty \text{ pro } a > 1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}^+$

Výpočet limit posloupností

Podle tvaru funkčního vzorce pro n-tý člen posloupnosti, a tím i podle postupu výpočtu, rozčleníme výpočty limit do několika typů. Pro každý typ uvedeme obecný postup řešení, vyřešíme vzorové příklady a připojíme cvičení.

$\boxed{\text{Typ } \alpha}$

Funkční vzorec pro n-tý člen posloupnosti je lomený racionální výraz (tj. čitatel i jmenovatel jsou polynomy). Podle věty o limitě podílu dostaneme neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$.

Postup řešení: Čitatele i jmenovatele dělíme člen po členu nejvyšší mocninou n ve jmenovateli. Tím jednotlivé členy převedeme na nulové limity (užijeme vzorce $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$) a odstraníme tak neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$.

Měň velké těžkosti v malé a malé v žádné.

(čínské přísloví)

III

Limita a spojitost funkce

Definice limity funkce

III.1 Definice (vlastní limity funkce ve vlastním bodě).
Nechť $c \in \mathbb{R}$ je hromadný bod definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má vlastní limitu* $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$ *ve vlastním bodě* $c \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $x \in \mathrm{D}(f)$, pro která je $0 < |x-c| < \delta$, platí $|f(x)-\mathrm{L}| < \varepsilon$; zapisujeme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \mathrm{L}$.

Stručný zápis definice:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon . \quad (1)$$

III.2 Definice (vlastní limity funkce v nevlastních bodech).
Nechť $+\infty$, resp. $-\infty$, je hromadný bod definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má vlastní limitu* $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$ *v nevlastním bodě* $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathrm{D}(f)$ taková, že $x > M$, resp. $x < \mathrm{M}$, platí $|f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$; píšeme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$, resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$.

Stručný zápis definice:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge x > \mathrm{M} \Rightarrow |f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon , \quad (2)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge x < \mathrm{M} \Rightarrow |f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon . \quad (3)$$

III.3 Definice (nevlastní limity funkce ve vlastním bodě).
Nechť $c \in \mathbb{R}$ je hromadný bod definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má nevlastní limitu* $+\infty$, resp. $-\infty$, *ve vlastním bodě* $c \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $x \in \mathrm{D}(f)$ taková, že $0 < |x-c| < \delta$, platí $f(x) > K$, resp. $f(x) < K$; píšeme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$.

Stručný zápis definice:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{K} \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > \mathrm{K} , \quad (4)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{K} \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) < \mathrm{K} . \quad (5)$$

III.4 Definice (nevlastní limity funkce v nevlastním bodě $+\infty$).
Nechť $+\infty$ je hromadný bod definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má nevlastní limitu* $+\infty$, resp. $-\infty$, *v nevlastním bodě* $+\infty$, jestliže ke každému $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ existuje $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathrm{D}(f)$ taková, že $x > \mathrm{M}$ platí $f(x) > \mathrm{K}$, resp. $f(x) < \mathrm{K}$; píšeme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Stručný zápis definice:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge x > \mathrm{M} \Rightarrow f(x) > \mathrm{K}\,, \tag{6}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge x > \mathrm{M} \Rightarrow f(x) < \mathrm{K}\,. \tag{7}$$

III.5 Definice (jednostranné limity funkce).
Nechť $c \in \mathbb{R}$ je hromadný bod zprava, resp. zleva, definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má vlastní limitu* $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$ *zprava nebo zleva ve vlastním bodě* $c \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $x \in \mathrm{D}(f)$ taková, že $c < x < c + \delta$, resp. $c - \delta < x < c$, platí $|f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$; píšeme $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \mathrm{L}$, resp. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \mathrm{L}$.

Stručný zápis definice:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c^+} f(x) = \mathrm{L} &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon\,, \\ \lim_{x \to c^-} f(x) = \mathrm{L} &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{8}$$

III.6 Příklad. Podle definice limity funkce dokažme, že $\lim\limits_{x \to 1}(3x + 1) = 4$.

Řešení:
Jde o vlastní limitu ve vlastním bodě. Dle (1)
$\lim\limits_{x \to 1}(3x+1) = 4 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}(f) \wedge 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(3x+1) - 4| < \varepsilon$.
Hledáme tedy k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ příslušné $\delta > 0$ a to tak, že upravujeme nerovnost

$$|(3x+1) - 4| < \varepsilon\,, \qquad |3(x-1)| < \varepsilon\,, \qquad 3|x-1| < \varepsilon\,,$$
$$|3x - 3| < \varepsilon\,, \qquad |3||x-1| < \varepsilon\,, \qquad |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, pak k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ vždy najdeme $\delta > 0$ ($\delta = \frac{\varepsilon}{3}$) takové, že pro všechna $x \in \mathrm{D}(f) \wedge 0 < |x-1| < \delta$ platí $|(3x+1) - 4| < \varepsilon$.
Tím je důkaz skončen.
V souladu s definicí III.1 jsme ze svých úvah vyloučili bod $x = 1$.

304. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $M = \sqrt{K},\ K \in \mathbb{R}^+$

305. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $M = -\sqrt{K},\ K \in \mathbb{R}^+$

306. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}},\ K \in \mathbb{R}^+$

Funkce spojitá v bodě a na množině

III.8 Definice (spojitosti funkce v bodě).
Nechť $c \in D(f)$. Říkáme, že *funkce f je spojitá v bodě c*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in \mathrm{D}(f)$, pro která je $|x-c| < \delta$, platí $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Stručný zápis:
Funkce f je spojitá v bodě $c \in \mathrm{D}(f) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{D}(f)\ \wedge\ |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\,. \tag{9}$$

III.9 Definice (jednostranné spojitosti funkce v bodě.)
Nechť $c \in \mathrm{D}(f)$. Říkáme, že funkce f je *spojitá zprava v bodě c*, resp. *spojitá zleva v bodě c*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in \mathrm{D}(f)$, pro která je $c \le x < c + \delta$, resp. $c - \delta < x \le c$, platí $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

III.10 Věta. *Nechť $c \in \mathrm{D}(f)$ je hromadný bod zprava i zleva definičního oboru funkce f. Funkce f je spojitá v bodě c, právě když je spojitá zprava i zleva v bodě c.*

III.11 Definice (bodů nespojitosti funkce).
Nechť $c \in \mathrm{D}'(f)$.
Bod c nazýváme *bod odstranitelné nespojitosti* funkce f, jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \mathrm{L}$ a přitom $\mathrm{L} \ne f(c)$ nebo $c \notin \mathrm{D}(f)$.
Bod c nazýváme *bod nespojitosti prvního (I.) druhu* funkce f, jestliže existují vlastní jednostrané limity funkce f v bodě c a přitom $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) \ne \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$.
Číslo $\left| \lim\limits_{x\to c^+} f(x) - \lim\limits_{x\to c^-} f(x) \right|$ nazýváme *skok* funkce f v bodě c.
Bod c nazýváme *bod nespojitosti druhého (II.) druhu* funkce f, jestliže aspoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě c je nevlastní nebo neexistuje.

Poznámka. Je-li bod c bodem odstranitelné nespojitosti funkce f, lze funkci f spojitě dodefinovat v bodě c, tj. definovat novou funkci F funkčním předpisem

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in \mathrm{D}(f) \setminus \{c\}\,, \\ \lim\limits_{x \to c} f(x) & \text{pro } x = c\,; \end{cases}$$

funkce F je spojitá v bodě c.

III.12 Definice (spojitosti funkce na množině).
Říkáme, že funkce f je *spojitá na neprázdné množině* $M \subset \mathrm{D}(f)$, je-li spojitá v každém bodě množiny M. Je-li $M = \mathrm{D}(f)$, říkáme, že funkce f je *spojitá na svém definičním oboru* nebo prostě, že funkce f je *spojitá*.
Speciálně, je-li množina $M \subset \mathrm{D}(f)$ interval s krajními body a a b, $a < b$, říkáme, že funkce f je *spojitá na intervalu* M, je-li spojitá v každém bodě intervalu M, tj. spojitá v každém vnitřním bodě intervalu M, spojitá zprava v bodě a, pokud $a \in M$, a spojitá zleva v bodě b, pokud $b \in M$.

III.13 Věta. *Každá základní elementární funkce je spojitá.*

III.14 Věta. *Součet, rozdíl, součin a podíl dvou spojitých funkcí, absolutní hodnota spojité funkce a funkce složená ze spojitých funkcí jsou spojité funkce.*

Poznámka. Věta III.14 platí i pro funkce spojité v bodě.

III.15 Věta. *Každá elementární funkce je spojitá.*

III.16 Věta. *Je-li funkce spojitá, pak je spojitá na každé podmnožině svého definičního oboru.*

III.17 Definice. Říkáme, že *funkce* f je *po částech spojitá na intervalu* I, má-li n, $n \in \mathbb{N}$, bodů odstranitelné nespojitosti nebo nespojitosti I. druhu a nemá žádné jiné body nespojitosti na intervalu I.

III.18 Věta (o vztahu mezi limitou a spojitostí).
Nechť $c \in \mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}'(f)$. *Funkce* f *je spojitá v bodě* c, *právě když* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Vypočítáme limitu funkce f v bodě 0 a porovnáme ji s hodnotou funkce f v bodě 0.

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \ln(1-x) & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 + \ln(1-x) & \text{pro } x \in (0,1). \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (1 + \ln(1-x)) = 1,$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (-1 + \ln(1-x)) = -1,$$

tedy limita

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{sgn} x + \ln(1-x))$$

neexistuje, takže funkce f není spojitá v bodě 0.

Závěr: Funkce f je spojitá na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0,1)$.

b) Postupujeme obdobně jako v případě a). $\mathsf{D}(g) = (-\infty, 1)$.

$$g(x) = \begin{cases} -\ln(1-x) & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ \ln(1-x) & \text{pro } x \in (0,1). \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \ln(1-x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} (-\ln(1-x)) = 0,$$

tedy

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{sgn} x \cdot \ln(1-x)) = 0 = g(0),$$

takže funkce g je spojitá v bodě 0.

Závěr: Funkce g je spojitá na intervalu $(-\infty, 1)$.

Z příkladů 4.45a) a 4.45b) je patrné, že z nespojitosti jedné nebo několika funkcí v bodě c, z nichž je utvořena nová funkce, nevyplývá nespojitost této funkce v bodě c. (Stručně: Nespojitost se nemusí operacemi s funkcemi zachovávat.)

Vlastnosti funkcí spojitých na uzavřeném intervalu

Zajímavé a užitečné vlastnosti mají funkce spojité na uzavřeném intervalu.

IV.46 Věta (o vlastnostech funkce spojité na uzavřeném intervalu). *Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí:*

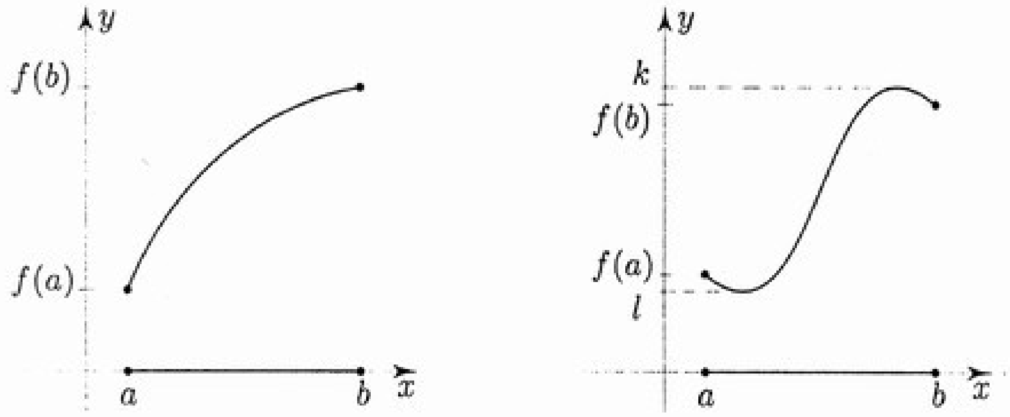
1. **Weierstrassova věta:** *Funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

2. Weierstrassova věta: *Funkce f má globální maximum a globální minimum na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Bolzanova věta, též věta o nulovém bodě: *Je-li nadto $f(a) \cdot f(b) < 0$, existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$, tj. nulový bod funkce f.*

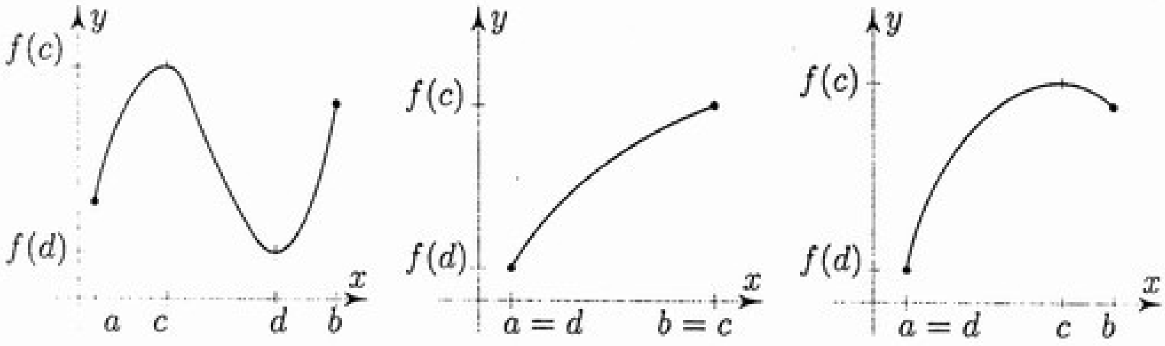
Věta o mezihodnotě: *Je-li nadto $f(a) \neq f(b)$, funkce f nabývá v bodech intervalu (a, b) všech hodnot, které leží mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$.*

Grafické znázornění věty o vlastnostech funkce spojité na uzavřeném intervalu:



$\forall x \in \langle a, b\rangle$ je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ $\qquad$ $\forall x \in \langle a, b\rangle$ je $l \leq f(x) \leq k$

Obr. 4.29: K 1. Weierstrassově větě



Obr. 4.30: K 2. Weierstrassově větě

Existují body c a d intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že pro všechna čísla $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq f(c)$ a $f(x) \geq f(d)$; číslo $f(c)$ je globální maximum a číslo $f(d)$ je globální minimum funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, čili $\max\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x) = f(c)$ a $\min\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x) = f(d)$.

PDF-Xchange Click to buy NOW! www.docu-track.com

Vlastnosti limity funkce

III.19 Věta (o jednostranných limitách).
Nechť c je hromadný bod zprava i zleva definičního oboru funkce f. Funkce f má v bodě c limitu L, právě když má v bodě c limitu zprava i limitu zleva a platí

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = \mathrm{L}\,.$$

III.20 Věta (o limitě a algebraických operacích).
Nechť f a g jsou funkce, $c \in \mathrm{D}'(f) \cap \mathrm{D}'(g)$. Jestliže $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \mathrm{L}$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \mathrm{M}$, $\mathrm{L}, \mathrm{M} \in \mathbb{R}^*$, a početní operace $\mathrm{L}+\mathrm{M}$, $\mathrm{L}-\mathrm{M}$, $\mathrm{L}\cdot\mathrm{M}$ a $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}$ jsou definovány na množině $\mathbb{R}^*$, pak platí

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \mathrm{L}+\mathrm{M}\,, \qquad \lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \mathrm{L}-M\,,$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \mathrm{L}\cdot\mathrm{M}\,, \qquad \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}\,,$$

$$\lim_{x\to c}|f(x)| = |\mathrm{L}|\,.$$

Poznámka. Není-li některá z početních operací na pravé straně rovností definována, obdržíme tzv. *neurčité výrazy* a neznamená to ještě, že příslušná limita funkce na levé straně rovností neexistuje. Znamená to jen, že v takovém případě nelze větu použít a je třeba limitu funkce vypočítat jiným způsobem, např. vhodnou úpravou matematického výrazu, kterým je funkce definována.

Výčet neurčitých výrazů: $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0.

III.21 Věta. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c}|f(x)| = 0$.

III.22 Věta. $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = 0$.

III.23 Věta. *Je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \mathrm{L} \neq 0$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ a $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn}\mathrm{L}$, resp. $\operatorname{sgn} g(x) = -\operatorname{sgn}\mathrm{L}$, na jistém redukovaném okolí $U^*(c)$, potom*
$\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, *resp.* $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Poznámka. Jestliže $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \mathrm{L} \neq 0$ a na každém $U^*(c)$ hodnoty funkce g mají různá znaménka, pak limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje.

III.24 Věta. *Je-li* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ *a funkce* g *omezená na jistém redukovaném okolí* $U^*(c)$, *potom*

$$\lim_{x\to c} (f(x)\cdot g(x)) = 0\,.$$

III.25 Věta (o limitě tří funkcí).
Nechť f, g *a* h *jsou funkce, pro které platí:*

1. $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *na jistém redukovaném okolí* $U^*(c)$,
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = \mathrm{L}$.

Potom existuje i limita $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ *a platí* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \mathrm{L}$.

III.26 Věta (o náhradní funkci).
Nechť $f(x) = F(x)$ *na jistém redukovaném okolí* $U^*(c)$. *Limita* $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *existuje, právě když existuje limita* $\lim\limits_{x\to c} F(x)$ *a platí*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} F(x)\,.$$

III.27 Věta (o limitě složené funkce v bodě).
Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. *Je-li* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \mathrm{L} \in \mathbb{R}$ *a funkce* f *spojitá v bodě* L, *pak platí*

$$\lim_{x\to c} f[g(x)] = f(\lim_{x\to c} g(x)) = f(\mathrm{L})\,.$$

Poznámka. Větu III.27 užíváme zejména při výpočtu limit složených funkcí těchto typů v bodě c:

1) $$\lim_{x\to c} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} f(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty\,, \\ e^{\mathrm{L}}, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = \mathrm{L} \in \mathbb{R}\,, \\ 0, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty\,. \end{cases}$$

2) $$\lim_{x\to c} \ln f(x) = \ln \lim_{x\to c} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty\,, \\ \ln \mathrm{L}, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = \mathrm{L} \in \mathbb{R}^+\,, \\ -\infty, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = 0\,, \end{cases}$$

a přitom $f(x) > 0$.

3) $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to c} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} [g(x)\ln f(x)]}$, je-li $f(x) > 0$.

PDF-XChange
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

Základní limity (vzorce)

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le a < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ +\infty & \text{pro } a > 1 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{pro } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ 0 & \text{pro } a > 1 \end{cases}$

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ speciálně $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\boxed{8}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a od ní odvozené $\boxed{9}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ a $\boxed{10}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\boxed{11}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ a od ní odvozená $\boxed{12}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Z grafů základních elementárních funkcí můžeme vyčíst jejich limity v některých význačných bodech.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$

Výpočet limit funkcí

Při výpočtu limity funkce f v bodě c se můžeme setkat s těmito případy:
1. c je vlastní bod množiny $D'(f)$.

a) Funkce f je spojitá v bodě c. V tomto případě je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ (viz věta III.18)

b) Funkce f není spojitá v bodě c. V tomto případě užíváme vhodné věty, které vybíráme z vět III.20 – III.25 a základní limity; dospějeme-li přitom k některému typu neurčitých výrazů, snažíme se vhodnými úpravami (vytýkáním, rozkladem, rozšiřováním, krácením apod.) nahradit funkci f funkcí spojitou v bodě c, a pak užijeme větu III.26.

2. c je nevlastní bod množiny $D'(f)$.
V tomto případě postupujeme jako při výpočtu limity posloupnosti a užíváme případně základní limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.
V případě limity v nevlastním bodě $-\infty$ musíme dát pozor na znaménka. Dospějeme-li k některému typu neurčitých výrazů, postupujeme obdobně jako v případě 1b).

Poznámka. K výpočtu limity funkce, který vede k neurčitému výrazu typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, lze také užít l'Hospitalova pravidla, s nímž se seznámíme v kapitole IV.

Poznámka. Povede-li výpočet limity funkce v bodě k neurčitému výrazu, budeme uvádět jeho typ v závorkách za rovnítkem.

Obdobně jako jsme to udělali u výpočtů limit posloupností i výpočty limit funkcí rozčleníme do „typů" podle tvaru funkčního předpisu, a tím i podle postupu výpočtu. Pro každý typ uvedeme obecný postup řešení, vyřešíme vzorové příklady a připojíme cvičení.
Všechny dále užívané vzorce $\boxed{1}$ – $\boxed{12}$ najdete na straně 98.

$\boxed{\textbf{Typ } \alpha}$

Limita racionální lomené funkce, tj. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, přičemž $c \in \mathbb{R}$ a $P_m(x)$, resp. $Q_n(x)$, je polynom stupně m, resp. n, proměnné x.
Úmluva: Kořenem polynomu $M(x)$ budeme rozumět kořen rovnice $M(x) = 0$.
1. Je-li $Q_n(c) \neq 0$, pak

$$\lim_{x\to c} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(c)}{Q_n(c)} \quad \text{(věta III.18)}$$

2. Je-li $Q_n(c) = 0$, pak může nastat:

PDF-Xchange Click to buy NOW! www.docu-track.com

IV
Derivace funkce

Není pravda, že máme málo času,
avšak pravda je, že ho hodně promarníme.

(Seneca)

Definice derivace funkce

IV.1 Definice. Nechť funkce f je definovaná na jistém okolí bodu x_0. Říkáme, že funkce f má derivaci v bodě x_0, existuje-li limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

Tuto limitu nazýváme *derivace funkce f v bodě x_0* a značíme $f'(x_0)$.

Poznámky.

1. Derivace funkce f v bodě x_0 je číslo $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
2. Obdobně je definována *derivace zleva*, resp. *zprava, funkce f v bodě x_0*:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,,$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

3. Uvedené limity mohou být vlastní nebo nevlastní; podle toho pak mluvíme o vlastní či nevlastní derivaci.
4. Položíme-li $x = x_0 + h$, píšeme derivaci ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

IV.2 Věta. Funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$, právě když má v bodě x_0 derivaci zleva $f'_-(x_0)$ a derivaci zprava $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Potom $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)\,.$

IV.3 Příklad. Podle definice derivace vypočtěme derivaci funkce $f(x) = x^2 - 2x$ v bodě 2.

Řešení: Podle definice IV.1

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - (2^2 - 2\cdot 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4-2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2) = 2\,.$$

Funkce f má v bodě 2 vlastní derivaci $f'(2) = 2$.

581. $f(x) = \operatorname{sgn} x;\ x_0 = 0$

$f'(0) = +\infty$

582. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x + 1 & \text{pro } x \neq 0 \\ -1 & \text{pro } x = 0 \end{cases};\ x_0 = 0$

$f'(0)$ neexistuje; $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$

583. $f(x) = |x+3|;\ x_0 = -3$

$f'(-3)$ neexistuje; $f'_+(-3) = 1$, $f'_-(-3) = -1$

584. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{pro } x \geq 0 \\ 2 - x^2 & \text{pro } x < 0 \end{cases};\ x_0 = 0$

$f'(0) = 0$

585. $f(x) = \sqrt{|x|};\ x_0 = 0$

$f'(0)$ neexistuje; $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$,

586. $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2};\ x_0 = 2$

$f'(2)$ neexistuje; $f'_+(2) = +\infty$, $f'_-(2) = -\infty$

587. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x < 0 \\ x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases};\ x_0 = 0$

$f'(0) = 1$

588. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases};\ x_0 = 0$

$f'(0) = 0$

589. $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 2x}{\sin x} & \text{pro } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{pro } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases};\ x_0 = 0$

$f'(0) = \frac{3}{2}$

Poznámka. Pojem derivace funkce v bodě lze rozšířit na pojem derivace funkce.

IV.11 Definice. Nechť funkce f je definována na množině $D(f) \subset \mathbb{R}$. Označme $D(f') \subset D(f)$ množinu všech bodů, ve kterých funkce f má vlastní derivaci. Je-li $D(f') \neq \emptyset$, potom funkci, kterou je každému bodu $x \in D(f')$ přiřazeno číslo $f'(x)$, nazýváme *derivace funkce* f a značíme f'; jejím definičním oborem je množina $D(f')$.

Poznámka. Uvědom si! Derivace funkce f v bodě x_0 je číslo $f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$, kdežto derivace funkce f je funkce f', $x \in D(f')$, přičemž $H(f') \subset \mathbb{R}$.

Při výpočtu derivací (derivování) funkcí užíváme vzorce pro derivování základních elementárních funkcí a další vzorce a pravidla, která nyní uvedeme.

Derivace základních elementárních funkcí

[1]	$a' = 0$	$a \in \mathbb{R}$
[2]	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+$
[3]	$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
[4]	$(a^x)' = a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
[5]	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^+$
[6]	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}^+$
[7]	$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
[8]	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
[9]	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
[10]	$(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$
[11]	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
[12]	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
[13]	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
[14]	$(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
[15]	$(\sinh x)' = \cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
[16]	$(\cosh x)' = \sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
[17]	$(\mathrm{tgh}\, x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
[18]	$(\mathrm{cotgh}\, x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
[19]	$(\mathrm{argsinh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbb{R}$
[20]	$(\mathrm{argcosh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, +\infty)$
[21]	$(\mathrm{argtgh}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
[22]	$(\mathrm{argcotgh}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

PDF-XChange Click to buy NOW! www.docu-track.com

Vzorce pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí, složené a inverzní funkce

Nechť f, g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}$ konstanta. Pak platí:

[23] $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

[24] $(af(x))' = af'(x)$

[25] $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

[26] $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$

[27] $(f[g(x)])' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

[28] $[(f^{-1})(x)]' = \frac{1}{f'(y)}, \quad \text{kde } x = f(y), f'(y) \neq 0$

Výpočet derivací funkcí

Poznámky.

1. Vzorce platí, pokud existují výrazy na pravé straně.
2. Nahradíme-li symboly f a g tradičními symboly u a v, pak zapisujeme vzorce [23]–[26] stručně takto:

[23] $(u \pm v)' = u' \pm v'$

[24] $(av)' = av'$

[25] $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

[26] $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad \text{speciálně} \quad \left(\frac{a}{v}\right)' = -\frac{av'}{v^2}$

4. V následujících řešených příkladech nebudeme vždy důsledně konkrétně určovat $D(f)$ případně $D(f')$, protože to již umíme. Derivace funkcí budou tedy počítány pro $x \in D(f)$ a derivace f' bude určena pro hodnoty $x \in D(f')$. Ve cvičeních nebude určování definičních oborů $D(f)$ a $D(f')$ požadováno.
5. Vypočítanou derivaci f' nebudeme vždy důsledně upravovat, a to proto, aby bylo možné z výsledků vyčíst postup výpočtu (tj. sledovat derivování jednotlivých sčítanců, činitelů apod.).
6. Funkci derivujeme vždy podle její nezávislé proměnné, která je uvedena jako argument v závorce za označením funkce. Nemusí jít vždy o proměnnou x! Např. funkci $f(x) = 4x^2 - 2a^3$, $a, x \in \mathbb{R}$, derivujeme podle proměnné x, v tomto případě je a konstanta, tedy $f'(x) = 8x$. Naproti tomu funkci $f(a) = 4x^2 - 2a^3$, $a, x \in \mathbb{R}$, derivujeme podle proměnné a, v tomto případě je x konstanta, tedy $f'(a) = -6a^2$.

Výpočty derivací funkcí rozčleníme do typů podle tvaru funkčního předpisu, a tím i podle užití vzorců. Pro každý typ vyřešíme vzorové příklady a připojíme cvičení. Všechny dále užívané vzorce [1] – [28] najdete na str. 148 a 149.

Geometrický význam derivace

IV.83 Věta. *Nechť funkce f je spojitá a má derivaci v bodě x_0. Potom existuje tečna t grafu $G(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ a její rovnice je*

$$t : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

pokud derivace $f'(x_0)$ je vlastní, a

$$t : x = x_0,$$

pokud derivace $f'(x_0)$ je nevlastní.
Tečna grafu $G(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ neexistuje, když funkce f není spojitá v bodě x_0 nebo neexistuje $f'(x_0)$.

IV.84 Věta. *Nechť existuje tečna t grafu $G(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$. Potom rovnice přímky n, která prochází bodem T a je kolmá k tečně t, tj. normály grafu $G(f)$ v bodě T je*

$$n : y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

pokud derivace $f'(x_0)$ je vlastní a není rovna 0,

$$\begin{aligned} &n : x = x_0\,, && \textit{pokud derivace } f'(x_0) \textit{ je rovna } 0 \textit{ a} \\ &n : y = f(x_0)\,, && \textit{pokud je } |f'(x_0)| = +\infty\,. \end{aligned}$$

Poznámka. Normála grafu $G(f)$ v bodě T existuje, právě když existuje tečna grafu $G(f)$ v bodě T.

IV.85 Věta. *Nechť funkce f je spojitá zprava, resp. zleva, a má derivaci zprava, resp. zleva, v bodě x_0. Potom existuje tečna t_+ zprava, resp t_- zleva, grafu $G(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ a její rovnice je*

$$t_+ : y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0) \quad x \in \langle x_0, +\infty)\,,$$

resp.

$$t_- : y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0) \quad x \in (-\infty, x_0\rangle\,,$$

pokud derivace $f'_+(x_0)$, resp. $f'_-(x_0)$, je vlastní,

$$t_+ = t_- : x = x_0, \quad y \in \langle f(x_0), +\infty)\,,$$

pokud $f'_+(x_0) = +\infty$ a $f'_-(x_0) = -\infty$ a

$$t_+ = t_- : x = x_0, \quad y \in (-\infty, f(x_0)\rangle\,,$$

pokud $f'_+(x_0) = -\infty$ a $f'_-(x_0) = +\infty$.

PDF-Xchange Click to buy NOW! www.docu-track.com

861. Pod jakým úhlem se protínají křivky $y = x^2$ a $y^2 = x$? $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

Diferenciál funkce

IV.92 Věta. *Funkce f má diferenciál v bodě x_0, právě když má vlastní derivaci $f'(x_0)$ v bodě x_0. V tomto případě je diferenciál $df(x_0)$ určen jednoznačně vzorcem*

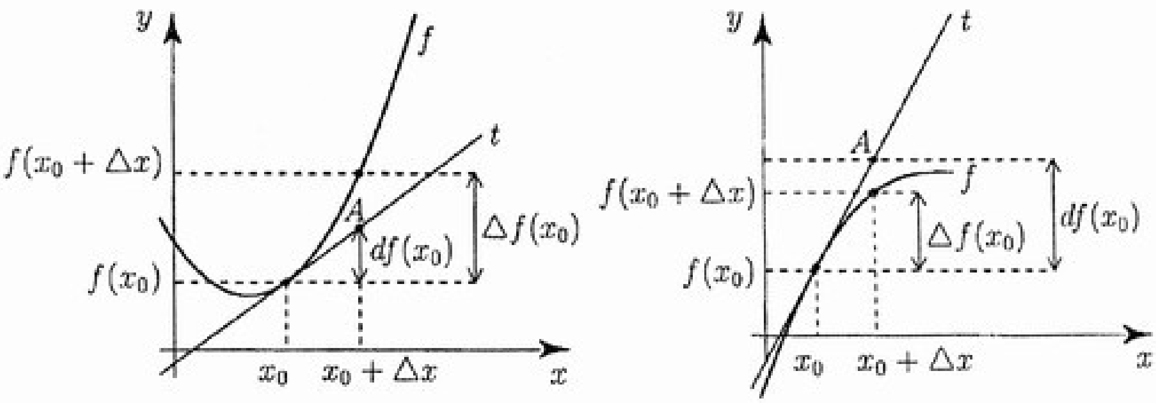
$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x\,. \tag{1}$$

Uvědom si! Diferenciál $df(x_0)$ je funkcí proměnné Δx.

Diferenciál funkce f v libovolném bodě $x \in D(f')$ označujeme $df(x)$ a platí

$$df(x) = f'(x)\,dx\,, \tag{2}$$

kde $dx = \Delta x$ je přírůstek (diference) nezávislé proměnné x. V tomto případě můžeme diferenciál $df(x)$ považovat za funkci jak proměnné x, tak proměnné dx.
Pro $x = x_0$ dostáváme diferenciál v bodě x_0.
Je-li dána ještě hodnota Δx, dostáváme hodnotu diferenciálu v bodě x_0 pro daný přírůstek Δx.



Obr. IV.4: Geometrický význam diferenciálu

Diferenciál funkce f se rovná diferenci (přírůstku) y–ové souřadnice bodu A o x–ové souřadnici $x_0 + \Delta x$ na tečně t grafu funkce f v daném bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Přírůstek (diference) $\Delta f(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je dán vztahem

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,. \tag{3}$$

V přibližných výpočtech můžeme pro dostatečně malá čísla $\triangle x$ klást $\triangle f \sim df$, tj. přírůstek $\triangle f(x_0)$ funkce f v bodě x_0 lze přibližně nahradit diferenciálem $df(x_0)$ funkce f v bodě x_0.
Pomocí diferenciálu můžeme tedy přibližně určit funkční hodnoty v okolí bodu x_0, známe-li hodnotu $f(x_0)$. Platí totiž

$$f(x_0 + dx) \sim f(x_0) + df(x_0)\,,$$
$$\triangle f(x_0) \sim df(x_0)\,. \tag{4}$$

Symbol $\sim$ čteme „je přibližně rovno".

IV.93 Příklad. Najděme přírůstek $\triangle f$ a diferenciál df funkce $f(x) = x^2 - 4$
a) pro libovolnou hodnotu nezávisle proměnné x a přírůstku $\triangle x$,
b) pro $x_0 = 10$ a $\triangle x = 0{,}10$.

Řešení:
a) Podle (3) je přírůstek $\triangle f$ v libovolném bodě x

$$\triangle f(x) = f(x + \triangle x) - f(x) = (x + \triangle x)^2 - 4 - (x^2 - 4) =$$
$$= x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 - 4 - x^2 + 4 = 2x\triangle x + (\triangle x)^2\,.$$

Podle vzorce (2) je diferenciál v libovolném bodě x

$$df(x) = (x^2 - 4)'\,dx = 2x\,dx\,.$$

b) Je-li $x_0 = 10$ a $\triangle x = 0{,}10$, pak podle vzorce (3)

$$\triangle f(10) = f(10 + 0{,}10) - f(10) =$$
$$= f(10{,}10) - f(10) = (10{,}10^2 - 4) - (10^2 - 4) = 102{,}01 - 4 - 100 + 4 = 2{,}01$$

nebo lze také určit podle a)

$$\triangle f(10) = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}10 + 0{,}10^2 = 2 + 0{,}01 = 2{,}01$$

a podle (1)

$$df(10) = f'(10) \cdot 0{,}10 = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}10 = 2\,.$$

Rozdíl mezi $\triangle f(10)$ a $df(10)$ pro $\triangle x = 0{,}10$ je $0{,}01$.
Porovnejme pro názornost následující hodnoty:

$$f(10{,}10) = 10{,}01^2 - 4 = 102{,}01 - 4 = 98{,}01\,,$$
$$f(10) = 10^2 - 4 = 100 - 4 = 96\,,$$
$$\triangle f(10) = 98{,}01 - 96 = 2{,}01 \text{ pro } \triangle x = 0{,}10\,,$$
$$f(10{,}10) \sim f(10) + df(10) = 96 + 2 = 98\,.$$

Rozdíl mezi hodnotou $f(10{,}10)$ a přibližnou hodnotou vypočtenou užitím diferenciálu je $98{,}01 - 98 = 0{,}01$.

870. Vypočtěte přibližně hodnoty
a) $\sqrt{16{,}06}$,
b) $\operatorname{arctg} 1{,}02$,
c) $\sqrt[4]{82}$,
d) $\operatorname{tg} 45°10'$,
e) $\sqrt[3]{125{,}603}$,
f) $\sin 46°$,
g) $f(0{,}96)$, kde $f(x) = e^{0{,}1x(1-x)}$,
h) $\cos 61°$,
i) $\sqrt[3]{1{,}02}$.

a) $\sqrt{16{,}06} \sim 4{,}0075$,
b) $\operatorname{arctg} 1{,}02 \sim \frac{\pi}{4} + 0{,}01 \sim 0{,}795$,
c) $\sqrt[4]{82} \sim 3{,}00926$,
d) $\operatorname{tg} 45°10' \sim 1{,}00582$,
e) $\sqrt[3]{125{,}603} \sim 5{,}00804$,
f) $\sin 46° \sim 0{,}7194$,
g) $f(0{,}96) \sim 1{,}004$,
h) $\cos 61° \sim 0{,}485$,
i) $\sqrt[3]{1{,}02} \sim 1{,}0067$

Derivace vyšších řádů funkce

IV.99 Definice. Vlastní derivaci f' funkce f, definovanou na neprázdné množině $D(f') \subset D(f)$, nazýváme též *derivace prvního řádu* nebo *první derivace funkce* f a značíme též $f^{(1)}$.
Nechť $D(f'') \subset D(f')$ je neprázdná množina všech bodů, ve kterých funkce f' má vlastní derivaci. Funkci, kterou je každému bodu x z množiny $D(f'')$ přiřazeno číslo $(f'(x))'$, nazýváme *derivace druhého řádu* nebo *druhá derivace funkce* f a značíme f'' nebo $f^{(2)}$. Tedy $f'' = (f')'$ s definičním oborem $D(f'')$.

Obecně. Nechť $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ a $D(f^{(n)}) \subset D(f^{(n-1)})$ je neprázdná množina všech bodů, ve kterých funkce $f^{(n-1)}$ má vlastní derivaci. Funkci, kterou je každému bodu x z množiny $D(f^{(n)})$ přiřazeno číslo $(f^{(n-1)}(x))'$, nazýváme *derivace n-tého řádu* nebo *n-tá derivace funkce* f značíme $f^{(n)}$. Tedy $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ s definičním oborem $D(f^{(n)})$.

Poznámky.
1) Zřejmě platí: $D(f^{(n)}) \subset D(f^{(n-1)}) \subset \ldots \subset D(f') \subset D(f)$.
2) Zavádíme derivaci nultého řádu, značíme $f^{(0)}$.
3) Označení: $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, ..., $f^{(n)}$, ...

IV.100 Definice. Nechť $n \geq 0$. Hodnotu funkce $f^{(n)}$ v bodě $x_0 \in D(f^{(n)})$, tj. číslo $f^{(n)}(x_0)$, nazýváme *vlastní derivací n-tého řádu* nebo *vlastní n-tou derivací funkce f v bodě x_0*.

Výpočet derivace n-tého řádu funkce provádíme tak, že postupně počítáme derivace 1. až n-tého řádu funkce.
Při výpočtu derivace n-tého řádu součinu dvou funkcí užíváme tzv. Leibnizův vzorec

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} . \qquad [29]$$

PDF-XChange
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

V.71 Věta. *Nechť $n \geq 0$. Pro všechna čísla $x \in \mathrm{D}(f^{(n)})$ a všechna čísla $\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$ platí rovnost*

$$\mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n,$$

kde symbol $\mathrm{d}x^n$ značí mocninu $(\mathrm{d}x)^n$.

V.72 Poznámka. K rovnosti $\mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$, $n \geq 2$, se dospěje takto: $\mathrm{d}^n f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f(x)) = \mathrm{d}(f^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x^{n-1}) = (f^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x^{n-1})'\mathrm{d}x = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$ (při derivování se proměnná $\mathrm{d}x$ považuje za konstantu, protože nezávisí na proměnné x).

V.73 Definice. Nechť $n \geq 0$. Funkci $f^{(n)}(x_0)\mathrm{d}x^n$ proměnné $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$, nazýváme *diferenciál n-tého řádu* nebo *n-tý diferenciál funkce f v bodě x_0* a značíme $\mathrm{d}^n f(x_0)$. Tedy

$$\mathrm{d}^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\mathrm{d}x^n.$$

Existuje-li diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0, říkáme též, že funkce f má *diferenciál n-tého řádu* nebo je *n-krát diferencovatelná* v bodě x_0.

V.74 Poznámky.

1. V případě $n \geq 2$ značíme diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0 také $[\mathrm{d}^n f(x)]_{x=x_0}$, při zápisu $y = f(x)$ též $[\mathrm{d}^n y]_{x=x_0}$, u konkrétní funkce též $[\mathrm{d}^n(f(x))]_{x=x_0}$.

2. Z definice 5.70 a věty 5.71, resp. z definice 5.73, vysvítá, proč se derivace n-tého řádu funkce f, resp. derivace n-tého řádu funkce f v bodě x_0, $n \geq 2$, značí také jako podíl $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, resp. $\frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n}$.

V.75 Příklad. Vypočtěme diferenciál 3. řádu funkce $f(x) = (3-x)^5$ v bodě 2.

Řešení: $f'(x) = -5(3-x)^4$, $f''(x) = 20(3-x)^3$, $f'''(x) = -60(3-x)^2$, $x \in \mathbf{R}$.
$\mathrm{d}^3 f(x) = -60(3-x)^2\mathrm{d}x^3$, $x \in \mathbf{R}$, a tedy $\mathrm{d}^3 f(2) = -60\mathrm{d}x^3$.

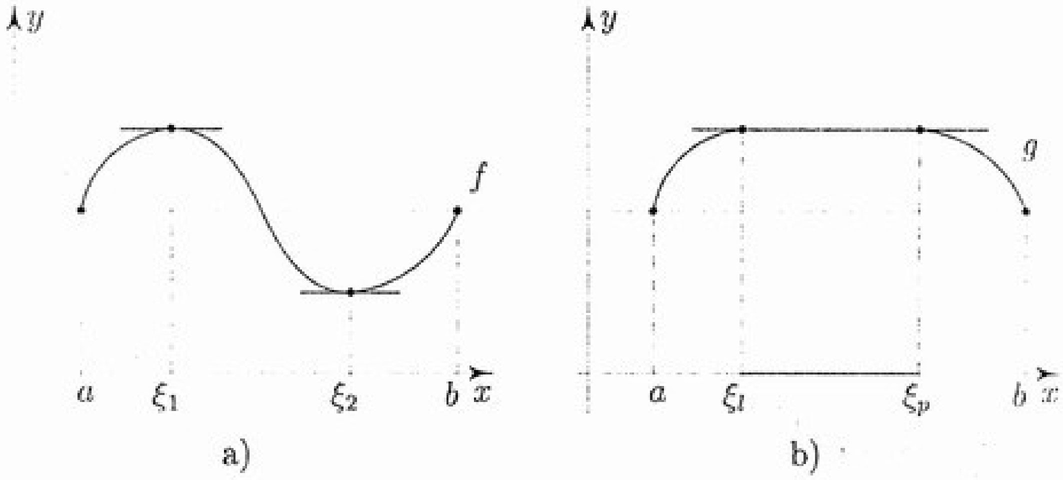
Základní věty diferenciálního počtu

Věta 4.46 nás informovala o zajímavých a užitečných vlastnostech funkcí spojitých na uzavřeném intervalu. Další zajímavé a užitečné vlastnosti mají funkce spojité na uzavřeném intervalu, pokud mají derivaci (vlastní či nevlastní) v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. V tomto oddílu předpokládáme, že uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ má nenulovou délku.

V.76 Věta (Rolleova). *Nechť funkce f má tyto vlastnosti:*
1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. má derivaci na otevřeném intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.
Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Poznámka. Věta 5.76 zaručuje jen existenci aspoň jednoho vnitřního bodu intervalu, ve kterém je derivace funkce f rovna 0. Neumožňuje určení počtu ani polohy takovýchto bodů.

V.77 Geometrická interpretace. Splňuje-li funkce f předpoklady Rolleovy věty, existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že tečna t grafu $\mathsf{G}(f)$ sestrojená v bodě $[\xi, f(\xi)]$ je rovnoběžná s osou x, protože pro směrnici k_t tečny t platí $k_t = f'(\xi) = 0$.



Obr. 5.14: K Rolleově větě

Graf $\mathsf{G}(f)$ na obr. 5.14a) má jednotlivé body ξ_1, ξ_2, graf $\mathsf{G}(g)$ na obr. 5.14b) má nekonečně mnoho bodů $\langle \xi_l, \xi_p \rangle$, ve kterých je jeho tečna rovnoběžná s osou x.

V.78 Věta (Lagrangeova, též o střední hodnotě nebo o diferenci (přírůstku) funkce). *Nechť funkce f má tyto vlastnosti:*
1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. má derivaci na otevřeném intervalu (a, b).
Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Poznámka. Lagrangeova věta je zobecněním Rolleovy věty, neobsahuje její třetí podmínku. Jestliže funkce f splňuje tuto podmínku, pak tvrzení Lagrangeovy věty je shodné s tvrzením Rolleovy věty: existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že je $f'(\xi) = 0$.

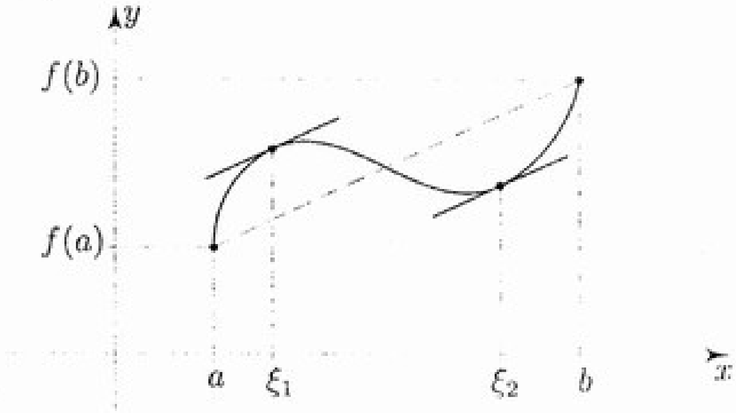
Vztah pro derivaci $f'(\xi)$ lze upravit a vyjádřit tak diferenci funkce f v bodě a:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

V.79 Geometrická interpretace. Splňuje-li funkce f předpoklady Lagrangeovy věty, existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že tečna t grafu $\mathsf{G}(f)$ sestrojená v bodě $[\xi, f(\xi)]$ je rovnoběžná se sečnou s, procházející body $A[a, f(a)]$ a $B[b, f(b)]$ grafu $\mathsf{G}(f)$. Číslo $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je směrnice k_s sečny s a platí

$$k_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = k_t,$$

k_t je směrnice tečny t.



Obr. 5.15: K Lagrangeově větě

Lagrangeova věta měla velký význam pro rozvoj diferenciálního počtu a má řadu důsledků; uvedeme dva z nich:

V.80 Věta. *Nechť funkce f splňuje podmínky Lagrangeovy věty a navíc pro všechna čísla $x \in (a, b)$ je $f'(x) \neq 0$. Potom funkce f je prostá na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

V.81 Věta. *Funkce f je konstantní na intervalu (a, b), právě když pro všechna čísla $x \in (a, b)$ je $f'(x) = 0$.*

V.82 Věta (Cauchyova, též zobecněná věta o střední hodnotě). *Nechť funkce f a g mají tyto vlastnosti:*
1. jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. mají derivaci na otevřeném intervalu (a, b), přitom $g'(x)$ je vlastní pro každé $x \in (a, b)$,
3. $g'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (a, b)$.
Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Poznámka. Cauchyova věta je zobecněním Lagrangeovy věty. Jestliže $g(x) = x$, $x \in \langle a, b\rangle$, pak tvrzení Cauchyovy věty je shodné s tvrzením Lagrangeovy věty: Existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že je $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

V.83 Poznámka. Připomínáme, že v Rolleově, Lagrangeově i Cauchyově větě, jež se někdy souhrnně nazývají větami o střední hodnotě, se derivací rozumí vlastní nebo nevlastní derivace.

L'Hospitalovo pravidlo

K výpočtu limit funkcí v bodě jsme zatím užívali převážně věty 4.15–4.21 a 4.47 a základní limity. V tomto oddílu si ukážeme, jak lze užitím derivací funkcí vypočítat limity některých funkcí pohodlněji. Půjde především o výpočty limit funkcí, vedoucí k některému z neurčitých výrazů. Úplný výčet typů neurčitých výrazů je uveden v poznámce 3.34.3.

Nejprve se zaměříme na neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$, obdržíme při výpočtu limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$, je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, resp. $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = \lim\limits_{x\to c}|g(x)| = +\infty$. Limity funkcí, vedoucí k některému z těchto typů neurčitých výrazů, lze často vypočítat užitím následující věty.

V.84 Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť $c \in \mathbf{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují tyto podmínky:*

1. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ *nebo* $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = \lim\limits_{x\to c}|g(x)| = +\infty$,
2. *existuje limita* $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pak existuje i limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí rovnost*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámky.

1. Ve větě 5.84 limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ a $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ jsou vlastní nebo nevlastní.

2. Věta 5.84 platí i v případě, kdy $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, $L \in \mathbf{R}$, a $\lim\limits_{x\to c}|g(x)| = +\infty$.

3. Je-li $c \in \mathbf{R}$, věta 5.84 zůstává v platnosti, když všechny limity funkcí v bodě c nahradíme limitami funkcí zprava, resp. zleva, v bodě c.

4. Věta obrácená k větě 5.84 neplatí; z existence limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ nevyplývá existence limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5. Hlavní význam l'Hospitalova pravidla spočívá v tom, že výpočet limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bývá často jednodušší než výpočet limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Uvědomte si! Při použití l'Hospitalova pravidla nederivujeme podíl dvou funkcí, nýbrž derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli zlomku.

– l'Hospitalovo pravidlo můžeme, jsou-li splněny příslušné podmínky, opakovat vícekrát za sebou.
– Neexistuje-li $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, nelze l'Hospitalovo pravidlo použít; o limitě $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ nemůžeme nic vypovídat.
– Může se stát, že použití l'Hospitalova pravidla nevede k cíli a danou limitu je třeba vypočítat jiným způsobem.
– Užíváme-li při výpočtu limit l'Hospitalovo pravidlo, je nezbytné přesvědčit se, že jde buď o limitu typu $\left(\frac{0}{0}\right)$ a $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Jinak totiž nemusí platit

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Např.: Nechť $f(x)=\sin x+\cos x$ a $g(x)=x+2$.
Pak $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\cos x}{x+2}=\dfrac{0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$
a přitom $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sin x}{1}=\dfrac{1-0}{1}=1.$
V tomto případě *nebyla splněna* podmínka $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$
ani $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=\lim\limits_{x\to c}|g(x)|=\infty$.

Připomeneme neurčité výrazy: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ 0^0, ∞^0, 1^∞.

Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$

IV.108 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-x^2-20x}{2x^2-10x}$.

Řešení:
Protože

$$\lim_{x\to 5}f(x)=\lim_{x\to 5}(x^3-x^2-20x)=125-25-100=0$$

$$\text{a}\ \lim_{x\to 5}g(x)=\lim_{x\to 5}(2x^2-10x)=50-50=0\,,$$

vede limita $\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)}{g(x)}$ k neurčitému výrazu $\left(\frac{0}{0}\right)$ a můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 5}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-2x-20}{4x-10}=\frac{3\cdot 25-2\cdot 5-20}{4\cdot 5-10}=\frac{75-10-20}{20-10}=\frac{45}{10}=\frac{9}{2}\,.$$

Podle věty IV.107 existuje i limita $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-x^2-20x}{4x-10}$ a je rovna limitě $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-2x-20}{4x-10}$.

Není moudrý ten, kdo ví mnoho,
ale ten, kdo ví, čeho je třeba.

Ezop

V
Aplikace diferenciálního počtu

Základní poznatky

Z rozsáhlé oblasti užití diferenciálního počtu jsme již některá z nich v předchozích kapitolách uvedli, např. určování rovnic tečny a normály grafu funkce v bodě, přibližný výpočet diference funkce v bodě, l'Hospitalovo pravidlo atd.
V této kapitole se budeme zabývat především vyšetřováním průběhu funkce, vyhledáváním globálních extrémů a řešením slovních úloh na extrémy. Nejprve uvedeme nezbytný přehled základních poznatků, bez nichž se dále neobejdeme.
V celé kapitole budeme derivací funkce rozumět vlastní i nevlastní derivaci funkce.

V.1 Definice. *Funkci f nazýváme rostoucí, resp. klesající, v bodě $c \in D(f)$,* existuje-li redukované okolí $U^*(c,\delta) \subset D(f)$ takové, že pro všechny body $x \in U^*_-(c,\delta)$ platí $f(x) < f(c)$, resp. $f(x) > f(c)$, a pro všechny body $x \in U^*_+(c,\delta)$ platí $f(x) > f(c)$, resp. $f(x) < f(c)$.

V.2 Věta (o ryzí monotónnosti funkce v bodě).
Nechť funkce f má první derivaci v bodě c. Je-li $f'(c) > 0$, resp. $f'(c) < 0$, pak je funkce f rostoucí, resp. klesající, v bodě c.

V.3 Věta (o ryzí monotónnosti funkce na otevřeném intervalu).
Nechť funkce f má první derivaci na intervalu (a,b). Jestliže pro všechny body $x \in (a,b)$ je $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, pak je funkce f rostoucí, resp. klesající, na intervalu (a,b).

Postup při určování (nejdelších) intervalů ryzí monotónnosti funkce f, obsažených v množině D(f').

- Vypočteme 1. derivaci funkce f, řešíme nerovnici $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, $x \in D(f')$, a užijeme větu V.3.
- Monotónnost v bodech $x \notin D(f')$ vyšetříme podle definice V.1.

V.4 Definice (ostrého lokálního extrému funkce).
Říkáme, že *funkce f má v bodě $c \in D(f)$ ostré lokální maximum* $f(c)$, resp. *ostré lokální minimum* $f(c)$, existuje-li redukované okolí $U^*(c)$ takové, že pro všechny body $x \in U^*(c)$ platí $f(x) < f(c)$, resp. $f(x) > f(c)$.

V.5 Věta (Nutná podmínka pro lokální extrém).
Má-li funkce f lokální extrém v bodě c a existuje-li první derivace $f'(c)$, pak $f'(c) = 0$.

V.6 Definice (stacionárního bodu funkce).
Bod $c \in D(f)$ nazýváme *stacionárním bodem* funkce f, existuje-li derivace $f'(c)$ a je-li $f'(c) = 0$.

Poznámka. Tečna grafu funkce f ve stacionárním bodě je rovnoběžná s osou x.

V.7 Věta (1. postačující podmínka pro ostrý lokální extrém).
Nechť c je stacionární bod funkce f a funkce f má 2. derivaci v bodě c. Pak platí: Je-li $f''(c) \neq 0$, má funkce f ostrý lokální extrém v bodě c, a to ostré lokální maximum pro $f''(c) < 0$ a ostré lokální minimum pro $f''(c) > 0$.

Poznámka. Funkce f může mít lokální extrém nejen ve svých stacionárních bodech, ale též ve vnitřních bodech svého definičního oboru, ve kterých její 1. derivace neexistuje.

V.8 Věta (2. postačující podmínka pro ostrý lokální extrém).
Nechť funkce f je spojitá v bodě c a má 1. derivaci na jistém redukovaném okolí $U^*(c,\delta)$. Pak platí:
Je-li $f'(x) < 0$, resp. $f'(x) > 0$, pro všechny body $x \in U^*_-(c,\delta)$ a $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, pro všechny body $x \in U^*_+(c,\delta)$, má funkce f ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, v bodě c.
Je-li $f'(x) > 0$ pro všechny body $x \in U^*(c,\delta)$ nebo $f'(x) < 0$ pro všechny body $x \in U^*(c,\delta)$, nemá funkce f lokální extrém v bodě c.

Stručně: Mění-li 1. derivace f' znaménko ze záporného na kladné, resp. z kladného na záporné, v bodě c, pak má funkce f ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, v bodě c.
Nemění-li 1. derivace znaménko v bodě c, pak nemá funkce f lokální extrém v bodě c.

Postup při hledání lokálních extrémů funkce f.

- Vyhledáme všechny body podezřelé z extrému funkce f, tj.

  (A) vnitřní body definičního oboru $D(f)$, v nichž je *první* derivace f' rovna číslu 0 (stacionární body funkce f),

  (B) vnitřní body definičního oboru $D(f)$, v nichž první derivace f' neexistuje (body, v nichž má graf funkce hrot, body odstranitelné nespojitosti).

- Rozhodneme o existenci a typu lokálního extrému funkce f v bodech skupiny (A) podle některé z vět V.7 a V.8 nebo na základě definice V.4 a v bodech skupiny (B) podle věty V.8, splňuje-li funkce f její předpoklady nebo na základě definice V.4. Volba vět, které užijeme, závisí na konkrétní funkci, případně na tom, zda se mají či nemají vyšetřovat další vlastnosti funkce.

V.9 Definice (globálního extrému funkce).
Říkáme, že funkce f má v bodě $c \in D(f)$ *globální maximum* $f(c)$, resp. *globální minimum* $f(c)$, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq f(c)$, resp. $f(x) \geq f(c)$. Značíme $\max f(x)$, resp. $\min f(x)$.

Poznámka. Lze hovořit i o globálních extrémech funkce f na množině $M \subset D(f)$. Výše uvedené nerovnosti pak musí platit pro všechna $x \in M$ a píšeme pak
$f(c) = \max\limits_{x \in M} f(x)$, resp. $f(c) = \min\limits_{x \in M} f(x)$.
Postup pro nalezení globálních extrémů funkce je uveden v dalším odstavci na str. 296.

V.10 Definice (funkce ryze konvexní, resp. ryze konkávní, v bodě).
Říkáme, že *funkce f je ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní, v bodě c*, existuje-li tečna grafu $G(f)$ v bodě $[c, f(c)]$, která není rovnoběžná s osou y, a jisté redukované okolí $U^*(c)$ takové, že všechny body $[x, f(x)]$ grafu $G(f)$, pro které $x \in U^*(c)$, leží nad, resp. pod, tečnou $G(f)$ v bodě $[c, f(c)]$.

V.11 Věta (o ryzí konvexitě, resp. konkavitě, funkce v bodě).
Nechť funkce f má 2. derivaci v bodě c. Pak platí:
Je-li $f''(c) > 0$, resp. $f''(c) < 0$, je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, v bodě c.

V.12 Definice (funkce ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na otevřeném intervalu).
Říkáme, že *funkce f je ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní, na otevřeném intervalu* (a, b), jestliže všechny body $[x, f(x)]$ grafu $G(f)$, pro které platí $a < x_1 < x < x_2 < b$, leží pod, resp. nad, přímkou procházející body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$.

V.13 Věta (o ryzí konvexitě, resp. ryzí konkavitě, funkce na otevřeném intervalu).
Nechť funkce f má 2. derivaci na intervalu (a, b). Je-li $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$, pro všechny body $x \in (a, b)$, pak je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu (a, b).

Postup při určování (nejdelších) intervalů ryzí konvexity, resp. ryzí konkavity, funkce f, obsažených v množině $D(f'')$.

- Vypočteme druhou derivaci funkce f, řešíme nerovnici $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$, $x \in D(f'')$, a užijeme větu V.13.

V.14 Definice (inflexního bodu).
Nechť funkce f je spojitá v bodě c a má 1. derivaci v bodě c. Říkáme, že *funkce f má inflexi v bodě c*, existuje-li levé redukované okolí $U_-^*(c)$ takové, že funkce f je na něm ryze konvexní a pravé redukované okolí $U_+^*(c)$ takové, že funkce f je na něm ryze konkávní, nebo naopak.
Bod $[c, f(c)]$ nazýváme *inflexním bodem* grafu $G(f)$ a tečnu grafu $G(f)$ v tomto bodě nazýváme *inflexní tečnou* grafu $G(f)$.

V.15 Věta (Nutná podmínka pro existenci inflexe). *Má-li funkce f inflexi v bodě c a existuje-li druhá derivace $f''(c)$, pak $f''(c) = 0$.*

Poznámka. Spojitá funkce může mít inflexi i v bodě, ve kterém neexistuje f'' a přitom existuje f'.

V.16 Věta (1. postačující podmínka pro existenci inflexe).
Nechť funkce f má druhou derivaci v bodě c a platí $f''(c) = 0$. Je-li $f'''(c) \neq 0$, pak má funkce f inflexi v bodě c.

V.17 Věta (2. postačující podmínka pro existenci inflexe).
Nechť funkce f má 1. derivaci spojitou v bodě c a 2. derivaci na jistém redukovaném okolí $U^*(c, \delta)$. Pak platí:
Je-li $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$, pro všechny body $x \in U_-^*(c, \delta)$ a $f''(x) < 0$, resp. $f''(x) > 0$, pro všechny $x \in U_-^*(c, \delta)$, pak má funkce f inflexi v bodě c.
Je-li $f''(x) > 0$ pro všechny body $x \in U^*(c, \delta)$ nebo $f''(x) < 0$ pro všechny $x \in U^*(c, \delta)$, pak funkce f nemá inflexi v bodě c.

Stručně: Mění-li derivace f'' v bodě c znaménko, má funkce f inflexi v bodě c. Nemění-li derivace f'' v bodě c znaménko, nemá funkce f inflexi v bodě c.

Postup při vyšetřování inflexe funkce f.

- Vyhledáme všechny body podezřelé z inflexe funkce f, tj.
  - (A) vnitřní body definičního oboru $D(f)$, v nichž je *druhá* derivace f'' rovna číslu 0,
  - (B) vnitřní body definičního oboru $D(f)$, v nichž *druhá* derivace f'' neexistuje a přitom existuje derivace f' a funkce f je spojitá.

- Rozhodneme o existenci inflexe funkce f v bodech skupiny (A) podle některé z vět V.16, V.17 nebo na základě definice V.14 a v bodech skupiny (B) podle věty V.17 nebo na základě definice V.14. Volba vět, které užijeme, závisí na konkrétní funkci, případně na tom, zda se mají či nemají vyšetřovat další vlastnosti funkce.

V.18 Definice (asymptoty bez směrnice).
Nechť funkce f je definována aspoň na jednom jednostranném redukovaném okolí bodu c. Přímku $x = c$ nazýváme *asymptotou bez směrnice* nebo *vertikální asymptotou* grafu funkce f, má-li funkce f aspoň jednu jednostrannou limitu v bodě c nevlastní.

V.19 Definice (asymptoty se směrnicí).
Nechť funkce f je definována na okolí jednoho nebo na okolích obou nevlastních bodů. Přímku $y = kx+q$ nazýváme *asymptotou se směrnicí* nebo *šikmou asymptotou* grafu funkce f, jestliže platí

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+q)]=0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+q)]=0\,.$$

Z definice vyplývá, že graf $G(f)$ má ve speciálním případě asymptotu o rovnici $y = q$, tzv. *horizontální asymptotu*, právě když existuje vlastní limita $\lim_{x\to+\infty} f(x) = q$, resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = q$.

V.20 Věta (o rovnici asymptoty se směrnicí).
Přímka o rovnici $y = kx+q$ je asymptotou se směrnicí grafu $G(f)$, a to asymptotou v nevlastním bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, právě když existují vlastní limity

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k\,,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=q\,,$$

resp.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k\,,\quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=q\,.$$

Pokud některá z limit ve větě V.20 je nevlastní nebo neexistuje, nemá graf $G(f)$ asymptotu v příslušném nevlastním bodě.

Postup při určování asymptot grafu funkce.

- Najdeme body nespojitosti funkce f, vypočteme jednostranné limity funkce f v těchto bodech a rovnice vertikálních asymptot grafu funkce f určíme na základě definice V.18.
- Rovnice asymptot se směrnicí grafu funkce f určíme na základě věty V.20.

Průběh funkce

V tomto oddílu využijeme téměř všechny poznatky až dosud získané. Průběh funkce není přesně vymezeným pojmem. Vyšetřováním průběhu funkce budeme rozumět získávání souhrnu informací o vlastnostech funkce, postačujícího k bezchybnému sestrojení grafu funkce. Domluvíme se nyní na tom, které informace do tohoto souhrnu zařadíme. Tento souhrn bude maximální v tom smyslu, že u některých funkcí budeme muset zjišťovat všechny informace a u jiných jen některé z nich (např. u funkcí s omezeným definičním oborem odpadá výpočet limit funkce v nevlastních bodech).

Postup při vyšetřování průběhu funkce.

1. Určíme definiční obor funkce, zjistíme, zda je funkce sudá nebo lichá nebo periodická, určíme intervaly, na kterých je kladná či záporná, body, ve kterých je nulová, tj. průsečíky jejího grafu s osou x, a průsečíky jejího grafu s osou y.
2. Vyšetříme spojitost funkce, určíme body nespojitosti funkce a jejich typ, což zahrnuje výpočet jednostranných limit funkce v jejích bodech nespojitosti, určíme rovnice asymptot bez směrnice jejího grafu a vypočteme limity funkce v krajních bodech intervalů, na které je rozdělen její definiční obor, případně v nevlastních bodech.
3. Vypočteme 1. derivaci funkce, určíme definiční obor této derivace, intervaly ryzí monotónnosti funkce, body, ve kterých má funkce ostré lokální extrémy, a ostré lokální extrémy funkce v těchto bodech.
4. Vypočteme 2. derivaci funkce, určíme definiční obor této derivace, intervaly ryzí konvexity či ryzí konkavity funkce, body, ve kterých má funkce inflexi, a inflexní body grafu funkce.
5. Určíme rovnice asymptot se směrnicí grafu funkce.
6. Zjistíme dodatečné údaje podle potřeby:
   - určíme směrnice inflexních tečen, event. souřadnice dalších bodů grafu funkce (slouží k upřesnění grafu funkce),
   - zjistíme, zda je funkce prostá, zda je omezená, určíme globální extrémy a body, v nichž těchto extrémů funkce nabývá,
   - najdeme intervaly, na kterých je funkce konstantní či lineární aj.
7. Sestrojíme graf funkce.

Výše uvedený postup není závazným předpisem, je pouze systematickým návodem k tomu, jak získat názornou představu o průběhu funkce. Při řešení příkladů budeme však tento postup dodržovat.

Ani po úplném vyšetření průběhu funkce podle uvedeného postupu nemáme zaručeno, že graf funkce bude dokonalý. Můžeme ho totiž sestrojovat jen na základě

PDF-Xchange Click to buy NOW! www.docu-track.com

znalosti konečného počtu bodů. Hustota těchto bodů by měla být vyšší v okolí význačných bodů (bodů nespojitosti funkce, bodů, ve kterých funkce má lokální extrémy, bodů, ve kterých funkce má inflexi, ...) nebo bodů, na jejichž okolí je průběh funkce méně jasný.

Poznámka. Někdy pro obtížnost výpočtu některé body výše uvedeného postupu vynecháváme (např. průsečíky s osami). Rovněž když se v textu příkladu požaduje jen některá vlastnost funkce, ne „celý průběh", nepotřebné body postupu vynecháme.

Praktické rady pro sestrojení grafu funkce:

- Je užitečné využít znalost všech zjištěných vlastností funkce a jejich geometrické interpretace. (Zjistíme-li např., že funkce je sudá, zakreslíme její graf pro nezáporné hodnoty nezávisle proměnné a pro nekladné hodnoty nezávisle proměnné ho nakreslíme souměrně podle osy y).
- Kvůli přehlednosti je vhodné zaznamenávat nejdůležitější údaje o průběhu funkce do tabulky.
- Vyplatí se průběžně zakreslovat body, jejichž souřadnice byly zjištěny, a zjištěné dílčí údaje do obrázku. Mohou se tím odhalit případné chyby.
- Postupně získávané výsledky při vyšetřování průběhu funkce shrneme do přehledné závěrečné tabulky. Zvláště cenná bude *vámi* provedená konfrontace výsledků s grafem $G(f)$ a uvědomění si veškerých souvislostí. Ve formě závěrečné tabulky a připojeného grafu budou uváděny i výsledky cvičení na průběh funkce.

Závěrečná tabulka s naznačeným schematickým zápisem výsledků

$D(f)$	intervaly	f je sudá, lichá, periodická, prostá	
P	bod a jeho souřadnice, indexy podle počtu		
$-$	interval(y)	$+$	interval(y)
$\sim$ množina	body nespojitosti	v. as.	rovnice + poloha
$\to -\infty$	hodnota	$\to +\infty$	hodnota
$\nearrow$	interval(y)	$\searrow$	interval(y)
$\overline{M}$	typ + souřadnice bodu	$\underline{M}$	typ + souřadnice bodu
$\cup$	interval(y)	$\cap$	interval(y)
I	typ + souřadnice bodu		
š. as.	rovnice asymptot(y) se směrnicí; v případě horizontální asymptoty h. as. rovnice + poloha		
omezenost	globální maximum a minimum; hodnota + bod		

Označení uvedená v této tabulce jsou vysvětlena na následující straně.